



MƏRUZƏLƏR

AZƏRBAYCAN MILLI ELMLƏR AKADEMIYASI



REPORTS

NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF AZERBAIJAN



ДОКЛАДЫ

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА



№ 2
2009

Т.М.АХМЕДОВ, М.В.ИВАХНИЧЕНКО, Э.И.ВЕЛИЕВ

**ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В
ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ**

(Представлено академиком НАН Азербайджана А.М.Гашимовым)

Введение.

Получение простых граничных условий (ГУ) для описания поверхности новых сложных материалов является актуальной задачей современной радиофизики. Отметим, что при рассмотрении таких граничных условий имеют место два аспекта. Первый из них связан с нахождением граничных условий для описания рассеивающих свойств заданной физической структуры. Второй аспект – это нахождение физической структуры, которая реализует заданные граничные условия. Последняя задача является актуальной в теории антенн, в частности, для получения антенн с заданными излучающими свойствами.

С другой стороны, введение новых ГУ позволяет строить модели границ с новыми свойствами. Реализация границ с произвольным значением параметров, определяющих ГУ, является в общем случае достаточно сложной задачей.

Простое математическое описание рассеивающих свойств поверхностей является одной из общих задач моделирования в задачах дифракции.

Достаточно хорошо изученная граница, которая может служить промежуточным состоянием между идеально электрически проводящей (ИЭП) и идеально магнитно проводящей (ИМП) границами, – это импедансная граница [1, 2]:

$$\vec{n} \times \vec{E}(\vec{r}) = \eta \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{H}(\vec{r})), \quad \vec{r} \in S, \quad (1)$$

где \vec{n} – нормаль к поверхности S , а функции $\vec{E}(\vec{r})$ и $\vec{H}(\vec{r})$ описывают напряженности электрических и магнитных полей соответственно. Они между собой связаны уравнениями Максвелла [1]. Значение импеданса η меняется от 0 для ИЭП до $i\infty$ для ИМП. Уравнение (1) соответствует импедансным граничным условиям (ИГУ).

Задачам дифракции на импедансных границах посвящено большое количество работ. При этом ИГУ успешно использовались для моделирования отражающих свойств хороших проводников, а также решеток и др. В каждом случае существуют формулы для получения значения импеданса как функции проводимости металла, параметров решетки и др. ИГУ являются приближенными ГУ, имеют ограничения для их применения и не могут описать всего многообразия отражающих поверхностей.

Дальнейшее уточнение ИГУ может быть выполнено с использованием производных более высокого (целого) порядка или обобщенных ГУ [1, 3, 4]. Общая методология получения точных импедансных ГУ высокого порядка в спектральной области представлена в монографии [3], где были рассмотрены плоские покрытия (а также поверхности с кривизной), состоящие из однородных материалов с произвольными (линейными, бианизотропными) материальными уравнениями. Как было показано в [3], в спектральной области можно получить точные ИГУ, зачастую, в аналитической форме. Однако не всегда удается их получить в пространственной области в точном виде, поэтому необходимо аппроксимировать ИГУ в спектральной области, чтобы можно было применить обратное преобразование Фурье. В основном для аппроксимации используются рациональные функции. Этот метод позволил вывести ИГУ высокого порядка для различных покрытий: многослойных [5-7], неоднородных диэлектрических слоев [8], многослойных покрытий на криволинейных проводящих телах [9], неоднородных диэлектрических слоев [10], однородных бианизотропных слоев [10], а также для сложных геометрий [11].

Другое, не менее простое с математической точки зрения, чем импедансное, граничное условие, обобщающее идеальные границы, было предложено в 2005 г. в работах [12, 13] – идеально электрически-магнитно проводящая (ИЭМП) граница:

$$\vec{H} + M\vec{E} = 0. \quad (2)$$

При $M = 0$ ИЭМП переходит в ИЭП границу, а при $M = \infty$ в ИМП.

Физическая модель границы была предложена в 2006 г. в работе [13], где И.В.Линделл показал, что для нормального падения ИЭМП может моделировать отражение от анизотропного слоя и др. При этом задача дифракции на подобной границе не рассматривалась. Дальнейшее обобщение ИЭМП – обобщенная поверхность (soft-and-hard, GSHS), рассмотрена в [14] в виде ГУ

$$\vec{a} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{b} \cdot \vec{H} = 0,$$

где \vec{a} , \vec{b} – комплексные вектора, удовлетворяющие условию $\vec{n} \cdot \vec{a} = \vec{n} \cdot \vec{b} = 0$ и $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$.

GSHS поверхность может трансформировать любую заданную поляризацию плоской падающей волны в любую другую поляризацию отраженной волны при соответствующем выборе векторов \vec{a} , \vec{b} [14].

Использование дробных производных приводит к дробным ГУ (ДГУ), обобщающих идеальные границы:

$$D_n^\nu U(\vec{r})|_S = 0, \quad (3)$$

где дробная производная берется по нормали к поверхности, а ν - дробный порядок. Здесь дробная производная $D_n^\nu U(\vec{r})$ определяется по Риману-Лиувиллю.

Крайние случаи дробного порядка $\nu = 0$ и $\nu = 1$ приводят к ИЭП и ИМП границам, соответственно. ДГУ обобщают идеальные границы, такие как ИЭП и ИМП. ДГУ рассматривались в задачах отражения в работах Э. И. Велиева, Н.Энгета [15, 16, 17] в 2003 г., где были приведены коэффициенты отражения от границ, описываемых ДГУ. Показано, что граница имеет коэффициент отражения, равный по модулю 1, т.е. соответствует идеально отражающей границе. При этом фаза коэффициента отражения определяется дробным порядком.

ДГУ являются примером нелокальных ГУ. Это означает, что значение функции на границе зависит от значений поля в точках на конечном расстоянии от границы, в отличие от классических ГУ (ИЭП, ИМП, ИГУ), когда значение на границе определяется только значениями поля в точках, бесконечно близких к границе. Это связано с применением производных нецелого порядка вместо обычных производных.

В задачах рассеяния нелокальные ГУ широко применяются в численных алгоритмах, основанных на методе конечных элементов или методе конечных разностей [18, 19]. Процедура основана на рассмотрении конечной области, ограничивающей рассеивающий объект для усечения рассчитываемого региона, при этом на границе новой области требуется выполнение новых ГУ, которые обычно имеют нелокальный характер. Нелокальные ГУ находят применение для волнового уравнения в параболическом приближении [19]. Нелокальные ГУ являются эффективной альтернативой традиционному использованию поглощающих слоев [19].

Для понимания ключевых свойств дробной границы в данной работе рассматриваются задачи отражения от бесконечной границы с ДГУ. Также рассматривается двумерная задача дифракции на конечных границах с ДГУ, которая до этого не рассматривалась другими авторами.

Основные вопросы, связанные с рассмотрением ДГУ в задаче дифракции, можно сформулировать следующим образом:

- разработка численно-аналитического метода решения, который позволил бы с нужной точностью получать численные результаты для исследования характеристик дробного решения;
- качественное изучение физических свойств дробной границы;
- связь дробной границы с другими известными границами;
- физическая реализация дробной границы.

Задачи дифракции на границах с ДГУ требуют методологии и построения математического аппарата для их решения. В данной работе рассматривается двумерная задача дифракции на ленте, описываемой ДГУ, для решения которой разработан и реализован численный алгоритм.

В силу развитости математического аппарата дробных производных ДГУ являются простым обобщением идеальных границ (ИЭП и ИМП). ДГУ позволяют получить новые математические модели для описания отражательных свойств материалов. Благодаря специфическим свойствам границ, описываемых ДГУ, представляется актуальным описать и реализовать подобные структуры. ДГУ требуют детального изучения с физической и математической точек зрения.

ДГУ для бесконечных границ.

Для задачи отражения E -поляризованной плоской электромагнитной волны от бесконечного полупространства ($y < 0$), с ДГУ в виде

$$D_{ky}^{\nu} E_z(x, y) = 0, \quad y \rightarrow +0, \quad (4)$$

имеем коэффициент отражения [17]

$$R_{\nu} = -(-1)^{-\nu} = -e^{-i\pi\nu}.$$

Для импедансной границы коэффициент отражения имеет вид [1]

$$R^{imp} = -\frac{1 - \eta(\eta_0)^{-1} \sin \theta_0}{1 + \eta(\eta_0)^{-1} \sin \theta_0}. \quad (5)$$

Сравнение коэффициентов отражения для ДГУ и ИГУ позволяет вывести соотношение между дробным порядком и импедансом. В самом деле, ДГУ могут моделировать ИГУ, если выбрать дробный порядок из соотношения:

$$\nu = \frac{1}{i\pi} \ln \left(\frac{1 + \eta(\eta_0)^{-1} \sin \theta_0}{1 - \eta(\eta_0)^{-1} \sin \theta_0} \right), \quad (6)$$

где θ_0 - угол падения.

Дробный порядок $\nu = 0$ соответствует ИЭП ($R = 1, \eta = 0$). Значение $\nu = 1$ соответствует импедансу $\eta = i\infty$, который описывает ИМП границу.

Отражение от диэлектрического слоя (рис. 1) можно моделировать с помощью ДГУ вида (4) (при $y = -d - 0$), если дробный порядок ν выбран из соотношения

$$\nu = \nu(\epsilon, \mu, d) = \frac{1}{i\pi} \ln \left(\frac{R_{12} + R_{23} e^{-i2k_2 d}}{1 + R_{12} R_{23} e^{-i2k_2 d}} \right). \quad (7)$$

Здесь R_{12} и R_{23} коэффициенты отражения от соответствующих границ (см.рис.1). Если $|R_{12}| \ll 1$, $|R_{23}| \ll 1$, то из (7) получаем выражение

$$v = v(\varepsilon, \mu, d) = \frac{1}{i\pi} \ln(R_{12} + R_{23}e^{-i2k_2d}).$$

Если среда 3 - ИЭП, т.е. $\varepsilon_3 = \infty$, то $R_{23} = -1$. Тогда имеем

$$R = \frac{\eta_2 + i \operatorname{ctg}(k_2d)}{\eta_2 - i \operatorname{ctg}(k_2d)}$$

и дробный порядок

$$v = v(\varepsilon, \mu, d, \omega) = \frac{1}{i\pi} \ln \left(\frac{\eta_2 + i \operatorname{ctg}(k_2d)}{\eta_2 - i \operatorname{ctg}(k_2d)} \right),$$

где $\eta_2 \equiv \eta_2 / \eta_1$ - нормализованный импеданс среды 2.

Перепишем это уравнение следующим образом:

$$\operatorname{ctg}(k_2d) = \eta_2 \operatorname{ctg}(\pi v / 2),$$

$$k_2d = \operatorname{arccctg}(\eta_2 \operatorname{ctg}(\pi v / 2)).$$

Значение $v = 0$ соответствует случаю, когда $\operatorname{ctg}(k_2d) = \infty$, $R = -1$. Это выполняется при очевидном случае, когда толщина слоя $d = 0$, а также при толщине слоя $k_2d = \pi n$, $n = 1, 2, 3, \dots$. При $v = 1$ имеем условие $\operatorname{ctg}(k_2d) = 0$ ($k_2d = \pi/2 + \pi n$, $n = 0, 1, 2, \dots$), и $R = 1$.

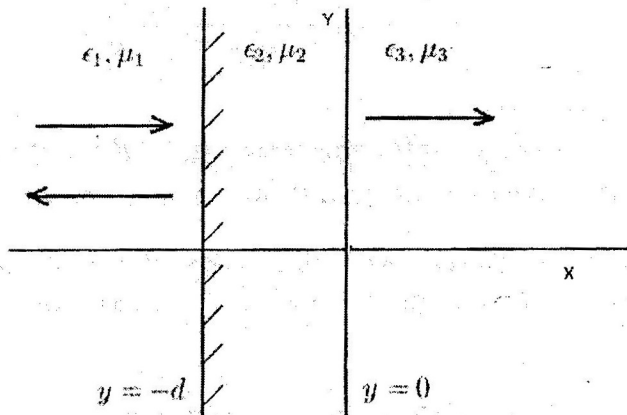


Рис. 1. Геометрия задачи отражения плоской волны от диэлектрического слоя

Дифракция на ленте с ДГУ.

Рассмотрим двумерную задачу дифракции плоской E -поляризованной волны на ленте с дробными граничными условиями (ДГУ) в виде

$$D_y^* E_z(x, y) = 0, \quad y \rightarrow \pm 0. \quad (8)$$

Подробно метод решения этой задачи для случая E -поляризации был рассмотрен в работах [20, 21], где были представлены численные результаты.

Дробная граница может поддерживать как электрический, так и магнитный токи. Подобное распределение поверхностных токов наблюдается для импедансной поверхности. В работе [21] было проведено как качественное, так и численное сравнение отражающих свойств ленты с ДГУ и импедансной ленты с импедансом, который определяется из соотношения (5). Соотношение (5) является точным в случае бесконечных границ. Полученное соотношение (5) можно использовать при рассмотрении конечных границ таким же образом, как были введены ГУ Леонтовича сначала для бесконечных границ, для которых получают значение импеданса, а далее применяются для конечных границ. В этом смысле, так же, как и ИГУ, ДГУ являются приближенными. Для конечных границ точность применения ДГУ вместо ИГУ требует дополнительного анализа и может быть проверена, в частности, численно, решая соответствующие задачи дифракции. В работе [21] были проанализированы рамки применимости ДГУ для моделирования, широко используемых в электродинамике ИГУ в задаче дифракции на ленте.

Физическая реализация.

Обратимся к соотношению (5). Как видно ДГУ при $0 \leq \nu \leq 1$ соответствует чисто мнимому импедансу $\eta = ia$ ($0 \leq a \leq \infty$).

Если принять определение импеданса в виде $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$, тогда ДГУ можно моделировать с помощью слоя с параметрами, связанными соотношением $\varepsilon + \mu \sin^2 \theta_0 = 0$. Здесь величины ε, μ соответствуют диэлектрической и магнитной проводимости среды. Случай $\mu = 1$ соответствует значению диэлектрической проницаемости $\varepsilon = -\sin^2 \theta_0$.

Для резистивного слоя [1] значение резистивности имеет вид $R_z = -\frac{i}{k_0 \tau (\varepsilon - 1)}$, где τ - толщина слоя ($k_0 \tau \ll 1$). Сопоставляя с ДГУ, имеем соотношение

$$k_0 \tau = -\frac{1}{\varepsilon - 1},$$

что соответствует значению $\varepsilon = 1 - \frac{1}{k_0 \tau}$, которые обычно меньше 0. Полу-

ченные соотношения позволяют утверждать, что найдены границы сред с отрицательным значением диэлектрической проводимости. Эти границы принципиально новые.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Senior T.B.* Approximate boundary conditions in electromagnetics / T.B.Senior, J.L.Volakis. – London: The institution of electrical engineers, 1995, 353 p.
2. *Leontovich M.A.* Investigations on radiowave propagation / M.A.Leontovich // Academy of Sciences, 1948, part 2, p. 5–12.
3. *Hope D.J.* Impedance boundary conditions in electromagnetics / D.J.Hope, Y.Rahmat-Samii. – Washington, DC: Taylor and Francis, 1995, 196 p.
4. *Idemen M.* Universal boundary conditions of the electromagnetic fields / M.Idemen // J. Phys. Soc. Jpn., 1990, vol. 59, № 1, p. 71-80.
5. *Cicchetti R.* A Class of exact and higher-order surface boundary conditions for layered structures / R.Cicchetti // IEEE Trans. antennas and propagation, 1996, vol. 44, № 2, p. 249–259.
6. *Ricoy M.A.* Derivation of generalized transition/boundary conditions for planar multiple-layer structures / M.A.Ricoy, J.L.Volakis // Radio Sci., 1990, vol. 25, № 4, p. 391–405.
7. *Tretyakov S.A.* Generalized impedance boundary conditions for isotropic multilayers / S.A.Tretyakov // Microwave Opt. Technol. Lett., 1998, vol. 17, № 4, p. 262-265.
8. *Galdi V.* Higher-order impedance boundary conditions for metal-backed inhomogeneous dielectric layers / V. Galdi, I. M. Pinto // Microwave and optical technology letters, 1999, vol. 22, № 4, p. 249-254.
9. *Galdi V.* SDR approach for higher-order impedance boundary conditions for complex multilayer coatings on curved conducting bodies / V.Galdi, I.M.Pinto // Journal of electromagnetic waves and applications, 1999, vol. 13, № 12, p. 1629-1630.
10. *Galdi V.* Derivation of higher-order impedance boundary conditions for stratified coatings composed of inhomogeneous-dielectric and homogeneous-bianisotropic layers / V.Galdi, I.M.Pinto // Radio Science, 2000, vol. 35, № 2, p. 287-303.
11. *Cicchetti R.* Exact surface impedance/admittance boundary conditions for complex geometries: theory and applications / R.Cicchetti, A.Faraone // IEEE Trans. antennas and propagation, 2000, vol. 48, № 2, p. 223.
12. *Lindell I.V.* Transformation method for Problems Involving Perfect Electromagnetic Conductor (PEMC) Structures / I.V.Lindell, A.H.Sihvola // IEEE Trans. antennas and propagation, 2005, vol. 53, p.3005-3011.
13. *Lindell I.V.* Realization of the PEMC Boundary / I.V Lindell, A.H.Sihvola // IEEE Trans. Antennas Propag., 2005, vol. 53, p.3012-3018.
14. *Hanninen I.* Realization of Generalized Soft-and-Hard Boundary / I. Hanninen, I.V.Lindell, A.H.Sihvola // Progress in electromagnetics research, PIER., 2006, vol. 64, p. 317-333.
15. *Veliev E.* Fractional curl operator in reflection problems / E. Veliev, N. Engheta // Mathematical methods in electromagnetic theory: 10th int. conf., Dnieperpetrovsk, Ukraine, 2004, p. 228–230.
16. *Engheta N.* Fractionalization methods and their applications to radiation and scattering problems / N.Engheta // Mathematical methods in electromagnetic theory: conf. proc., Kharkiv, Ukraine, 2000, p. 34-40.
17. *Ivakhnychenko M.V.* Fractional operators approach in electromagnetic wave reflection problems / M.V.Ivakhnychenko, E.I.Veliev, T.M.Ahmedov // Journal of electromagnetic waves and applications, 2007, vol. 21, № 13, p. 1787–1802.
18. *Samuel P.* Marin, Computing Scattering Amplitudes for Arbitrary Cylinders

Under Incident Plane Waves, IEEE Trans. on antennas and propagation, vol. AP-30, № 6, november 1982.

19. *Anabelle Zebic-Le Hyaric*, Wide-Angle Nonlocal Boundary Conditions for the Parabolic Wave Equation, IEEE Trans. on antennas and propagation, vol. 49, № 6, june 2001.

20. *Veliev E.I.* Fractional boundary conditions in plane waves diffraction on a strip / E.I.Veliev, M.V.Ivakhnychenko, T.M.Ahmedov // Progress in electromagnetics research, 2008, vol. 79, p. 443-462.

21. *Ivakhnychenko M.V.* Scattering properties of the strip with fractional boundary conditions and comparison with the impedance strip / M.V.Ivakhnychenko, E.I.Veliev, T.M.Ahmedov // Progress in electromagnetics research C, 2008, vol. 2, p. 189-205.

T.M.Əhmədov, M.V.İvaxniçenko, E.İ.Vəliyev

KƏSRİ TÖRƏMƏLİ DİFRAKSIYA MƏSƏLƏLƏRİNDƏ SƏRHƏD ŞƏRTLƏRİ

Müstəvi sərhədlərdən elektromaqnit dalğalarının əks edilməsi məsələlərində kəsr törəməli sərhəd şərtlərinin tətbiqi təhlil edilir. Kəsr sərhəd şərti ideal elektrik və maqnit keçiriciləri üçün ümumiləşdirir. Kəsr sərhəd şərti bölünən sərhədlərdən əks olunan məsələlərdə baxılır. Kəsr törəmənin tərtibini müəyyənləşdirmək üçün hər bir halda müəyyən fəadələr alınmışdır.

T.M.Ahmedov, M.V.Ivakhnychenko, E.I.Veliev

BOUNDARY CONDITIONS WITH FRACTIONAL DERIVATES IN DIFFRACTION PROBLEMS

Possibility of utilization of boundary conditions with fractional derivative in electromagnetic waves reflection problems from plane boundaries is analyzed. Fractional boundary conditions (FBC) generalize conditions for perfectly electric and magnetic conducting boundaries. FBC in reflection from interface boundary is considered. Scattering properties of the boundary with FBC and impedance boundary, and also dielectric media, are compared. Equations to determine an order of fractional derivative have been evaluated in each case. Scattering properties of a strip with FBC and an impedance strip are compared on example of diffraction problem by a strip of finite width. Expressions which relate a fractional order and an impedance have been evaluated. FBC correspond impedance boundaries with a pure imaginary value of impedance. Aspects about physical realization of boundaries which are described by FBC are considered.