ELM

MƏRUZƏLƏR

AZƏRBAYCAN MILLI ELMLƏR AKADEMIYASI

REPORTS

NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF AZERBAIJAN

ДОКЛАДЫ

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА

№ 4
2009

AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASININ MƏRUZƏLƏRİ

ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА

TOM LXV CİLD №4 2009

Математика

Т.М.АХМЕДОВ, Э.И.ВЕЛИЕВ

ЗАДАЧА ДИФРАКЦИИ ВОЛН НА ПОЛУПЛОСКОСТИ С ДРОБНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

(Представлено академиком НАН Азербайджана А.М.Гашимовым)

В данной статье впервые рассматривается задача дифракции волн на полуплоскости с новыми дробными граничными условиями. Для строгого решения этой задачи предлагается подход, который обобщает ранее предложенный метод решения для идеально электрически проводящих границ. В основе предложенного подхода лежит метод решения дробного интегро-дифференциального с бесконечными пределами интегрирования, который сводит рассматриваемую задачу к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) относительно неизвестных коэффициентов в разложении рассеянного поля по полиномам Лагерра.

Рассматривается принципиально новая граничная задача теории дифракции - задача дифракции электромагнитных волн на полуплоскости с дробными граничными условиями (ДГУ). ДГУ являются новыми граничными условиями (ГУ), которые были введены в [1]:

$$D^{\alpha}U(r)=0\ ,\ r\to S\,, \tag{1.1}$$

где функция U – тангенциальная компонента электрического или магнитного поля, в зависимости от условий конкретно рассматриваемой задачи. Дробная производная [2] берется по нормали к поверхности. Если значение дробного порядка $\alpha=0$, то ГУ (1.1) описывают ГУ для идеально электрически проводящей (ИЭП) поверхности, а при $\alpha=1$ получаем ГУ для идеально магнитно проводящей (ИМП) границы.

Решению задачи дифракции волн на полуплоскости посвящены многие работы. Метод решения задачи дифракции на полуплоскости с ИЭП границей рассматривался в [3]. Задача дифракции на полуплоскости обычно решается с помощью метода Винера-Хопфа. Первое применение метода к идеально проводящей полуплоскости можно отнести к работе Copson [4] в

1946г., и независимо Carlson и Heins в 1947г. [5]. Senior в 1952г. впервые применил метод Винера-Хопфа к решению задачи дифракции на импедансной полуплоскости [6], позже им было рассмотрено наклонное падение [7]. Задачи дифракции на резистивной и проводящей полуплоскости, а также различных соединенных полуплоскостях подробно описаны в [8].

В данной статье рассматривается задача дифракции на полуплоскости с дробными граничными условиями. Для строгого решения этой задачи предлагается подход, который обобщает результаты работы [9] для ИЭП границ и содержит их как частный случай.

Для решения задач дифракции на границах, описываемых ДГУ, в работе [1] был разработан метод решения для случая конечной границы – ленте. В данной работе предлагается новый метод для бесконечной границы – полуплоскости с ДГУ. Предложенный метод позволил получить БСЛАУ для отыскания неизвестных коэффициентов в разложении рассеянного поля в виде бесконечного ряда.

Пусть на полуплоскость ($x > 0$), бесконечную вдоль оси Oz, со стороны $y > 0$ падает плоская волна

$$E_z^i(x,y) = e^{-ik(x\cos\theta + y\sin\theta)}, \tag{1.2}$$

где θ – угол падения, $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число.

Как и ранее, полное поле представим в виде суммы падающего и рассеянного поля, т.е.

$$E_z(x,y) = E_z^i(x,y) + E_z^s(x,y) \tag{1.3}$$

Полное поле должно удовлетворять следующим условиям:

– всюду вне поверхности ленты уравнению Гельмгольца;

– на поверхности $x > 0$ ДГУ вида

$$_{-\infty}D_y^\alpha E_z(x,y) = 0,\ y \to \pm 0,\ x > 0; \tag{1.4}$$

Оператор $_{-\infty}D_y^\alpha$ описывает дробную производную, определяемую через интеграл по Римана-Лиувилля с бесконечным нижним пределом. Далее будем использовать символ D_y^α

– условию Мейкснера на ребре $x \to 0$ [2, 8];

– рассеянное поле $E_z^s(x,y)$ должно удовлетворять условию излучения Зоммерфельда на бесконечности.

Будем искать рассеянное поле в виде [illegible]

$$E_z^s(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{1-\alpha}(x') G^{\alpha}(x - x', y)\, dx' \quad \text{[illegible]} \tag{1.5}$$

где $f^{1-\alpha}(x)$ – неизвестная функция, которую мы будем называть плотностью дробного потенциала, G^{α} – дробная функция Грина

$$G^{\alpha}(x-x',y)=-\frac{i}{4}\,D_{ky}^{\alpha}H_0^{(1)}(k\sqrt{(x-x')^2+y^2}).$$

Подчиняя полное поле ДГУ (1.4), получим дифференциально-интегральное уравнение относительно функции плотности потенциала $f^{1-\alpha}(x)$:

$$\begin{aligned}&\frac{-i}{4}\lim_{y\to 0}\,D_{ky}^{2\alpha}\int_0^{\infty}f^{1-\alpha}(x')H_0^{(1)}(k\sqrt{(x-x')^2+y^2})dx'=\\&=-\lim_{y\to 0}\,D_{ky}^{\alpha}E_z^i(x,y),x>0.\end{aligned}\tag{1.6}$$

Как и ранее продолжим функцию $f^{1-\alpha}(x)$ нулем вне интервала $[0,\infty]$. В нашем случае имеем преобразование Фурье:

$$\tilde{f}^{1-\alpha}(\xi)\equiv f^{1-\alpha}(\xi)\,,\quad \xi>0,$$

$$F^{1-\alpha}(\beta)=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}^{1-\alpha}(\xi)e^{-ik\beta\xi}d\xi=\int_0^{\infty}f^{1-\alpha}(x)e^{-ik\beta x}dx,\tag{1.7}$$

$$\tilde{f}^{1-\alpha}(\xi)=\frac{k}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F^{1-\alpha}(\beta)e^{ik\beta\xi}d\beta.$$

Используя выражения для дробной функции Грина [1], получим представление для рассеянного поля через образ Фурье $F^{1-\alpha}(\beta)$:

$$E_z^s(x,y)=-i\frac{e^{\pm i\pi\alpha/2}}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F^{1-\alpha}(\beta)e^{ik[\beta x+|y|\sqrt{1-\beta^2}]}(1-\beta^2)^{(\alpha-1)/2}d\beta.\tag{1.8}$$

Можно показать, что в образах Фурье ДИДУ (1.6) сводится к системе ПИУ относительно неизвестной функции $F^{1-\alpha}(\beta)$:

$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}F^{1-\alpha}(\beta)e^{ik\xi\beta}(1-\beta^2)^{\alpha-1/2}d\beta=\\=-4\pi e^{i\pi/2(1-\alpha)}\sin^{\alpha}\theta e^{-ik\xi\cos\theta},\xi>0,\\\int_{-\infty}^{\infty}F^{1-\alpha}(\beta)e^{ik\xi\beta}d\beta=0,\xi<0.\end{cases}\tag{1.9}$$

При значениях $\alpha=0$ и $\alpha=1$ эти ПИУ переходят в известные ПИУ, рассмотренные в работах [3, 8]. Метод решения подобных ПИУ для случая ленты конечной длины был рассмотрен в работах [11, 12].

Рассмотрим отдельно случай $\alpha = 0,5$. При этом ПИУ (1.9) принимает вид

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} F^{0,5}(\beta) e^{ik\xi\beta} d\beta = -4\pi e^{i\pi/4} \sin^{0,5}\theta e^{-ik\xi\cos\theta}, \xi > 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} F^{0,5}(\beta) e^{ik\xi\beta} d\beta = 0, \xi < 0. \end{cases} \tag{1.10}$$

Таким образом, обратное преобразование Фурье

$$\int_{-\infty}^{\infty} F^{1/2}(\beta) e^{ik\xi\beta} d\beta = P(\xi) = \begin{cases} -4\pi e^{i\pi/4} \sin^{1/2}\theta e^{-ik\xi\cos\theta}, & \xi > 0, \\ 0, \ \xi < 0. \end{cases}$$

Принимая во внимание выражения (1.7), получим выражения

$$f^{0,5}(x) = -2\sin^{0,5}\theta e^{i\pi/4} e^{-ikx\cos\theta}, \tag{1.11}$$

$$F^{0,5}(\beta) = -2\sin^{0,5}\theta e^{i\pi/4} \frac{\pi}{k} \delta(\beta + \cos\theta). \tag{1.12}$$

Тогда для рассеянного поля получим выражение в явном виде

$$E_z^s(x,y) = \frac{i}{2k} e^{\pm i\pi\alpha/2} e^{i\pi/4} \sin^{0,5}\theta \, |\sin\theta|^{\alpha-1} \, e^{ik(-\cos\theta x + |y|\sin\theta)}. \tag{1.13}$$

Таким образом, ДИДУ (1.6) допускает аналитическое решение в частном случае дробного порядка $\alpha = 0,5$.

Перейдем к рассмотрению ПИУ (1.9) для общего случая $0 < \alpha < 1$. Функция $\tilde{f}^{1-\alpha}(\xi)$ должна удовлетворять условиям на ребре при $\xi \to 0$. Подчиним функцию $\tilde{f}^{1-\alpha}(\xi)$ условию на ребре вида

$$\tilde{f}^{1-\alpha}(\xi) = O\left((1-\xi^2)^{\alpha-1/2}\right), \xi \to 0. \tag{1.14}$$

Для частных случаев $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ условия на ребре имеют вид [3, 10]:

$$\tilde{f}^{1-\alpha}(\xi) = \begin{cases} O\left((1-\xi^2)^{-1/2}\right), & \alpha = 0 \\ O\left((1-\xi^2)^{1/2}\right), & \alpha = 1 \end{cases} \quad \xi \to 0. \tag{1.15}$$

Условия (1.15) – известные условия Мейкснера на ребре в задачах дифракции на полуплоскости с идеально проводящими ГУ [3].

Будем искать функцию $\tilde{f}^{1-\alpha}(x)$ в виде равномерно сходящегося ряда по полиномам Лагерра [9, 13]:

$$f^{1-\alpha}(x) = e^{-x} x^{\alpha-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{\alpha} L_n^{\alpha-1/2}(2x), \tag{1.16}$$

где f_n^α – неизвестные коэффициенты, $L_n^\alpha(x)$ – полиномы Лагерра.

В этом случае функция $\tilde{f}^{1-\alpha}(x)$ удовлетворяет условию на ребре (1.14).

Подставляя ряд (1.16) в первое уравнение (1.9), получим ИУ

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n^\alpha \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1/2}L_n^{\alpha-1/2}(2t)\square e^{-ik\beta t}dt\right]\times$$
$$\times e^{ik\xi\beta}(1-\beta^2)^{\alpha-1/2}d\beta = R(\xi), \qquad (1.17)$$

где $R(\xi) = -4\pi e^{i\pi/2(1-\alpha)}\sin^\alpha\theta e^{-ik\xi\cos\theta}$ – известная функция.

Используя формулу для преобразования Фурье полиномов Лагерра [13, с.462], получим выражения для интеграла по dt:

$$\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1/2}L_n^{\alpha-1/2}(2t)e^{-ik\beta t}dt = \int_0^\infty e^{-t(1+ik\beta)}t^{\alpha-1/2}L_n^{\alpha-1/2}(2t)dt =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha-1/2+n+1)}{\Gamma(n+1)}\frac{(1+ik\beta-2)^n}{(1+ik\beta)^{\alpha-1/2+n+1}} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1/2)}{\Gamma(n+1)}\frac{(ik\beta-1)^n}{(ik\beta+1)^{n+\alpha+1/2}}.$$

В итоге ИУ (1.17) преобразуется и примет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n^\alpha \frac{\Gamma(n+\alpha+1/2)}{\Gamma(n+1)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(ik\beta-1)^n}{(ik\beta+1)^{n+\alpha+1/2}}\times$$
$$\times(1-\beta^2)^{\alpha-1/2}e^{ik\xi\beta}d\beta = R(\xi), \xi>0. \qquad (1.18)$$

Для дискретизации уравнения (1.18), проинтегрируем обе части $\int_0^\infty (.)e^{-\xi}\xi^{\alpha-1/2}L_m^{\alpha-1/2}(2\xi)d\xi$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n^\alpha \frac{\Gamma(n+\alpha+1/2)}{\Gamma(n+1)}\int_0^\infty e^{ik\xi\beta}e^{-\xi}\xi^{\alpha-1/2}L_m^{\alpha-1/2}(2\xi)d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(ik\beta-1)^n}{(ik\beta+1)^{n+\alpha+1/2}}\times \qquad (1.19)$$
$$\times(1-\beta^2)^{\alpha-1/2}d\beta = -4\pi e^{i\pi/2(1-\alpha)}\sin^\alpha\theta\int_0^\infty e^{-ik\xi\cos\theta}e^{-\xi}\xi^{\alpha-1/2}L_m^{\alpha-1/2}(2\xi)d\xi.$$

Интеграл в правой части можно вычислить аналитически:

$$\int_0^\infty e^{-ik\xi\cos\theta}e^{-\xi}\xi^{\alpha-1/2}L_m^{\alpha-1/2}(2\xi)d\xi = \int_0^\infty e^{-\xi(1+ik\cos\theta)}\xi^{\alpha-1/2}L_m^{\alpha-1/2}(2\xi)d\xi =$$

$$= \frac{\Gamma(m+\alpha+1/2)}{\Gamma(m+1)}\frac{(ik\cos\theta-1)^m}{(ik\cos\theta+1)^{m+\alpha+1/2}}.$$

Рассмотрим отдельно интеграл по $d\xi$ в левой части уравнения (1.19):

$$\int_0^\infty e^{ik\xi\beta}e^{-\xi}\xi^{\alpha-1/2}L_m^{\alpha-1/2}(2\xi)d\xi=\int_0^\infty e^{-\xi(1-ik\beta)}\xi^{\alpha-1/2}L_m^{\alpha-1/2}(2\xi)d\xi=$$

$$=\frac{\Gamma(m+\alpha+1/2)}{\Gamma(m+1)}\frac{(-ik\beta-1)^m}{(1-ik\beta)^{m+\alpha+1/2}}=\frac{1}{(-1)^{\alpha+1/2}}\frac{\Gamma(m+\alpha+1/2)}{\Gamma(m+1)}\frac{(ik\beta+1)^m}{(ik\beta-1)^{m+\alpha+1/2}}.$$

После преобразований уравнение (1.19) примет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty}f_n^\alpha\frac{\Gamma(n+\alpha+1/2)}{\Gamma(n+1)}\int_{-\infty}^{\infty}(ik\beta+1)^{m-n-\alpha-1/2}(ik\beta-1)^{n-m-\alpha-1/2}(1-\beta^2)^{\alpha-1/2}d\beta=$$

$$=-4\pi e^{i\pi/2(1-\alpha)}(-1)^{\alpha+1/2}\sin^\alpha\theta\frac{(ik\cos\theta-1)^m}{(ik\cos\theta+1)^{m+\alpha+1/2}}.$$

В итоге имеем БСЛАУ

$$\sum_{n=0}^{\infty}f_n^\alpha C_{mn}^\alpha=B_m^\alpha,\quad m=0,1,2,..,\infty, \tag{1.20}$$

где элементы матрицы имеют вид

$$C_{mn}^\alpha=\int_{-\infty}^{\infty}(ik\beta+1)^{m-n-\alpha-1/2}(ik\beta-1)^{n-m-\alpha-1/2}(1-\beta^2)^{\alpha-1/2}d\beta,$$

$$B_m^\alpha=-4\pi e^{i\pi/2(1-\alpha)}(-1)^{\alpha+1/2}\sin^\alpha\theta\frac{(ik\cos\theta-1)^m}{(ik\cos\theta+1)^{m+\alpha+1/2}}.$$

Итак, решение поставленной задачи свелось к решению БСЛАУ (1.20). Можно показать, что решая БСЛАУ (1.20) на основе метода редукции, неизвестные коэффициенты f_n^α могут быть найдены с любой наперед заданной точностью. Далее неизвестная функция $\tilde{f}^{1-\alpha}(\xi)$ определяется из (1.16), что позволяет определить рассеянное поле на основе представления (1.5).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Veliev E.I., Ivakhnychenko M.V., Ahmedov T.M.* Fractional boundary conditions in plane waves diffraction on a strip // Progress in electromagnetics research. – 2008. – Vol. 79. – P. 443-462.

2. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688с.

3. *Хенл X., Мауэ А., Вестфаль К.* Теория дифракции; [пер. с нем. под ред. Г.Д. Малюжинца]. – М. : Мир, 1964. – 428с.

4. *Copson E.T.* On an integral equation arising in the theory of diffraction, Quart. J. Math., 17, 1946, pp. 19-34.

5. *Carlson J.F., Heins A.E.* The reflection of an electromagnetic plane wave by an infinite set of plates, Quart. Appl. Math., 4, 1947, pp. 313-329.
6. *Senior T.B.* Diffraction by a semi-infinite metallic sheet, Proc. Roy. Soc. London, Seria A, 213, 1952, pp. 436-458.
7. *Senior T.B.A.* Diffraction by an imperfectly conducting half plane at oblique incidence, Appl. Sci. Res., B8, 1959, pp. 35-61.
8. *Senior T.B., Volakis J.L.* Approximate boundary conditions in electromagnetics. – London : IEE, 1995. – 353p.
9. *Veliev E.I.* Plane wave diffraction by a half-plane: a New Analytical Approach // Journal of electromagnetic waves and applications. – 1999. – Vol. 13, No. 10. – P. 1439-1453.
10. *Миттра Р., Ли С.* Аналитические методы теории волноводов. – М.: Мир, 1974. – 327с.
11. *Велиев Э.И., Шестопалов В.П.* Об одном общем методе решения парных интегральных уравнений, Доклады академии наук СССР, 1988, том 300, № 4, стр. 827-832.
12. *Ахмедов Т.М.* Об одном методе решения дробного интегро-дифференциального уравнения. Доклады НАН Азербайджана, 2007, Т. LXIII, No. 3, С. 9-14.
13. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1981. – 798с.

Институт Математики и
Механики НАН Азербайджана

T.M.Əhmədov, E.İ.Vəliyev

MÜSTƏVİDƏ KƏSR SƏRHƏD ŞƏRTLƏRİ İLƏ DALĞALARIN DİFRAKSİYASI MƏSƏLƏSİ

Bu məqalədə ilk dəfə olaraq müstəvidə yeni kəsr sərhəd şərtləri ilə dalğaların difraksiyası məsələsinə baxılır.

T.M.Akhmedov, E.I.Veliev

THE PROBLEM OF DIFFRACTION OF WAVES ON A SEMIPLANE WITH FRACTIONAL BOUNDARY CONDITIONS

In this paper the problem of diffraction of waves on a semiplane with new fractional boundary conditions for the first time is considered.