МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
"ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ"

С.В. Юшко, О.Є. Борщ, М.А. Юшко

СТАЦІОНАРНА ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ

Навчальний посібник для студентів спеціальності
8.090507 «Кріогенна техніка і технологія»

Затверджено
Редакційно-видавничою
радою НТУ «ХПІ»,
протокол N 3 від 28.12.2009.

Харків
НТУ «ХПІ»
2011

ББК 31.31
Ю96
УДК 536.2

Рецензенти: *О. І. Осецький*, доктор фіз.–мат. наук, професор, провідний науковий співробітник ІПКіК НАН України;

Т. М. Гуріна, кандидат біол. наук, старший науковий співробітник ІПКіК НАН України.

Юшко С.В.
Ю96 Стаціонарна теплопровідність : навч. посіб./ С.В. Юшко, О.Є. Борщ , М.А. Юшко – Х.: НТУ «ХПІ», 2011.– 80 с.

ISBN

Навчальний посібник містить теоретичні матеріали з основних положень теорії теплопровідності, які необхідні для проведення інженерних розрахунків і математичного моделювання технічних пристроїв.

Для студентів спеціальності 8.090507 «Кріогенна техніка і технологія». Може бути корисним для студентів та аспірантів енергетичних спеціальностей.

Іл. 21. Бібліогр. 7.

ББК 31.31

ISBN

ВСТУП

Обмін енергією між тілами (або областями одного тіла), які мають різну температуру, називають теплообміном. Відповідно до другого початку термодинаміки, теплота мимовільно переходить від області з високою температурою до області, яка має більш низьку температуру.

Передача теплоти може здійснюватися трьома способами: теплопровідністю, конвективним перенесенням та випромінюванням. У реальних умовах у чистому вигляді вони зустрічаються рідко, можуть супроводжувати один одного, а також супроводжуватися перенесенням маси. З метою спрощення вивчення кожен із процесів спочатку розглядається окремо.

Теплопровідністю, або кондукцією, називають процес теплообміну між тілами, які безпосередньо стикаються, або частинами цих тіл, що мають різну температуру.

Теплопровідність здійснюється молекулярним механізмом перенесення теплоти: в зоні нагріву зростає інтенсивність руху молекул, енергія цього руху передається сусіднім молекулам, поширюючись у формі упругих хвиль до областей, що мають меншу температуру. Прикладом може бути процес перенесення теплоти крізь стіну будівлі за наявності різниці температур між її внутрішньою і зовнішньою поверхнями.

Такий механізм теплопровідності характерний для рідин і твердих тіл – діелектриків. У металах до нього додається інтенсивне перенесення енергії потоком вільних електронів. Тому теплопровідність металів завжди вища, ніж діелектриків. У рідинах і газах теплопровідність у чистому вигляді може проявлятися лише в тому випадку, коли вони у всьому своєму об'ємі знаходяться в нерухомості. Внаслідок відносно малої густини теплопровідність газів, зумовлена зіткненням сусідніх молекул, була б неістотною, проте тут до основного механізму процесу додається перенесення енергії у результаті дифузії молекул в об'ємі газу.

Конвективним теплообміном називають перенесення теплоти елементами об'єму (шарами) середовища, які переміщаються в просторі. Цей процес відбувається лише в рідинах і газах. Конвективне перенесення теплоти завжди включає обмін енергією шляхом теплопровідності між елементами об'єму середовища, які вступають у зіткнення.

Найбільш важливий для практики випадок конвективного теплообміну між потоком рідини або газу і поверхнею твердого тіла. Цей процес називають *тепловіддачею*.

Конвекція − рух середовища − може бути вимушеною і природною (вільною). У першому випадку середовище переміщається яким-небудь зовнішнім збудником (насос, вентилятор, вітер). При вільній конвекції відбувається мимовільне переміщення шарів рідини або газу біля нагрітих або охолоджених поверхонь. Наприклад, шар повітря, що нагрівається при зіткненні з поверхнею опалювальної батареї в приміщенні, підіймається вгору, звільняючи місце для більш щільного холодного шару того ж повітря, що опускається поруч. Поступово формується повільне відносне переміщення всіх шарів повітря по складних траєкторіях, яке забезпечує вирівнювання температури по всьому об'єму приміщення. Інтенсивність теплообміну при вільній конвекції невелика. Для її підвищення у всіх випадках, коли це можливо, вдаються до вимушеного переміщення середовища.

Тепловим випромінюванням називають електромагнітне випромінювання в інфрачервоному діапазоні частот, що випускається речовиною за рахунок внутрішньої енергії.

Така форма перенесення теплоти характеризується відсутністю безпосереднього контакту між тілами, що обмінюються теплотою. Теплообмін випромінюванням відбувається і у тому випадку, коли простір, який розділяє тіла, заповнений прозорим для випромінювання середовищем, і у тому випадку, коли воно не заповнено якою-небудь речовиною. Прикладом останнього може слугувати випромінювання Сонцем теплоти на Землю через космічний простір, в якому, як відомо, густина речовини мала. В земних умовах прозорим для випромінювання середовищем є сухе повітря. Непрозорими є більшість рідин і горючих газів. Водяна пара, діоксид вуглецю і ряд інших газів прозорі лише в деяких інтервалах довжин хвиль випромінювання.

Механізм теплообміну випромінюванням характеризується подвійною трансформацією енергії: на поверхні тіла-випромінювача його внутрішня енергія трансформується в енергію електромагнітних коливань, які поширюються в просторі, і на поверхні тіла, яке сприймає випромінювання, енергія електромагнітних коливань знов перетворюється в теплоту.

Три названі процеси перенесення теплоти в реальних умовах звичайно йдуть одночасно, доповнюючи один одного або здійснюючись послідовно.

Типовим для практики випадком є теплообмін між двома середовищами (теплоносіями) через розділяючу їх тверду стінку. Такий процес називається теплопередачею. Процес теплопередачі включає перенесення теплоти тепловіддачею (і у ряді випадків випромінюванням) від одного середовища до поверхні стінки, теплопровідністю крізь стінку і знову тепловіддачею (і випромінюванням) від протилежної поверхні стінки до іншого середовища.

Багато процесів теплообміну супроводжуються перенесенням речовини. Так, при кипінні пар, що утворюється, переміщається в рідині; при випаровуванні води в повітря теплообмін супроводжується перенесенням пари в пароповітряній суміші, причому це перенесення реалізується і молекулярним, і конвективним (молярним) механізмами. Таку сукупність процесів перенесення маси називають *конвективним масообміном*.

Вивчення процесів перенесення теплоти і речовини, які спільно протікають, з однієї частини простору в іншу і є предметом курсу тепломасообміна (тепломасопереноса).

Відповідно до уявлень сучасної фізики явища перенесення теплоти можуть бути розглянуті з двох точок зору: на основі феноменологічного і статистичного методів. Назва першого методу походить від грецького слова fenomenus (явище); в ньому розглядаються співвідношення між параметрами, що характеризують явище в цілому, без урахування особливостей мікроструктури речовини, в якій іде процес. Властивості речовини (середовища) враховуються коефіцієнтами, які визначаються експериментальним шляхом.

Статистичний метод заснований на вивченні внутрішньої будови речовини. Це у принципі виключає необхідність в експерименті і дозволяє отримати більш повні і точні розрахункові співвідношення. Проте такий підхід складніший і поки реалізований лише для найпростіших первинних моделей речовини.

Далі у цьому посібнику для опису процесів передачі теплоти використовується феноменологічний підхід, перевага якого полягає в простоті початкових співвідношень і використовуванні відомих експериментальних даних.

1. ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ТЕОРІЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

1.1. Початкові поняття

Температурне поле. Як було написано вище, виникнення процесу перенесення теплоти зумовлено наявністю різниці температур в різних точках тіла (простору). Сукупність значень температур у всіх точках даної області простору (тіла) в даний момент часу називається *температурним полем*. Температурне поле скалярне, оскільки сама температура – скаляр.

Якщо температура є функцією тільки просторових координат $x, y, z,$ то таке поле називають стаціонарним. Якщо ж температура залежить і від часу τ, тобто $t = f(x, y, z, \tau)$, то температурне поле називають нестаціонарним. Відповідні цим умовам (режимам) процеси теплообміну також називають стаціонарними або нестаціонарними.

Ізотермічна поверхня. Якщо в тілі, в якому є різниця температур, виділити точки, температура яких однакова, то в просторі ці точки в сукупності утворюють поверхню, яка називається *ізотермічною*. Ізотермічні поверхні ніколи не перетинаються одна з одною, бо в даній точці простору в даний момент часу можливо тільки одне значення температури. Вони є або замкнутими, або перетинаються з поверхнею тіла. Перетин ізотермічної поверхні площиною є зображенням ізотерми.

Тепловий потік, густина теплового потоку. Загальна кількість теплоти, яка передана в процесі теплообміну через ізотермічну поверхню протягом заданого відрізку часу τ, позначимо Q_τ. Одиниця вимірювання кількості теплоти − джоуль (Дж).

Кількість теплоти, яка передана через дану поверхню в процесі теплообміну, віднесена до тривалості процесу, називають *тепловим потоком* Q. Одиниця вимірювання теплового потока − ватт (Вт).

Тепловий потік, віднесений до площі ізотермічної поверхні, називають *густиною теплового потоку* q. Одиниця вимірювання густини теплового потока − ватт на квадратний метр (Вт/м^2).

Кількість теплоти, тепловий потік, густина теплового потоку − величини векторні. Вектори направлені по нормалі до ізотермічної поверхні у бік пониження температури. Тепловий потік і густина теплового потоку постійні в стаціонарних процесах і змінюються в часі в нестаціонарних теплових процесах.

Температурний градієнт. На рисунку 1.1 зображені ізотерми в тілі довільної форми, відповідні температурам t і $t+\Delta t$.

Від точки 0, нанесеної на ізотермі з температурою t, зростання температури на величину Δt можна спостерігати в будь-якому з напрямів, окрім співпадаючого з даною ізотермою. Проте найбільш інтенсивне зростання температури у напрямі нормалі до ізотерми в даній точці, в якому відстань Δn між ізотермами найменша. Це зростання температури характеризується температурним градієнтом – вектором, направленим по нормалі до ізотермічної поверхні у бік зростання температури і чисельно рівним частинній похідній від температури по відстані, виміряній по цій нормалі, тобто

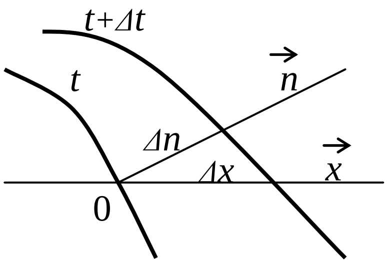


Рис. 1.1. До визначення температурного градієнта

$$\mathrm{grad}\, t = \lim_{\Delta n \to 0}\left(\frac{\Delta t}{\Delta n}\right) = \frac{\partial t}{\partial n}\,. \tag{1.1}$$

Одиниця вимірювання grad t – Кельвин на метр (К/м).

Позитивний напрямок вектора – у бік збільшення температури, тобто зворотний по відношенню до вектора теплового потоку, направленого у бік зниження температур.

Таким чином, скалярному полю температур відповідає векторне поле температурних градієнтів, а умову виникнення теплового потоку можна сформулювати нерівністю grad $t \neq 0$.

1.2. Закон Фур'є

В основі теорії теплопровідності лежить закон (гіпотеза) Фур'є (1807 р.), відповідно до якого елементарна кількість теплоти, яка переноситься теплопровідністю усередині тіла – суцільного середовища, що не має переривистої будови, пропорційна температурному градієнту, площі ізотермічної поверхні dF, перпендикулярної напрямку теплового потоку, і тривалості процесу dt, тобто

$$dQ_\tau = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n} dF d\tau\,. \tag{1.2}$$

Знак "мінус" в правій частині рівняння відображає протилежність напрямків векторів теплового потоку і температурного градієнта: теплота поширюється у бік зниження температури, приріст температури в цьому напрямку від'ємний.

Для теплового потоку рівняння (1.2) запишеться у вигляді

$$Q = -\lambda \int_F \frac{\partial t}{\partial n} dF \tag{1.3}$$

і для густини теплового потоку:

$$q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n}. \tag{1.4}$$

Коефіцієнт пропорційності λ в рівняннях (1.2–1.4) називається *коефіцієнтом теплопровідності*. Його фізичне значення легко з'ясувати, розглядаючи рішення рівняння (1.4) щодо λ:

$$|\lambda| = -\frac{q}{(\partial t / \partial n)} \quad .$$

Як видно, *коефіцієнт теплопровідності є величиною, чисельно рівною кількості теплоти, яка передається в одиницю часу через одиничну ізотермічну поверхню тіла при одиничному температурному градієнті*. Коефіцієнт теплопровідності вимірюється у Вт/(м·К).

1.3. Коефіцієнт теплопровідності

Коефіцієнт теплопровідності є фізичною властивістю речовини і характеризує її здатність проводити теплоту. Його значення чисельно дорівнює кількості теплоти, яка проходить в одиницю часу через одиницю площі ізотермічної поверхні при температурному градієнті рівному одиниці. Для різних речовин коефіцієнт теплопровідності різний і в загальному випадку залежить від структури, густини, вологості, тиску, температури.

Коефіцієнт теплопровідності газів

Згідно з кінетичною теорією перенесення теплоти теплопровідністю в газах при звичайному тиску і температурах визначається перенесенням кінетичної енергії молекул в результаті хаотичного руху і зіткнень окремих молекул. Коефіцієнт теплопровідності λ газів лежить в межах $5 \cdot 10^{-3}$–$5 \cdot 10^{-1}$ Вт/(м·К).

Серед газів різко виділяються своїм коефіцієнтом теплопровідності гелій і водень, який у них в 5–10 разів вищій. Аномально висока теплопровідність цих газів пояснюється малою масою молекул, а отже, великою середньою швидкістю їх руху.

Коефіцієнт теплопровідності газів помітно не залежить від тиску (0,002 Мпа < Р < 2000 МПа). Виключенням є дуже низький або дуже високий тиск.

Коефіцієнт теплопровідності газів з підвищенням температури зростає.

Коефіцієнти теплопровідності водяної пари і інших реальних газів, істотно відмінних від ідеального, значно залежать від температури і від тиску. Для газових сумішей коефіцієнт теплопровідності не може бути визначений за законом адитивності. Його визначають дослідним шляхом.

Коефіцієнт теплопровідності рідини

Механізм поширення теплоти в рідині можна пояснити перенесенням енергії відповідно до теорії неструнких пружних коливань. На підставі цієї теорії була отримана формула для коефіцієнта теплопровідності наступного вигляду:

$$\lambda = A\frac{c_p \rho^{4/3}}{\mu^{1/3}}. \tag{1.5}$$

Коефіцієнт пропорційності A не залежить від природи рідини, але залежить від температури, при цьому Ac_p = const.

Оскільки густина рідини з підвищенням температури зменшується, то для рідин з постійною молекулярною масою (неасоційовані і слабоасоційовані рідини) з підвищенням температури коефіцієнт теплопровідності зменшується. Для рідин сильноасоційованих (вода, спирти і т.д.) у формулу необхідно ввести коефіцієнт асоціації, який враховує зміну молекулярної маси, що може призвести до зростання коефіцієнта теплопровідності при збільшенні температури. Досліди підтверджують, що для більшості рідин з підвищенням температури коефіцієнт теплопровідності зменшується. Виняток становлять вода і гліцерин.

Коефіцієнт теплопровідності рідин лежить приблизно в межах 0,07–0,7 Вт/(м·К).

При підвищенні тиску коефіцієнти теплопровідності рідин зростають.

Коефіцієнт теплопровідності твердих тіл

У чистих металах основним передавачем теплоти є вільні електрони. Внаслідок цього коефіцієнти тепло- і електропровідності пропорційні (закон Відемана–Франца). При підвищенні температури через посилення температурних неоднорідностей розсіювання електронів збільшується, а отже, коефіцієнти тепло- і електропровідності зменшуються.

За наявності різного роду домішок (сплави) коефіцієнт теплопровідності різко убуває. Це пояснюється збільшенням структурних неоднорідностей, на яких розсіваються електрони. На відміну від чистих металів коефіцієнти теплопровідності сплавів при підвищенні температури зростають.

Коефіцієнт теплопровідності металів лежить у межах 20–400 Вт/(м·К). Найтеплопровідним матеріалом є срібло ($\lambda \approx 410$), потім йдуть чиста мідь ($\lambda \approx 395$), золото ($\lambda \approx 300$), алюміній ($\lambda \approx 210$) і т.д. Наявність домішок різко знижує коефіцієнт теплопровідності. Наприклад, для міді із слідами миш'яку коефіцієнт теплопровідності знижується до 140 Вт/(м·К); для заліза з 0,1 % вуглецю $\lambda = 52$, а з 1,0 % вуглецю $\lambda = 40$ Вт/(м·К).

Для напівпровідників і, особливо, діелектриків, що мають значно меншу концентрацію вільних електронів, ніж метали, коефіцієнт теплопровідності відповідно менший. З підвищенням температури для цих матеріалів коефіцієнт теплопровідності збільшується.

Коефіцієнт теплопровідності теплоізоляційних і будівельних матеріалів

У холодильній і кріогенній техніці для теплоізоляції використовують матеріали з волоконними і порошкоподібними структурами, що мають низькі значення коефіцієнтів теплопровідності. До них належать мінора, пенополістірол, пенополіуретан, мінеральна і скляна вата та ін. [$\lambda = 0{,}02$–$0{,}04$ Вт/(м·К)]. Коефіцієнти теплопровідності будівельних і теплоізоляцій матеріалів мають значення, що лежать приблизно в межах від 0,02 до 3 Вт/(м·К).

Наявність пор в матеріалі не дозволяє розглядати його як суцільне середовище. Використання закону Фур'є до таких тіл є певною мірою умовним. Умовним є також коефіцієнт теплопровідності пористого матеріалу. Ця величина має сенс коефіцієнта теплопровідності деякого однорідного тіла, через яке при однакових формі, розмірах і температурах на межах проходить та ж кількість теплоти, що і через дане пористе тіло.

Коефіцієнт теплопровідності порошкоподібних і пористих тіл значно залежить від їх густини унаслідок того, що теплопровідність заповнюючого пори газу значно менша, ніж твердих компонентів пористого матеріалу.

Ефективний коефіцієнт теплопровідності пористих матеріалів значно залежить також від вологості. Цей ефект може бути пояснений конвективним перенесенням теплоти, що виникає завдяки капілярному руху води усередині пористого матеріалу, і частково тим, що абсорбційно зв'язана волога має інші характеристики порівняно з вільною водою.

Збільшення коефіцієнта теплопровідності зернистих матеріалів із зміною температури можна пояснити тим, що з підвищенням температури зростає теплопровідність середовища, яке заповнює проміжки між зернами, а також збільшується теплопередача від випромінювання зернистого масиву.

1.4. Диференціальне рівняння теплопровідності

Вивчення будь-якого фізичного явища зводиться до встановлення залежності між величинами, що характеризують це явище. Для складних фізичних процесів, в яких основні величини можуть істотно змінюватися у просторі та часі, встановити залежність між цими величинами дуже важко. В цих випадках на допомогу приходить метод математичної фізики, який виходить з того, що обмежується проміжок часу і зі всього простору розглядається лише елементарний об'єм. Це дозволяє в межах елементарного об'єму і вибраного малого відрізка часу нехтувати зміною деяких величин, що характеризують процес, і істотно спростити залежність.

Вибрані таким чином елементарний об'єм dv і елементарний проміжок часу $d\tau$, в межах яких розглядається процес, що вивчається, з математичної точки зору є величинами нескінченно малими, а з фізичної точки зору – величинами ще достатньо великими, щоб в їх межах можна було ігнорувати дискретну будову середовища і розглядати її як континуум (суцільну). Отримана таким чином залежність є загальним диференціальним рівнянням даного процесу.

Інтегруючи диференціальні рівняння, можна отримати аналітичну залежність між величинами для всієї області інтеграції і всього даного проміжку часу.

При розв’язанні задач, пов'язаних із знаходженням температурного поля, необхідно мати диференціальне рівняння теплопровідності.

Для полегшення виводу цього диференціального рівняння зробимо наступні допущення:

- тіло однорідне та ізотропне;
- фізичні параметри постійні;
- деформація даного об'єму, пов’язана зі зміною температури, є дуже малою величиною в порівнянні з самим об'ємом;

- внутрішні джерела тепла в тілі, які в загальному випадку можуть бути задані як $q_v = f(x, y, z, \tau)$, розподілені рівномірно.

В основі виводу диференціального рівняння теплопровідності лежить закон збереження енергії. Для даного випадку він має вигляд: кількість теплоти dQ, введена в елементарний об'єм ззовні за час $d\tau$ унаслідок теплопровідності, а також від внутрішніх джерел, дорівнює зміні внутрішньої енергії або ентальпії речовини (залежно від розгляду ізохорного або ізобарного процесу), що міститься в елементарному об'ємі:

$$dQ_1 + dQ_2 = dQ, \tag{1.6}$$

де dQ_1 – кількість теплоти, Дж, введеної в елементарний об'єм шляхом теплопровідності за час $d\tau$; dQ_2 – кількість теплоти, яка за час $d\tau$ виділилась в елементарному об'ємі dv за рахунок внутрішніх джерел; dQ – зміна внутрішньої енергії або ентальпії речовини, що міститься в елементарному об'ємі dv за час $d\tau$.

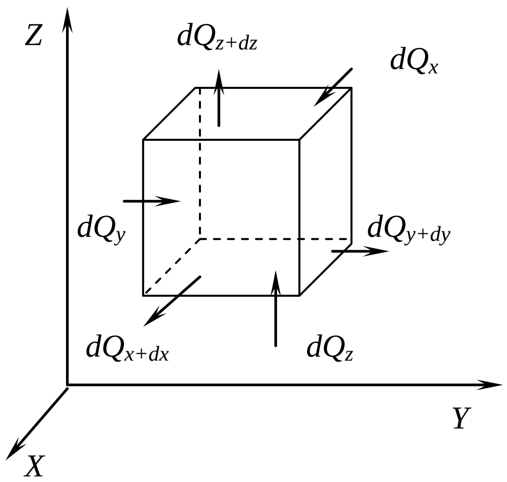


Рис. 1.2. До виводу диференціального рівняння теплопровідності

Для знаходження складових рівняння (1.6) виділимо в тілі елементарний паралелепіпед зі сторонами dx, dy, dz (рис. 1.2). Паралелепіпед розташований так, щоб його грані були паралельні відповідним координатним площинам.

Кількість теплоти, яка підводиться до граней елементарного об'єму за час $d\tau$ у напрямі осей $0X$, $0Y$, $0Z$, позначимо відповідно dQ_x, dQ_y, dQ_z.

Кількість теплоти, яка відводитиметься через протилежні грані в тих же напрямках, позначимо відповідно dQ_{x+dx}, dQ_{y+dy}, dQ_{z+dz}. Кількість теплоти, яка підводиться до грані $dy\ dz$ у напрямку осі $0X$ за час $d\tau$, становить $dQ_x = q_x dydzd\tau$, де q_x — проекція густини теплового потоку на напрямку нормалі до вказаної грані. Кількість теплоти, відведена через протилежну грань елементарного паралелепіпеда у напрямку осі $0X$, запишеться як

$$dQ_{x+dx} = q_{x+dx} dydzd\tau.$$

Різниця кількостей теплоти, підведеної до елементарного паралелепіпеда і відведеної від нього за час $d\tau$ у напрямі осі $0X$, є кількістю теплоти

$$dQ_{x1} = dQ_x - dQ_{x+dx},$$

або

$$dQ_{x1} = q_x\, dy\, dz\, d\tau - q_{x+dx}\, dy\, dz\, d\tau. \tag{1.7}$$

Функція q_{x+dx} є неперервною в даному інтервалі dx і може бути розкладена в ряд Тейлора:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + \frac{\partial^2 q_x}{\partial x^2} \frac{dx^2}{2!} + \ldots$$

Якщо обмежитися двома першими членами ряду, то рівняння (1.7) запишеться у вигляді

$$dQ_{x1} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dx\, dy\, dz \quad . \tag{1.8}$$

Аналогічним чином можна знайти кількість теплоти, що підводиться до елементарного об'єму і в напрямках двох інших координатних осей.

Кількість теплоти dQ, яка підведена теплопровідністю до даного об'єму, буде дорівнювати:

$$dQ_1 = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz\, \mathbf{.} \tag{1.9}$$

Визначимо другу складову рівняння (1.6). Позначимо кількість теплоти, що виділяється внутрішніми джерелами в одиниці об'єму середовища в одиницю часу і яке називається потужністю внутрішніх джерел теплоти, через q_v, Вт/м^3. Тоді

$$dQ_2 = q_v dx\, dy\, dz\, d\tau. \tag{1.10}$$

Третя складова в рівнянні (1.6) знайдеться залежно від характеру термодинамічного процесу зміни системи.

При розгляді ізохорного процесу вся теплота, підведена до елементарного об'єму, піде на зміну внутрішньої енергії речовини, укладеної в цьому об'ємі, тобто $dQ = dU$.

Якщо розглядати внутрішню енергію одиниці об'єму $u = u(t,v)$, тоді dU знаходиться як

$$dU = c_v \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau\, dx\, dy\, dz, \tag{1.11}$$

де c_v – питома ізохорна теплоємність, Дж/(кг·К); ρ – густина речовини, кг/м^3.

Підставляючи вирази (1.9), (1.10) і (1.11) у рівняння (1.6), отримаємо:

$$c_v\rho\frac{\partial t}{\partial \tau}d\tau = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_y}{\partial y}+\frac{\partial q_z}{\partial z}\right)+q_v, \tag{1.12}$$

або

$$c_v\rho\frac{\partial t}{\partial \tau} = -\mathrm{div}\vec{q}+q_v. \tag{1.12'}$$

Вираз (1.12) є диференціальним рівнянням енергії для ізохорного процесу перенесення теплоти.

При розгляді ізобарного процесу вся теплота, підведена до об'єму, піде на зміну ентальпії речовини, укладеної в цьому об'ємі, і рівняння (1.6) запишеться таким чином:

$$dQ_1 + dQ_2 = dI. \tag{1.13}$$

Якщо розглядати ентальпію одиниці об'єму як $i = i(t, p)$, то

$$dI = c_p\rho\frac{\partial t}{\partial \tau}d\tau\, dx\, dy\, dz = \rho\frac{\partial i}{\partial \tau}d\tau\, dx\, dy\, dz, \tag{1.14}$$

де c_p – питома ізобарна теплоємність, Дж/(кг·К).

Якщо вирази (1.9), (1.10) і (1.14) підставити в рівняння (1.13), отримаємо:

$$\rho\frac{\partial i}{\partial \tau} = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_y}{\partial y}+\frac{\partial q_z}{\partial z}\right)+q_v, \tag{1.15}$$

або

$$\rho\frac{\partial i}{\partial \tau} = -\mathrm{div}\vec{q}+q_v. \tag{1.15'}$$

Співвідношення (1.15) є диференціальним рівнянням енергії в загальному вигляді для ізобарного процесу перенесення теплоти.

У твердих тілах перенос тепла здійснюється відповідно до закону Фур'є ($q = -\lambda\partial t/\partial x$), числове значення різниці c_p і c_v мале та можна прийняти $c_p = c_v = c$.

Проекції вектора густини теплового потоку на координатні осі $0X$, $0Y$, $0Z$ визначаються виразами:

$$q_x = -\lambda\frac{\partial t}{\partial x};\ \ q_y = -\lambda\frac{\partial t}{\partial y};\ \ q_z = -\lambda\frac{\partial t}{\partial z}.$$

Підставляючи отримані вирази проекцій вектора густини теплового потоку в рівняння (1.12) і опускаючи індекс при c, отримаємо:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau}=\frac{1}{c\rho}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial z}\right)\right]+\frac{q_v}{c\rho}, \quad (1.16)$$

або

$$\frac{\partial t}{\partial \tau}=\frac{1}{c\rho}\operatorname{div}\left(\lambda \operatorname{grad} t\right)+\frac{q_v}{c\rho}. \quad (1.16')$$

Вираз (1.16), так само як і (1.16'), називається диференціальним рівнянням теплопровідності. Воно встановлює зв'язок між часовою і просторовою змінними температури в будь-якій точці тіла, в якому відбувається процес теплопровідності.

Загальне диференціальне рівняння теплопровідності в частних похідних має ту ж форму, що і (1.16), але зі змінними теплофізичними характеристиками λ, c і ρ**,** які можна позначити як $\lambda(x,y,z,t)$, $c(x,y,z,t)$ і $\rho(x,y,z,t)$. Такий запис включає як просторово-часову, так і температурну залежність. Рівняння (1.16) описує велику кількість задач теплопровідності, що становлять практичний інтерес. Так, якщо прийняти теплофізичні характеристики постійними, що передбачалося при виводі рівняння, то (1.16) приймає вид:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau}=\frac{\lambda}{c\rho}\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right)+\frac{q_v}{c\rho}. \quad (1.17)$$

У рівнянні (1.17) можна позначити

$$\frac{\lambda}{c\rho}=a$$

та

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}=\nabla^2 t,$$

де $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – вираз оператора Лапласа в декартовій системі координат.

Вираз $\nabla^2 t$ в циліндричній і сферичній системах координат матиме вигляд:

$$\nabla^2 t=\frac{\partial^2 t}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2},$$

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial t}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 t}{\partial\varphi^2}.$$

З урахуванням введених позначень рівняння (1.17) запишеться таким чином:

$$\frac{\partial t}{\partial\tau} = a\nabla^2 t + \frac{q_v}{c\rho}. \qquad (1.18)$$

Коефіцієнт пропорційності *a,* $м^2/с$, у рівнянні (1.18) називається *коефіцієнтом температуропровідності* і є фізичним параметром речовини. Він важливий для нестаціонарних теплових процесів і характеризує швидкість зміни температури. Якщо коефіцієнт теплопровідності характеризує здатність тіл проводити теплоту, то коефіцієнт температуропровідності є мірою теплоінерційних властивостей тіла. З рівняння (1.18) виходить, що зміна температури в часі $\partial t/\partial\tau$ для будь-якої точки простору пропорційна величині *a.* Тому за інших рівних умов вирівнювання температур у всіх точках простору відбуватиметься швидше в тому тілі, яке має великий коефіцієнтом температуропровідності. Коефіцієнт температуропровідності залежить від природи речовини. Наприклад, рідини і гази мають велику теплову інерційність і, отже, малий коефіцієнт температуропровідності. Метали мають малу теплову інерційність, оскільки вони мають великий коефіцієнт температуропровідності.

Якщо система тіл не містить внутрішніх джерел теплоти ($q = 0$), тоді вираз (1.18) набуває форму рівняння Фур'є:

$$\frac{\partial t}{\partial\tau} = a\nabla^2 t. \qquad (1.19)$$

Якщо є внутрішні джерела теплоти, але температурне поле стаціонарне, тобто $t = t(x,y,z)$, то диференціальне рівняння теплопровідності перетворюється на рівняння Пуассона:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + \frac{q_v}{\lambda} = 0. \qquad (1.20)$$

Нарешті, для стаціонарної теплопровідності і відсутності внутрішніх джерел теплоти вираз (1.17) набуває вигляду рівняння Лапласа:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0. \qquad (1.21)$$

1.5. Умови однозначності для процесів теплопровідності

Оскільки диференціальне рівняння теплопровідності виведено на основі загальних законів фізики, то воно описує явище теплопровідності в загальному вигляді. Тому можна сказати, що отримане диференціальне рівняння описує цілий клас явищ теплопровідності. Щоб з незліченної кількості виділити конкретно даний процес і дати його повний математичний опис, до диференціального рівняння необхідно додати математичний опис всіх особливостей даного процесу. Ці особливості, які спільно з диференціальним рівнянням дають повний математичний опис конкретного процесу теплопровідності, називаються *умовами однозначності або краєвими умовами.*

Умови однозначності включають:

- геометричні умови, які характеризують форму та розміри тіла, в яких відбувається процес;
- фізичні умови, які характеризують фізичні властивості середовища та тіла (λ, c, ρ та інші.). Також може бути заданий закон розподілу внутрішніх джерел тепла;
- тимчасові (початкові) умови, що характеризують розподіл температур в тілі, що вивчається, в початковий момент часу. Початкові умови необхідні при розгляді нестаціонарних процесів і полягають у завданні закону розподілу температури усередині тіла в початковий момент часу. В загальному випадку початкова умова аналітично може бути записана таким чином:

$$\text{при } \tau = 0 \quad t = f(x, y, z). \tag{1.22}$$

При рівномірному розподілі температури в тілі початкова умова спрощується:

$$\text{при } \tau = 0 \quad t = t_0 = \text{const.} \tag{1.23}$$

- граничні умови, що характеризують взаємодію даного тіла з навколишнім середовищем. Граничні умови можуть бути задані декількома способами.

Граничні умови першого роду. Задається розподіл температури на поверхні тіла для кожного моменту часу:

$$t_c = f(x,y,z,\tau), \tag{1.24}$$

де t_c – температура на поверхні тіла; x, y, z – координати поверхні тіла.

В окремому випадку, коли температура на поверхні є незмінною протягом всього часу протікання процесів теплообміну, рівняння (1.24) спрощується і набуває вигляду:

$$t_c = \text{const}.$$

Граничні умови другого роду. Задаються значення теплового потоку для кожної точки поверхні тіла і будь-якого моменту часу.

$$q_n = f(x, y, z, \tau), \tag{1.25}$$

де q_n – щільність теплового потоку на поверхні тіла.

У найпростішому випадку густина теплового потоку по поверхні і з часом залишається постійною:

$$q_n = q_\text{o} = \text{const}. \tag{1.26}$$

Граничні умови третього роду. При цьому задаються температура навколишнього середовища $t_ж$ і закон теплообміну між поверхнею тіла і навколишнім середовищем. Для опису процесу теплообміну між поверхнею тіла і середовищем використовується закон Ньютона – Ріхмана.

Процес теплообміну між поверхнею тіла і середовищем відноситься до дуже складних процесів і залежить від великої кількості параметрів.

Згідно з законом Ньютона – Ріхмана кількість теплоти, що віддається одиницею поверхні тіла в одиницю часу, пропорційна різниці температур поверхні тіла t_c та навколишнього середовища $t_ж$ $(t_c > t_ж)$:

$$q = \alpha(t_c - t_ж), \tag{1.27}$$

де α – коефіцієнт пропорційності, який називається коефіцієнтом тепловіддачі, Вт/(м^2·К). Коефіцієнт тепловіддачі характеризує інтенсивність теплообміну між поверхнею тіла і навколишнім середовищем. Чисельно він дорівнює кількості теплоти, що віддається (або сприймається) одиницею поверхні в одиницю часу при різниці температур між поверхнею тіла і навколишнім середовищем, рівній одному градусу.

Згідно з законом збереження енергії кількість теплоти, яка відводиться з одиниці поверхні, в одиницю часу унаслідок тепловіддачі (рівняння (1.27)), повинна дорівнювати теплоті, що підводиться до одиниці поверхні в одиницю часу унаслідок теплопровідності з внутрішніх об'ємів тіла (рівняння (1.4)), тобто

$$\alpha\left(t_c - t_ж\right) = -\lambda\left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)_c, \tag{1.28}$$

де n – нормаль до поверхні тіла; індекс "c" вказує на те, що температура та градієнт відносяться до поверхні тіла (при n = 0).

Остаточно граничну умову третього роду можна записати у вигляді

$$\left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)_c = -\frac{\alpha}{\lambda}\left(t_c - t_ж\right). \qquad (1.29)$$

Рівняння (1.29) по суті є окремим випадком закону збереження енергії для поверхні тіла.

Граничні умови четвертого роду. В цьому випадку теплообмін системи тіл або тіла з навколишнім середовищем здійснюється за законом теплопровідності. Передбачається, що виконуються умови рівності температур і теплових потоків по обидві сторони від межі розділу. За відсутності на межі розділу середовищ процесів з виділенням або поглинанням теплоти умови зв'язаності мають вигляд:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1\left(\frac{\partial t_1}{\partial n}\right)_c &= \lambda_2\left(\frac{\partial t_2}{\partial n}\right)_c; \\ t_1(x_c, y_c, z_c, \tau) &= t_2(x_c, y_c, z_c, \tau). \end{aligned}\right\} \qquad (1.30)$$

Диференціальне рівняння (1.18) спільно з умовами однозначності дає повне математичне формулювання конкретної задачі теплопровідності. Поставлена таким чином задача розв’язується аналітичним, чисельним або експериментальним методом. У разі експериментального розв’язання задач теплопровідності використовують методи фізичного моделювання або теплових аналогій.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ТА ЗАДАЧІ

1. Які способи передачі теплоти? Яким механізмом відбувається перенос тепла в кожному із засобів?
2. Визначення поняття теплопровідності.
3. Яку особливість має теплообмін випромінюванням при зрівнянні з другими засобами теплопереносу?
4. Дайте визначення температурного поля.
5. Що називається градієнтом температур?
6. Закон Фур’є.
7. Коефіцієнт теплопровідності для газів (парів), рідин, твердих, теплоізоляційних, пористих тіл.
8. Залежність коефіцієнту теплопровідності різних речовин від температури.
9. Залежність коефіцієнту теплопровідності різних речовин від тиску.
10. Вивести диференціальне рівняння теплопровідності.
11. Умови однозначності процесів теплопровідності.

12. Закон Ньютона – Ріхмана.

13. Граничні умови процесів теплопровідності.

14. Записати диференціальне рівняння теплопровідності для стаціонарного та нестаціонарного процесів, з внутрішніми джерелами тепла та без них, в різних системах координат.

2. ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ ПРИ СТАЦІОНАРНОМУ РЕЖИМІ ЗА ВІДСУТНОСТІ ВНУТРІШНІХ ДЖЕРЕЛ ТЕПЛОТИ

2.1. Передача теплоти через плоску стінку ($q_v = 0$)

При сталому, або стаціонарному тепловому режимі температура тіла в часі залишається постійною, тобто $\partial t/\partial\tau = 0$. При цьому диференціальне рівняння теплопровідності матиме вигляд:

$$a\nabla^2 t+q_v/c\rho = 0, \tag{2.1}$$

або

$$\nabla^2 t+q_v/\lambda = 0. \tag{2.1$'$}$$

Якщо внутрішні джерела теплоти відсутні ($q_v = 0$), то рівняння (2.1) спрощується і набуває вигляду:

$$\nabla^2 t = 0, \tag{2.2}$$

або

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}=0. \tag{2.2$'$}$$

Далі розглянемо теплопровідність в тілах найпростішої геометричної форми. При цьому випадки, коли внутрішні джерела теплоти відсутні ($q_v = 0$) і коли вони є ($q_v \neq 0$), розглядаються окремо. Першим об'єктом розгляду є передача теплоти через плоску стінку при $q_v = 0$.

Граничні умови першого роду

Розглянемо однорідну і ізотропну стінку товщиною δ з постійним коефіцієнтом теплопровідності λ. На зовнішніх поверхнях стінки підтримують постійними температури t_{c1} та t_{c2}.

За заданих умов температура змінюватиметься тільки в напрямі, перпендикулярному площині стінки. За цим напрямом спрямуємо вісь $0X$, як показано на рис. 2.1. Температура ж у напрямі осей $0Y$ і $0Z$ залишатиметься постійною, а отже, похідні від температури по цих координатах будуть дорівнювати нулю: $\dfrac{\partial t}{\partial y} = \dfrac{\partial t}{\partial z} = 0$.

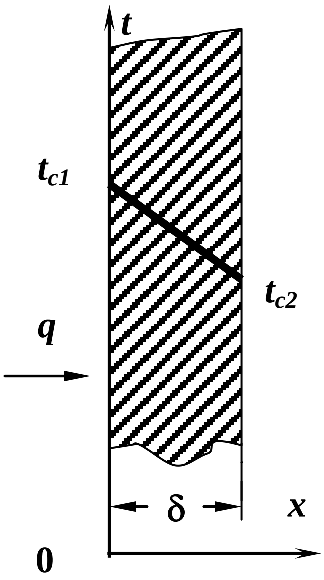


Рис. 2.1. Плоска стінка

У зв'язку з цим температура буде функцією тільки однієї координати x і диференціальне рівняння теплопровідності для даного випадку запишеться у вигляді

$$\frac{d^2 t}{dx^2} = 0. \tag{2.3}$$

Граничні умови в даній задачі задамо таким чином:

$$\left.\begin{aligned} &\text{при } x = 0 \quad t = t_{c1} \\ &\text{при } x = d \quad t = t_{c2} \end{aligned}\right\}. \tag{2.4}$$

Рівняння (2.3) і умови (2.4) дають повне математичне формулювання даної задачі.

У результаті вирішення поставленої задачі повинен бути знайдений розподіл температури в плоскій стінці, тобто $t = f(x)$, і отримана формула для визначення кількості теплоти, що проходить в одиницю часу через стінку.

Закон розподілу температур по товщині стінки знайдеться в результаті подвійного інтегрування рівняння (2.3).

Перше інтегрування дає:

$$\frac{dt}{dx} = C_1. \tag{2.5}$$

Після другого інтегрування отримаємо:

$$t = C_1 x + C_2. \tag{2.6}$$

З рівняння (2.6) виходить, що при постійному коефіцієнті теплопровідності температура в стінці змінюється за лінійним законом. Сталі C_1 і C_2 у рівнянні (2.6) визначаються з граничних умов:

при $x = 0$ $\quad t = t_{c1}$ $\quad$ і тоді отримуємо $\quad C_2 = t_{c1};$

при $x = \delta$ $\quad t = t_{c2}$ $\quad$ і тоді отримуемо $\quad C_1 = -(t_{c1} - t_{c2})/\delta.$

Підставляючи значення констант C_1 і C_2 у рівняння (2.6), одержуємо закон розподілу температури в даній плоскій стінці:

$$t = t_{c1} - \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\delta} x. \tag{2.7}$$

Якщо відлік надмірної температури в стінці вести від якнайменшої заданої температури t_{c2}, то рівняння (2.7) можна привести до безрозмірного вигляду.

Позначимо $\Delta t = t - t_{c2}$ – *місцевий температурний напір або місцева надмірна температура*; $\Delta t_0 = t_{c1} - t_{c2}$ – *повний температурний напір або найбільша надмірна температура*. Після введення цих позначень рівняння (2.7) запишеться таким чином:

$$\Delta t = \Delta t_0 - \frac{\Delta t_0}{\delta} x,$$

або

$$\frac{\Delta t}{\Delta t_0} = 1 - \frac{x}{\delta}.$$

Позначимо $\Delta t/\Delta t_0 = \Theta$ — безрозмірний температурний напір або безрозмірна надмірна температура; $x/\delta = X$ – безрозмірна координата. Тоді

$$\Theta = 1 - X. \qquad (2.8)$$

Рівняння температурного поля (2.8) є універсальним. Його універсальність полягає в тому, що розподіл температури в стінці можна зобразити єдиною прямою у відрізках на осях для будь-якого заданого значення t_{c1}, t_{c2} та δ. У ряді випадків користуватися безрозмірними рівняннями більш зручно.

Для визначення кількості теплоти, що проходить через одиницю поверхні стінки в одиницю часу у напрямі осі $0X$, скористаємося законом Фур'є, згідно з яким $q = -\lambda\, \partial t/\partial x$. Враховуючи, що $dt/dx = C_1 = -(t_{c1} - t_{c2})/\delta$, після підстановки значення dt/dx у вираз закону Фур'є отримаємо:

$$q = \frac{\lambda}{\delta}(t_{c1} - t_{c2}). \qquad (2.9)$$

З рівняння (2.9) виходить, що кількість теплоти, що проходить через одиницю поверхні стінки в одиницю часу, прямо пропорційна коефіцієнту теплопровідності λ, різниці температур на зовнішніх поверхнях стінки $t_{c1} - t_{c2}$ і обернено пропорційно до товщини стінки δ. Необхідно відзначити, що тепловий потік визначається не абсолютним значенням температур, а їх різницею $t_{c1} - t_{c2} = \Delta t$, яку прийнято називати температурним напором.

Відношення λ/δ, Вт/(м^2·К), називається *тепловою провідністю стінки*, а зворотна величина δ/λ, м^2·К/Вт, – *тепловим, або термічним опором стінки*. Таким чином, *термічний опір стінки є падінням температури в стінці на одиницю густини теплового потоку*. Знаючи густину теплового потоку, легко обчислити загальну кількість теплоти Q_τ, яка передається через поверхню стінки величиною F за проміжок часу τ:

$$Q_\tau = qF\tau = \frac{\lambda}{\delta}(t_{c1} - t_{c2})F\tau . \quad (2.10)$$

З рівняння (2.9) знайдемо:

$$\frac{t_{c1} - t_{c2}}{\delta} = \frac{q}{\lambda}.$$

Після введення цього виразу в рівняння температурного поля (2.7) отримаємо:

$$t = t_{c1} - \frac{q}{\lambda}x . \quad (2.11)$$

З рівняння (2.11) виходить, що за інших рівних умов температура в стінці убуває тим швидше, чим більша густина теплового потоку.

Вирази (2.7) і (2.9) отримані в припущенні, що λ = const. Насправді λ є змінною величиною. Розглянемо випадок, коли коефіцієнт теплопровідності є тільки функцією температури:

$$\lambda = \lambda(t).$$

Для багатьох матеріалів залежність коефіцієнта теплопровідності від температури близька до лінійної:

$$\lambda = \lambda_0(1 + bt) ,$$

де λ_0 – значення коефіцієнта теплопровідності при 0 °С.

На основі закону Фур'є

$$q = -\lambda(t)\frac{dt}{\partial x} = -\lambda_0(1 + bt)\frac{dt}{dx}.$$

Розділяючи змінні і інтегруючи даний вираз у межах від x = 0 до $x = \delta$ в діапазоні температур від t_{c1} до t_{c2}, отримуємо:

$$q\delta = \lambda_0\left[1 + b\frac{(t_{c1} + t_{c2})}{2}\right](t_{c1} - t_{c2}).$$

У наведеному виразі множник $\lambda_0\left[1 + b\frac{(t_{c1} + t_{c2})}{2}\right]$ є середньоінтегральним значенням коефіцієнта теплопровідності, тобто

$$\lambda_{\text{ср}} = \frac{1}{t_{c1} - t_{c2}}\int_{t_{c2}}^{t_{c1}}\lambda(t)dt . \quad (2.12)$$

При цьому густина теплового потоку q, Вт/м^2, на поверхні пластини:

$$q = \frac{\lambda_{\text{ср}}}{\delta}(t_{c1} - t_{c2}). \qquad (2.13)$$

З рівняння (2.13) виходить, що якщо коефіцієнт теплопровідності λ залежить від температури, то q можна обчислювати в припущенні, що λ = const і приймає середньоінтегральне значення в інтервалі температур від t_{c1} до t_{c2}.

Інтегруючи вираз для закону Фур'є в межах від $x = 0$ до будь-якої поточної координати x і в інтервалі температур від t_{c1} до температури t, що відповідає координаті x, одержуємо вираз для температурного поля:

$$t = \sqrt{\left(\frac{1}{b} + t_{c1}\right)^2 - \frac{2qx}{\lambda_0 b}} - \frac{1}{b}. \qquad (2.14)$$

З цього рівняння виходить, що закон зміни температури в стінці не є лінійним. Характер температурної кривої визначається знаком і числовим значенням коефіцієнта b.

Розглянемо теплопровідність багатошарової плоскої стінки, що складається з n однорідних шарів. Приймемо, що контакт між шарами бездоганний і температура на дотичних поверхнях двох шарів однакова.

При стаціонарному режимі тепловий потік, що проходить через будь-яку ізотермічну поверхню неоднорідної стінки, один і той же:

$$\partial q / \partial x = 0.$$

При заданих температурах на зовнішніх поверхнях такої стінки, розмірах шарів і відповідних коефіцієнтах теплопровідності можна скласти систему рівнянь:

$$\left.\begin{aligned}
q &= \frac{\lambda_1}{\delta_1}(t_{c1} - t_{c2}); \\
q &= \frac{\lambda_2}{\delta_2}(t_{c2} - t_{c3}); \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
q &= \frac{\lambda_n}{\delta_n}(t_{cn} - t_{c(n+1)}).
\end{aligned}\right\}$$

Визначивши температурні напори з наведених вище рівнянь в кожному шарі і додавши праві і ліві частини отриманих рівнянь, матимемо:

$$t_{c1} - t_{c(n+1)} = q\left(\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \ldots + \frac{\delta_n}{\lambda_n}\right).$$

Звідси густина теплового потоку

$$q = \frac{t_{c1} - t_{c(n+1)}}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \ldots + \frac{\delta_n}{\lambda_n}} = \frac{t_{c1} - t_{c(n+1)}}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta_i}{\lambda_i}}. \qquad (2.15)$$

Величина $\sum_{i=1}^{i=n} \delta_i / \lambda_i$ *, що дорівнює сумі термічних опорів усіх n шарів, називається повним термічним опором теплопровідності багатошарової стінки.*

При порівнянні перенесення теплоти через багатошарову стінку і стінку з однорідного матеріалу зручно ввести в розгляд еквівалентний коефіцієнт теплопровідності $\lambda_{екв}$ багатошарової стінки. Він дорівнює коефіцієнту теплопровідності однорідної стінки, товщина якої дорівнює товщині багатошарової стінки $\sum_{i=1}^{i=n} \delta_i$, термічний опір дорівнює термічному опору даної багатошарової стінки, тобто

$$\frac{\sum_{i=1}^{i=n} \delta_i}{\lambda_{екв}} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta_i}{\lambda_i},$$

звідси

$$\lambda_{екв} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \delta_i}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta_i}{\lambda_i}}. \qquad (2.16)$$

З рівняння (2.16) виходить, що еквівалентний коефіцієнт теплопровідності $\lambda_{екв}$ залежить не тільки від теплофізичних властивостей шарів, але і від їх товщини. Температури на межах зіткнення двох сусідніх шарів дорівнюють:

$$\left.\begin{aligned} t_{c2} &= t_{c1} - q\frac{\delta_1}{\lambda_1}; \\ t_{c3} &= t_{c2} - q\left(\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2}\right); \\ t_{c(i+1)} &= t_{ci} - q\sum_{i=1}^{i} \frac{\delta_i}{\lambda_i}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.17)$$

Усередині кожного з шарів температура змінюється згідно з (2.7) або (2.14), а для багатошарової стінки в цілому температурна крива являє собою ламану лінію.

Граничні умови третього роду (теплопередача)

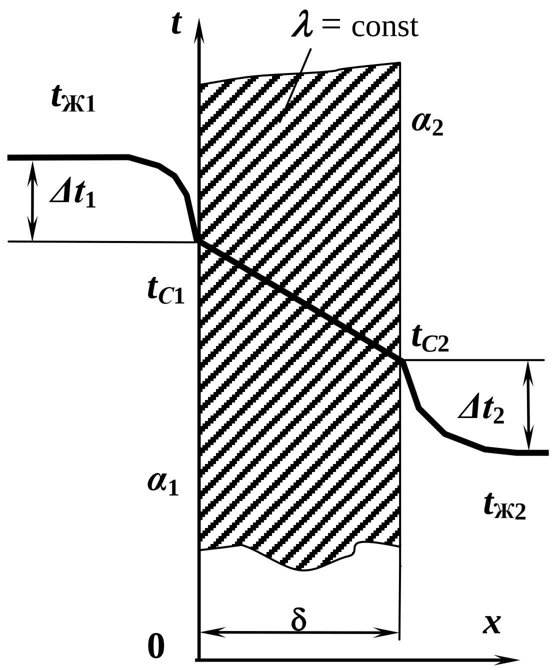


Рис. 2.2. Теплопередача через плоску стінку

Передача тепла з одного рухомого середовища (рідини або газу) до іншого через розділяючу їх однорідну або багатошарову тверду стінку будь-якої форми називається теплопередачею. Теплопередача включає тепловіддачу від більш гарячої рідини до стінки, теплопровідність у стінці, тепловіддачу від стінки до більш холодного рухомого середовища.

Нехай плоска однорідна стінка має товщину δ (рис. 2.2). Задані коефіцієнти теплопровідності стінки λ, температури навколишнього середовища $t_{ж1}$ і $t_{ж2}$, а також коефіцієнти тепловіддачі α_1 і α_2. Вважатимемо, що ці параметри постійні і не змінюються уздовж поверхні. Це дозволяє розглядати зміну температури рідин і стінки тільки в напрямі, перпендикулярному площині стінки.

За заданих умов необхідно знайти тепловий потік від гарячої рідини до холодної і температури на поверхнях стінки.

Густина теплового потоку від гарячої рідини до стінки визначається рівнянням

$$q = \alpha_1 (t_{ж1} - t_{c1}) . \tag{2.18}$$

При стаціонарному тепловому режимі та ж густина теплового потоку обумовлена теплопровідністю через тверду стінку:

$$q = \frac{\lambda}{\delta} (t_{c1} - t_{c2}) . \tag{2.19}$$

Той же тепловий потік передається від другої поверхні стінки до холодної рідини за рахунок тепловіддачі:

$$q = \alpha_2 (t_{c2} - t_{ж2}) . \tag{2.20}$$

Рівняння (2.18)–(2.20) можна записати у вигляді

$$\left.\begin{aligned} q\frac{1}{\alpha_1} &= t_{ж1} - t_{c1} \\ q\frac{\delta}{\lambda} &= t_{c1} - t_{c2} \\ q\frac{1}{\alpha_2} &= t_{c2} - t_{ж2} \end{aligned}\right\}. \qquad (2.21)$$

Склавши рівняння (2.21) почленно,отримаємо:

$$q(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}) = t_{ж1} - t_{ж2.}$$

Звідси густина теплового потоку, Вт/м^2,

$$q = \frac{t_{ж1} - t_{ж2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}. \qquad (2.22)$$

Позначимо:

$$\frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} = k. \qquad (2.23)$$

Величина k має таку ж розмірність, що і α, і називається коефіцієнтом теплопередачі. Коефіцієнт теплопередачі k характеризує інтенсивність передачі теплоти від однієї рідини до іншої через розділяючу їх стінку і чисельно дорівнює кількості теплоти, яка передається через одиницю поверхні стінки в одиницю часу при різниці температур між рідинами в один градус.

З урахуванням (2.23) рівняння (2.22) можна записати у вигляді

$$q = k_1(t_{ж1} - t_{ж2}). \qquad (2.24)$$

Величина, зворотна коефіцієнту теплопередачі, називається повним термічним опором теплопередачі:

$$R = \frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}. \qquad (2.25)$$

З (2.25) видно, що повний термічний опір складається з окремих термічних опорів $1/\alpha_1$, δ/λ і $1/\alpha_2$, причому $1/\alpha_1 = R_1$ – термічний опір тепловіддачі від гарячої рідини до поверхні стінки; $\delta/\lambda = R_c$ – термічний опір теплопровідності стінки; $1/\alpha_2 = R_2$ – термічний опір тепловіддачі від поверхні стінки до холодної рідини.

Оскільки загальний термічний опір складається з окремих термічних опорів, то у разі багатошарової стінки потрібно враховувати термічний опір кожного шару. Якщо стінка складається з n шарів, то повний термічний опір теплопередачі через таку стінку

$$R = \frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}.$$

Звідси

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}}. \tag{2.26}$$

Густина теплового потоку через багатошарову стінку, що складається з n шарів

$$q = \frac{(t_{ж1} - t_{ж2})}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}} = k(t_{ж1} - t_{ж2}). \tag{2.27}$$

Рівняння (2.27) для багатошарової стінки подібно рівнянню (2.24) для однорідної плоскої стінки. Відмінність полягає у виразах для коефіцієнтів теплопередачі k. При порівнянні рівнянь (2.23) і (2.26) видно, що співвідношення (2.23) є окремим випадком рівняння (2.26), коли $n = 1$.

Тепловий потік Q через поверхню F твердої стінки, Вт,

$$Q = qF = k\Delta tF. \tag{2.28}$$

Температури поверхонь однорідної стінки можна знайти з рівнянь (2.21). З них виходить, що

$$t_{c1} = t_{ж1} - q\, {}^{1}\!/_{\alpha_1};$$

$$t_{c2} = t_{ж1} - q\left({}^{1}\!/_{\alpha_1} + {}^{\delta}\!/_{\lambda} \right) \quad \text{або} \quad t_{c2} = t_{ж2} + q\, {}^{1}\!/_{\alpha_2}.$$

Із зіставлення рівнянь (2.15) і (2.27) випливає, що передача теплоти через багатошарову стінку за граничних умов першого роду є окремим випадком загального випадку передачі теплоти за граничних умов третього роду.

На підставі сказаного температура на межі будь-яких двох шарів i і $i+1$ за граничних умов третього роду може бути визначена за рівнянням

$$t_{c(i+1)} = t_{ж1} - q\left(\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{i} \frac{\delta_i}{\lambda_i} \right). \tag{2.29}$$

Граничні умови другого і третього роду

Розглянемо випадок, коли при передачі теплоти через однорідну і ізотропну стінку на одній її поверхні задані граничні умови другого роду у вигляді q_c = const (при x = 0); на іншій поверхні задані коефіцієнт тепловіддачі α_2 і температура навколишнього середовища $t_{ж2}$, тобто граничні умови третього роду (рис. 2.3). Внутрішні джерела в стінці відсутні (q_v = 0).

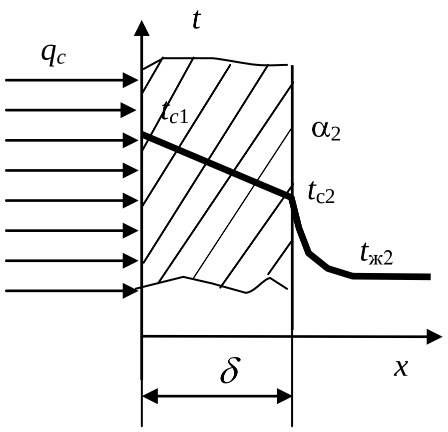


Рис. 2.3. Передача теплоти через плоску стіну (змішані граничні умови)

Така задача зводиться до знаходження розподілу температури в стінці і температур на її поверхні.

Через стаціонарність теплового режиму можна записати наступні рівняння:

$$q_c = (t_{c1} - t_{c2})\frac{\lambda}{\delta};\qquad q_c = \alpha_2 (t_{c2} - t_{ж2}). \tag{2.30}$$

З рівнянь (2.30) виходить, що при заданому значенні q_c

$$t_{c1} = t_{ж2} + q_c\left(\frac{1}{\alpha_2} + \frac{\delta}{\lambda}\right); \qquad t_{c2} = t_{ж2} + q_c \frac{1}{\alpha_2}. \tag{2.31}$$

Якщо ми маємо багатошарову стінку, що складається з n однорідних шарів, то температура на її поверхнях і на межі шарів може бути визначена за наступними рівняннями. На зовнішній правій поверхні:

$$t_{c(n+1)} = t_{ж2} + q_c \frac{1}{\alpha_2};$$

на зовнішній лівій поверхні:

$$t_{c1} = t_{ж2} + q_c\left(\frac{1}{\alpha_2} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta_i}{\lambda_i}\right);$$

на поверхні між шарами m – 1 та m

$$t_{c1} = t_{ж2} + q_c\left(\frac{1}{\alpha_2} + \sum_{i=m}^{i=n} \frac{\delta_i}{\lambda_i}\right). \tag{2.32}$$

Розподіл температури усередині будь-якого шару знаходиться за рівнянням (2.7) або (2.14).

2.2. Передача теплоти через циліндричну стінку ($q_v = 0$)

Граничні умови першого роду

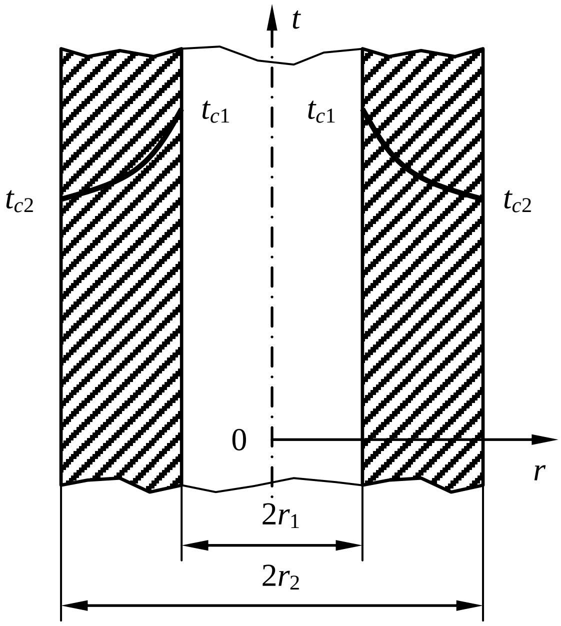


Рис. 2.4. Теплопровідність циліндричної стінки

Розглянемо стаціонарний процес теплопровідності в циліндричній стінці (трубі) з внутрішнім діаметром $d_1 = 2r_1$ та зовнішнім діаметром $d_2 = 2r_2$ (рис. 2.4).

На поверхнях стінки задані постійні температури t_{c1} і t_{c2}. В заданому інтервалі температур коефіцієнт теплопровідності матеріалу стінки λ є постійною величиною. Необхідно знайти розподіл температур у циліндричній стінці і тепловий потік.

У даному випадку диференціальне рівняння теплопровідності зручно записати в циліндричній системі координат:

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0. \quad (2.33)$$

При цьому вісь 0Z суміщена з віссю труби. За заданих умов температура змінюється тільки в радіальному напрямі і температурне поле буде одномірним, тому

$$\frac{\partial t}{\partial z} = 0; \qquad \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0.$$

Крім того, оскільки температури на зовнішній і внутрішній поверхнях труби незмінні, ізотермічні поверхні є циліндричними, мають з трубою загальну вісь. Тоді температура не повинна змінюватися також уздовж φ, тобто

$$\frac{\partial t}{\partial \varphi} = 0; \qquad \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} = 0.$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial r} = 0. \quad (2.34)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{при } r = r_1 \quad t = t_{c1}; \\ \text{при } r = r_2 \quad t = t_{c2}. \end{array}\right\} \tag{2.35}$$

Введемо нову змінну $u = \dfrac{\partial t}{\partial r}$, тоді $\dfrac{\partial^2 t}{\partial r^2} = \dfrac{\partial u}{\partial r}$; $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial t}{\partial r} = \dfrac{u}{r}$. Для нової змінної рівняння (2.34) матиме вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} = 0. \tag{2.36}$$

Інтегруючи (2.36), одержуємо:

$$\ln u + \ln r = \ln C_1.$$

Потенціюючи отриманий вираз і переходячи до первинних змінних, одержуємо:

$$dt = C_1 \frac{dr}{r}.$$

Після інтегрування отримаємо:

$$t = C_1 \ln r + C_2. \tag{2.37}$$

Константи C_1 і C_2 можна визначити, якщо в рівняння (2.37) підставити граничні умови:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{при } r = r_1 \quad t = t_{c1}, & \Rightarrow & t_{c1} = C_1 \ln r_1 + C_2 \\ \text{при } r = r_2 \quad t = t_{c2}, & \Rightarrow & t_{c2} = C_1 \ln r_2 + C_2 \end{array}\right\}.$$

Розв’язання цих рівнянь щодо C_1 і C_2 дає:

$$C_1 = \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\ln \dfrac{r_1}{r_2}}; \qquad C_2 = t_{c1} - \left(t_{c1} - t_{c2}\right)\frac{\ln r}{\ln \dfrac{r_1}{r_2}}.$$

Підставивши значення C_1 і C_2 в рівняння (2.37), отримаємо:

$$t = t_{c1} - \left(t_{c1} - t_{c2}\right)\frac{\ln \dfrac{r}{r_1}}{\ln \dfrac{r_1}{r_2}},$$

або

$$t = t_{c1} - \left(t_{c1} - t_{c2}\right)\frac{\ln \dfrac{d}{d_1}}{\ln \dfrac{d_1}{d_2}}. \tag{2.38}$$

Отриманий вираз є рівнянням логарифмічної кривої. Те, що розподіл температури в циліндричній стінці є криволінійним, можна пояснити наступним. Для плоскої стінки густина теплового потоку q залишається однаковою для всіх ізотермічних поверхонь. З цієї причини градієнт температури зберігає для всіх ізотермічних поверхонь постійне значення. Для циліндричної стінки густина теплового потоку через будь-яку ізотермічну поверхню залежить від радіусу.

Для знаходження кількості теплоти, що проходить через циліндричну поверхню площею F в одиницю часу, можна використати закон Фур'є:

$$Q = -\lambda \frac{dt}{dr} F.$$

Підставляючи в рівняння закону Фур'є значення градієнта температури, одержуємо (враховуючи, що $F = 2\pi r l$):

$$Q = \frac{2\pi\lambda l (t_{c1} - t_{c2})}{\ln \frac{d_2}{d_1}}. \tag{2.39}$$

З рівняння (2.39) виходить, що кількість теплоти, що проходить через циліндричну стінку в одиницю часу, повністю визначається заданими граничними умовами і не залежить від радіусу.

Тепловий потік (2.39) може бути віднесений або до одиниці довжини труби, або до одиниці внутрішньої або зовнішньої поверхні. При цьому розрахункові формули для густини теплового потоку, Вт/м^2, набувають вигляду:

- тепловий потік через одиницю внутрішньої поверхні:

$$\frac{Q}{\pi d_1 l} = q_1 = \frac{2\lambda (t_{c1} - t_{c2})}{d_1 \ln \frac{d_2}{d_1}}; \tag{2.40}$$

- тепловий потік через одиницю зовнішньої поверхні:

$$\frac{Q}{\pi d_2 l} = q_2 = \frac{2\lambda (t_{c1} - t_{c2})}{d_2 \ln \frac{d_2}{d_1}}; \tag{2.41}$$

- потік теплоти, що проходить через одиницю довжини труби, Вт/м:

$$\frac{Q}{l} = q_l = \frac{\pi (t_{c1} - t_{c2})}{\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}}. \tag{2.42}$$

Тепловий потік, віднесений до одиниці довжини труби, вимірюється у Вт/м і називається лінійною густиною теплового потоку. Як видно з рівняння

(2.42), при незмінному відношенні d_2/d_1 лінійна густина теплового потоку не залежить від поверхні циліндричної стінки. Густина теплового потоку q_1 і (віднесена до внутрішньої і зовнішньої поверхні) при передачі теплоти через труби неоднакова, причому завжди $q_1 > q_2$. Останнє чітко видно з рівнянь (2.40) і (2.41).

З рівнянь (2.40)–(2.42) легко встановити зв'язок між між величинами q_1, q_2 і q_l :

$$q_l = \pi d_1 q_1 = \pi d_2 q_2. \tag{2.43}$$

Коли коефіцієнт теплопровідності є функцією температури і набуває вигляду $\lambda(t) = \lambda_0(1+bt)$, можна показати, що лінійну густину теплового потоку можна обчислити за тією ж формулою, що і для $\lambda = \text{const}$:

$$q_l = \frac{\pi(t_{c1} - t_{c2})}{\dfrac{1}{2\lambda_{\text{ср}}}\ln\dfrac{d_2}{d_1}}. \tag{2.44}$$

При цьому слід пам'ятати, що у формулі (2.44) $\lambda_{\text{ср}}$ є середньоінтегральним значенням коефіцієнта теплопровідності:

$$\lambda_{\text{ср}} = \frac{1}{|t_{c2} - t_{c1}|}\int_{t_{c1}}^{t_{c2}} \lambda(t)dt.$$

Для знаходження температурного поля при $\lambda = \lambda(t) = \lambda_0(1+bt)$ можна скористатися рівнянням закону Фур'є, записаного для циліндричної стінки:

$$q_l = -\lambda(t)\frac{dt}{dr}2\pi r. \tag{2.45}$$

Якщо розділити змінні і проінтегрувати рівняння (2.45) в межах від $r = r_1$ до r і від $t = t_{c1}$ до t і знайти з отриманого інтегралу t, то отримаємо вираз для температурного поля наступного вигляду:

$$t = \sqrt{\left(\frac{1}{b} + t_{c1}\right)^2 - \frac{q_l \ln\dfrac{d}{d_1}}{\pi b \lambda_0}} - \frac{1}{b}. \tag{2.46}$$

Граничні умови третього роду (теплопередача)

Розглянемо однорідну циліндричну стінку (трубу) з постійним коефіцієнтом теплопровідності λ. Задані постійні температури рухомих середовищ $t_{ж1}$ і $t_{ж2}$ і постійні значення коефіцієнтів тепловіддачі на внутрішній і зовнішній поверхнях труби α_1 і α_2 (рис. 2.5).

Необхідно знайти q_l і t_c. Вважатимемо, що довжина труби велика в порівнянні з товщиною стінки. Тоді втратами теплоти з торців труби можна знехтувати, і при сталому тепловому режимі проходитиме через стінку і віддаватиметься від стінки до холодної рідини одна і та ж кількість теплоти. Отже, можна записати:

$$\left.\begin{aligned} q_l &= \alpha_1 \pi d_1 (t_{ж1} - t_{c1}); \\ q_l &= \frac{\pi (t_{c1} - t_{c2})}{\dfrac{1}{2\lambda} \ln \dfrac{d_2}{d_1}}; \\ q_l &= \alpha_2 \pi d_2 (t_{c2} - t_{ж2}). \end{aligned}\right\} \qquad (2.47)$$

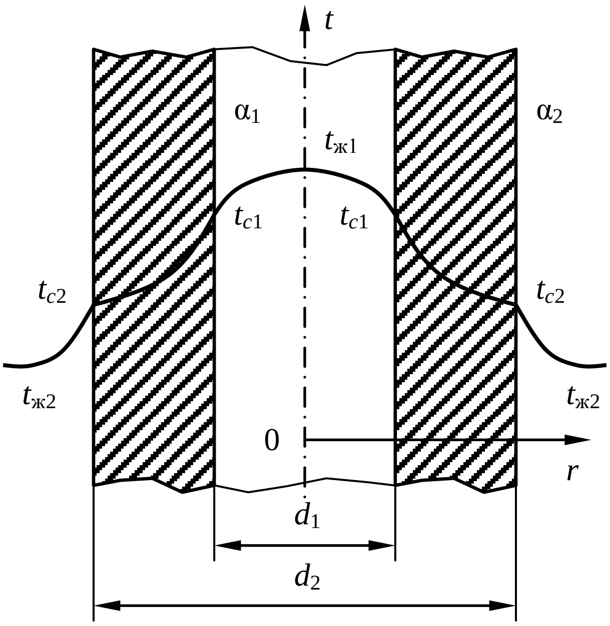


Рис. 2.5. Теплопередача через однорідну циліндричну стінку

Подамо ці рівняння таким чином:

$$\left.\begin{aligned} (t_{ж1} - t_{c1}) &= \frac{q_l}{\pi} \frac{1}{\alpha_1 d_1}; \\ (t_{c1} - t_{c2}) &= \frac{q_l}{\pi} \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}; \\ (t_{c2} - t_{ж2}) &= \frac{q_l}{\pi} \frac{1}{\alpha_2 d_2}. \end{aligned}\right\} (2.47')$$

Додавши рівняння, які входять в систему (2.47'), одержуємо температурний напір:

$$t_{ж1} - t_{ж2} = \frac{q_l}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2} \right).$$

Звідси виходить:

$$q_l = \frac{\pi (t_{ж1} - t_{ж2})}{\dfrac{1}{\alpha_1 d_1} + \dfrac{1}{2\lambda} \ln \dfrac{d_2}{d_1} + \dfrac{1}{\alpha_2 d_2}}. \qquad (2.48)$$

Позначимо:

$$k_l = \frac{1}{\dfrac{1}{\alpha_1 d_1} + \dfrac{1}{2\lambda} \ln \dfrac{d_2}{d_1} + \dfrac{1}{\alpha_2 d_2}}. \qquad (2.49)$$

З урахуванням (2.49) рівняння (2.48) запишеться в вигляді

$$q_l = k_l \pi (t_{ж1} - t_{ж2}).$$

Величина k_l, Вт/(м·К), називається *лінійним коефіцієнтом теплопере-*

дачі. Вона характеризує інтенсивність передачі теплоти від одного середовища до іншого через розділяючу їх стінку.

Величина $R_l = 1/k_l$, м·К/Вт, називається лінійним термічним опором теплопередачі. Вона дорівнює:

$$R_l = \frac{1}{k_l} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda}\ln\frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}, \tag{2.50}$$

де $1/\alpha_1 d_1 = R_{l1}$ і $1/\alpha_2 d_2 = R_{l2}$ – термічні опори тепловіддачі на відповідних поверхнях; $1/2\lambda \cdot \ln(d_2/d_1) = R_{lc}$ – термічний опір теплопровідності стінки.

Якщо тепловий потік через циліндричну стінку віднести до внутрішньої або зовнішньої поверхні стінки, то отримаємо густину теплового потоку, Вт/м^2, віднесену до одиниці відповідної поверхні труби:

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= k_1(t_{ж1} - t_{ж2}) = \frac{q_l l}{\pi d_1 l} = \frac{(t_{ж1} - t_{ж2})}{\dfrac{1}{\alpha_1} + \dfrac{d_1}{2\lambda}\ln\dfrac{d_2}{d_1} + \dfrac{d_1}{\alpha_2 d_2}}; \\ q_2 &= k_2(t_{ж1} - t_{ж2}) = \frac{q_l l}{\pi d_2 l} = \frac{(t_{ж1} - t_{ж2})}{\dfrac{1}{\alpha_1}\dfrac{d_2}{d_1} + \dfrac{d_2}{2\lambda}\ln\dfrac{d_2}{d_1} + \dfrac{1}{\alpha_2}}. \end{aligned}\right\}$$

Ці співвідношення встановлюють зв'язок між лінійним і поверхневими коефіцієнтами теплопередачі циліндричної стінки:

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= \frac{k_l}{d_1} = \frac{1}{\dfrac{1}{\alpha_1} + \dfrac{d_1}{2\lambda}\ln\dfrac{d_2}{d_1} + \dfrac{d_1}{\alpha_2 d_2}}; \\ k_2 &= \frac{k_l}{d_2} = \frac{1}{\dfrac{1}{\alpha_1}\dfrac{d_2}{d_1} + \dfrac{d_2}{2\lambda}\ln\dfrac{d_2}{d_1} + \dfrac{1}{\alpha_2}}. \end{aligned}\right\} \tag{2.51}$$

На практиці часто зустрічаються циліндри, товщина стінок яких мала в порівнянні з діаметром. У цьому випадку при розрахунках можна користуватися спрощеними формулами. Для їх отримання величину $\ln(d_2/d_1)$ розкладемо в ряд:

$$\ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right) = \left(\frac{d_2}{d_1} - 1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{d_2}{d_1} - 1\right)^2 + \ldots$$

Якщо відношення $d_2/d_1 \to 1$, то такий ряд швидко збігається, і з достатньою точністю можна обмежиться першим членом ряду:

$$\ln\frac{d_2}{d_1}=\left(\frac{d_2}{d_1}-1\right)=\frac{d_2-d_1}{d_1}=\frac{2\delta}{d_1},$$

де δ – товщина циліндричної стінки.

Підставивши отримане значення $\ln(d_2/d_1)$ в рівняння (2.51), отримаємо:

$$k=k_1=k_2=\frac{1}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{\delta}{\lambda}+\frac{1}{\alpha_2}}. \qquad (2.52)$$

Отже, якщо стінка тонка, то при практичних розрахунках можна користуватися формулою

$$q=q_1=q_2=\frac{(t_{ж1}-t_{ж2})}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{\delta}{\lambda}+\frac{1}{\alpha_2}}. \qquad (2.53)$$

При цьому, якщо $d_2/d_1<2$, то погрішність розрахунків не перевищує 4 %, що є цілком допустимим при технічних розрахунках.

При теплопередачі через багатошарову циліндричну стінку система рівності (2.47') повинна бути замінена системою, що враховує опір теплопровідності всіх шарів:

$$\left.\begin{aligned}
&(t_{ж1}-t_{c1})=\frac{q_l}{\pi}\frac{1}{\alpha_1 d_1};\\
&(t_{c1}-t_{c2})=\frac{q_l}{\pi}\frac{1}{2\lambda_1}\ln\frac{d_2}{d_1};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(t_{cn}-t_{c(n+1)})=\frac{q_l}{\pi}\frac{1}{2\lambda_n}\ln\frac{d_{n+1}}{d_n};\\
&(t_{c(n+1)}-t_{ж2})=\frac{q_l}{\pi}\frac{1}{\alpha_2 d_{n+1}}.
\end{aligned}\right\} \qquad (2.54)$$

Після додавання рівностей (2.54) і вирішуючи відносно q_l отримаємо:

$$q_l=\frac{\pi(t_{ж1}-t_{ж2})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2\lambda_i}\ln\frac{d_{i+1}}{d_i}+\frac{1}{\alpha_2 d_{n+1}}}. \qquad (2.55)$$

Термічний опір багатошарової циліндричної стінки визначається як

$$R_l=\frac{1}{\alpha_1 d_1}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2\lambda_i}\ln\frac{d_{i+1}}{d_i}+\frac{1}{\alpha_2 d_{n+1}}.$$

З рівняння (2.54) виходить, що

$$\left.\begin{aligned} t_{c1} &= t_{ж1} - \frac{q_l}{\pi}\frac{1}{\alpha_1 d_1}; \\ t_{c2} &= t_{ж1} - \frac{q_l}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda_1}\ln\frac{d_2}{d_1}\right); \\ t_{c(i+1)} &= t_{ж1} - \frac{q_l}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^{i}\frac{1}{2\lambda_i}\ln\frac{d_{i+1}}{d_i}\right). \end{aligned}\right\} \tag{2.56}$$

$$q_l = \frac{\pi(t_{c1} - t_{c(n+1)})}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2\lambda_i}\ln\frac{d_{i+1}}{d_i}}, \tag{2.57}$$

а вираз для розрахунку температури на межах між шарами

$$t_{c(i+1)} = t_{c1} - \frac{q_l}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^{i}\frac{1}{2\lambda_i}\ln\frac{d_{i+1}}{d_i}\right). \tag{2.58}$$

2.3. Критичний діаметр циліндричної стінки

Розглянемо вплив зміни зовнішнього діаметра на термічний опір однорідної циліндричної стінки. З (2.50) маємо:

$$R_l = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda}\ln\frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}.$$

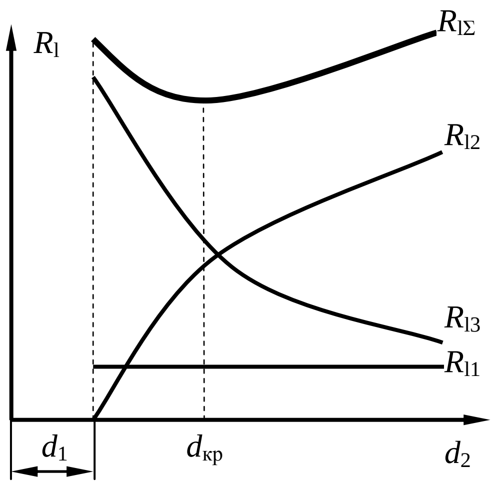


Рис. 2.6. Залежність термічного опору циліндричної стінки від d_2

При постійних значеннях α_1, α_2, d_1, і λ повний термічний опір теплопередачі циліндричної стінки залежатиме від зовнішнього діаметра. З рівняння (2.50) виходить, що за цих умов $R_{l1} = 1/(\alpha_1 d_1) = \text{const}$.

Термічний опір теплопровідності $R_{lc} = 1/(2\lambda)\cdot\ln(d_2/d_1)$ зі збільшенням d_2 зростатиме, а термічний опір тепловіддачі $R_{l2} = 1/(\alpha_2 d_2)$ буде зменшуватися. Очевидно, що повний термічний опір визначатиметься характером зміни складових R_{lc} і R_{l2}. Зміна окремих термічних опорів зображена на рис. 2.6.

Щоб з'ясувати, як змінюватиметься R_l при зміні товщини циліндричної стінки, досліджуємо R_l як функцію d_2. Візьмемо похідну від R_l по d_2 і прирівняємо нулю:

$$\frac{d(R_l)}{d(d_2)} = \frac{1}{2\lambda d_2} - \frac{1}{\alpha_2 d_2^2} = 0. \tag{2.59}$$

Значення d_2 з останнього виразу відповідає екстремальній точці кривої $R_l = f(d_2)$. Дослідивши криву будь-яким з відомих способів на максимум і мінімум, побачимо, що в екстремальній точці має місце мінімум. Таким чином, при значенні діаметра $d_2 = 2\lambda/\alpha_2$ термічний опір теплопередачі буде мінімальним.

Значення зовнішнього діаметра труби, який відповідає мінімальному повному термічному опору теплопередачі, називається критичним діаметром і позначається $d_{кр}$. Розраховується він за формулою

$$d_{кр} = \frac{2\lambda}{\alpha_2}. \tag{2.60}$$

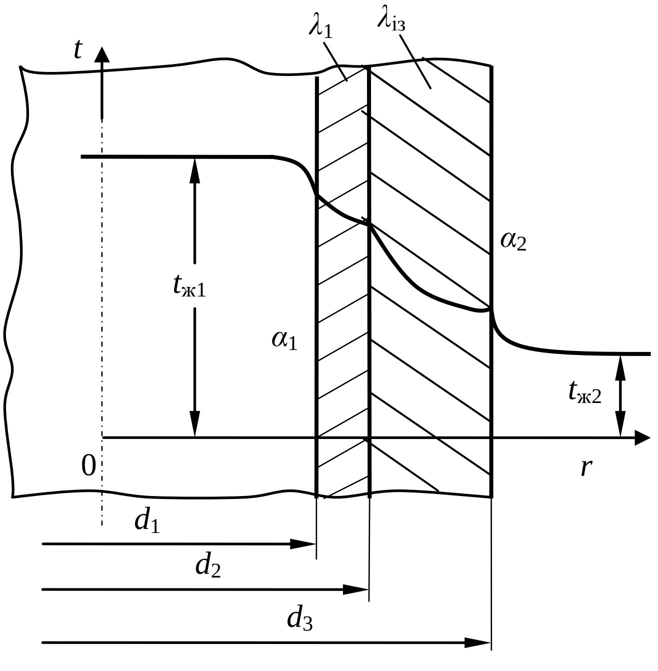


Рис. 2.7. До поняття критичного діаметру ізоляції

При $d_2 < d_{кр}$ з ростом d_2 повний термічний опір теплопередачі знижується, оскільки збільшення зовнішньої поверхні впливає на термічний опір в більшій мірі, ніж збільшення товщини стінки.

При $d_2 > d_{кр}$ з ростом d_2 термічний опір теплопередачі зростає, що указує на домінуючий вплив товщини стінки.

Висловлені міркування необхідно враховувати при виборі теплової ізоляції для покриття різних циліндричних апаратів і трубопроводів.

Розглянемо критичний діаметр ізоляції, що накладається на трубу (рис. 2.7). Термічний опір теплопередачі для такої труби

$$R_l = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda_c}\ln\frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{2\lambda_{із}}\ln\frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{\alpha_2 d_3}.$$

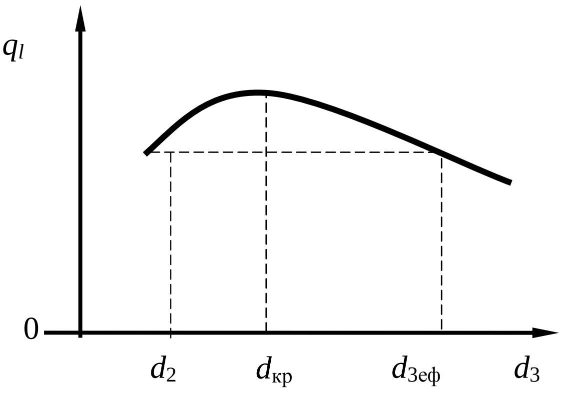


Рис. 2.8. Залежність теплових витрат від товщини ізоляції циліндричної стінки

З рівняння $q_l = \pi\Delta t/R_l$ виходить, що q_l при збільшенні зовнішнього діаметра ізоляції d_3 спочатку зростатиме і при $d_3 = d_{кр}$ матиме максимум. При подальшому збільшенні зовнішнього діаметра ізоляції q_l знижуватиметься (рис. 2.8).

Вибираючи матеріал теплоізоляції для покриття циліндричної поверхні, перш за все потрібно розрахувати критичний діаметр за формулою (2.60) для заданих $\lambda_{із}$ та α_2.

Якщо виявиться, що значення $d_{кр}$ більше зовнішнього діаметра труби d_2, то використання вибраного матеріалу для теплоізоляції недоцільно. В області $d_2 < d_3 < d_{кр}$ при збільшенні товщини ізоляції спосте-рігатиметься збільшення тепло-втрат. Це положення наочно ілюструється на рис. 2.8. Тільки при $d_3 = d_{3\ еф}$ теплові втрати знов стануть такими ж, як для первинного, неізольованого трубопроводу. Отже, деякий шар теплової ізоляції не виправдовуватиме свого призначення,

тобто для ефективної роботи теплової ізоляції необхідно, щоб $d_{кр}<d_2$.

2.4. Передача теплоти через кульову стінку

Граничні умови першого роду

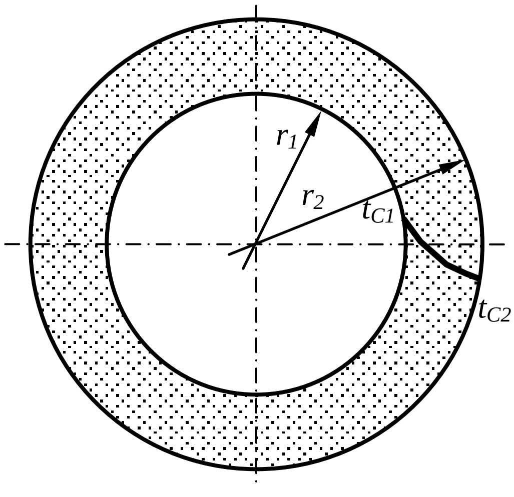


Рис. 2.9. Теплопровідність сферичної стінки

Нехай є пола куля з радіусами r_1 і r_2, постійним коефіцієнтом теплопровідності λ та із заданими рівномірно розподіленими температурами поверхонь t_{c1} і t_{c2} (рис.2.9).

Оскільки в даному випадку температура змінюється тільки у напрямку радіусу кулі, то диференціальне рівняння теплопровідності в сферичних координатах набуває вигляду:

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial t}{\partial r} = 0. \qquad (2.61)$$

Граничні умови:

$$\left.\begin{array}{l} \text{при } r = r_1 \quad t = t_{c1}; \\ \text{при } r = r_2 \quad t = t_{c2}. \end{array}\right\} \qquad (2.62)$$

Після першого інтегрування рівняння (2.61) отримаємо:

$$\frac{dt}{dr} = \frac{C_1}{r^2}.$$

Друге інтегрування дає

$$t = C_2 - \frac{C_1}{r}. \qquad (2.63)$$

Сталі інтегрування в рівнянні (2.63) визначаються з граничних умов (2.62). При цьому отримаємо:

$$C_1 = \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}; \qquad C_2 = t_{c1} - \frac{\left(t_{c1} - t_{c2}\right)}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}\frac{1}{r_1}.$$

Підставляючи значення C_1 і C_2 у рівняння (2.63), отримаємо вираз для температурного поля кульової стінки:

$$t = t_{c1} - \frac{\left(t_{c1} - t_{c2}\right)}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right). \qquad 2.64)$$

Для знаходження кількості теплоти, що проходить через кульову поверхню площею F в одиницю часу, можна скористатися законом Фур'є:

$$Q = -\lambda\frac{dt}{dr}F = -\lambda\frac{dt}{dr}\cdot 4\pi r^2.$$

Якщо в цей вираз підставити значення градієнта температури dt/dr, то отримаємо:

$$Q = \frac{4\pi\lambda\left(t_{c1} - t_{c2}\right)}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} = \frac{2\pi\lambda\left(t_{c1} - t_{c2}\right)}{\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}} = \pi\lambda\frac{d_1 d_2}{\delta}\left(t_{c1} - t_{c2}\right). \qquad (2.65)$$

Ці рівняння є розрахунковими формулами теплопровідності для кульової стінки. З рівняння (2.64) виходить, що при постійному λ температура в кульовій стінці змінюється за гіперболічним законом.

Граничні умови третього роду (теплопередача)

При заданих граничних умовах третього роду, крім r_1 і r_2, будуть відомі $t_{ж1}$ і $t_{ж2}$, а також коефіцієнти теплопередачі на поверхні кульової стінки α_1 та α_2. Величини $t_{ж1}$, $t_{ж2}$, α_1 і α_2 вважаються сталими в часі, а α_1 і α_2 ще і по поверхнях.

Оскільки процес стаціонарний і повний тепловий потік Q, Вт, буде постійним для всіх ізотермічних поверхонь, то можна записати:

$$Q = \alpha_1 \pi d_1^2 \left(t_{ж1} - t_{c1}\right); \quad Q = \frac{2\pi\lambda}{\dfrac{1}{d_1} - \dfrac{1}{d_2}}\left(t_{c1} - t_{c2}\right); \quad Q = \alpha_2 \pi d_2^2 \left(t_{c2} - t_{ж2}\right).$$

З цих рівнянь виходить, що

$$Q = \frac{\pi\left(t_{ж1} - t_{ж2}\right)}{\dfrac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \dfrac{1}{2\lambda}\left(\dfrac{1}{d_1} - \dfrac{1}{d_2}\right) + \dfrac{1}{\alpha_2 d_2^2}} = k_ш \pi \left(t_{c1} - t_{c2}\right). \qquad (2.66)$$

Величина

$$k_ш = \frac{1}{\dfrac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \dfrac{1}{2\lambda}\left(\dfrac{1}{d_1} - \dfrac{1}{d_2}\right) + \dfrac{1}{\alpha_2 d_2^2}}$$

є коефіцієнтом теплопередачі кульової стінки та вимірюється у Вт/К. Обернена величина

$$R_ш = \frac{1}{k_ш} = \frac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right) + \frac{1}{\alpha_2 d_2^2}$$

є термічним опором теплопередачі кульової стінки і вимірюється в К/Вт.

2.5. Шляхи інтенсифікації теплопередачі

З рівняння теплопередачі $Q = kF\Delta t$ випливає, що при заданих розмірах стінки і температурах рідин величиною, що визначає теплопередачу, є k. Але оскільки теплопередача – явище складне, то правильне рішення можна знайти тільки на основі аналізу окремих складових, що характеризують процес. Наприклад, якщо ми маємо справу з плоскою стінкою, для якої

$$k = \frac{1}{\dfrac{1}{\alpha_1} + \dfrac{\delta}{\lambda} + \dfrac{1}{\alpha_2}},$$

то при $\delta/\lambda \to 0$ (що можна прийняти для тонких стінок з великим коефіцієнтом λ)

$$k' = \frac{1}{\dfrac{1}{\alpha_1} + \dfrac{1}{\alpha_2}} = \frac{\alpha_1}{1 + \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}} = \frac{\alpha_2}{1 + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}}. \tag{2.67}$$

Інтенсифікація теплопередачі шляхом збільшення коефіцієнтів тепловіддачі

З рівняння (2.67) виходить, що значення коефіцієнта теплопередачі не може бути більше найменшого значення α. Прослідкуємо за цим на числових прикладах.

а) 1) $\alpha_1 = 40$ і $\alpha_2 = 5000$ Вт/(м^2·К);

2) $\alpha_1 = 40$ і $\alpha_2 = 10000$ Вт/(м^2·К).

За формулою (2.67) знаходимо, що коефіцієнт теплопередачі $k_1' = 39{,}7$ Вт/(м^2·К) та $k_2' = 39{,}8$ Вт/(м^2·К).

б) 1) $\alpha_1 = 80$ і $\alpha_2 = 5000$ Вт/(м^2·К);

2) $\alpha_1 = 200$ і $\alpha_2 = 5000$ Вт/(м^2·К).

Для випадку (б) знаходимо, що коефіцієнт теплопередачі $k_1' = 78{,}8$ Вт/(м^2·К) та $k_2' = 192$ Вт/(м^2·К).

З розглянутого прикладу видно, що при $\alpha_1 << \alpha_2$ збільшення більшого з коефіцієнтів тепловіддачі (α_2) практично не дає збільшення k'. Збільшення меншого з коефіцієнтів тепловіддачі (α_1) у 2 та 5 разів дає збільшення k' майже в стільки ж разів.

З аналізу результатів числового прикладу виходить, що при $\alpha_1 << \alpha_2$ для збільшення k' слід збільшувати α_1, тобто зменшувати більший з термічних опорів $1/\alpha_1$. Інакше кажучи, при $\alpha_1 << \alpha_2$ збільшення k' можливо тільки за рахунок збільшення α_1. Якщо $\alpha_1 \approx \alpha_2$, збільшення коефіцієнта теплопередачі можливо за рахунок збільшення будь-якого з α.

Інтенсифікація теплопередачі за рахунок оребрення

При передачі теплоти через циліндричну стінку термічні опори $1/\alpha_1 d_1$ і $1/\alpha_2 d_2$ визначаються не тільки значеннями коефіцієнтів тепловіддачі, але і розмірами самих поверхонь. При передачі теплоти через кульову стінку вплив діаметрів d_1 і d_2 буде ще сильнішим, що видно із співвідношень $1/\alpha_1 d_1^2$ і

$1/\alpha_2 d_2^2$. Звідси випливає, що якщо значення α мало, то термічний опір тепловіддачі можна зменшити шляхом збільшення відповідної поверхні. Такий же результат можна отримати і для плоскої стінки, якщо одну з площ поверхні збільшити шляхом оребрення. Остання обставина і лежить в основі інтенсифікації теплопередачі за рахунок оребрення. При цьому термічні опори стануть пропорційними величинам $1/\alpha_1 F$ і $1/\alpha_2 F_2$.

Необхідно відмітити, що при використанні методу оребрення потрібно керуватися наступними міркуваннями: якщо $\alpha_1 << \alpha_2$, то оребрювати поверхню з боку α_1 слід доти, поки $\alpha_1 F_1$ не досягне значення $\alpha_2 F_2$. Подальше збільшення площі поверхні F_1 малоефективне. Ребристі поверхні виготовляються або у вигляді суцільних відливок, або як окремі ребра, прикріплені до поверхні.

Строге аналітичне рішення задачі про поширення теплоти в ребрі пов'язано із значними труднощами. Розв'язання, яке буде розглянуте далі, враховує деякі припущення, які дозволяють порівняно простим шляхом отримати необхідний результат.

2.6. Теплопровідність в стержні (ребрі) постійного поперечного перерізу

Ребра в поперечному перерізі можуть мати профіль самої різної геометричної конфігурації (прямокутник, коло, трикутник і інші фігури, у тому числі і неправильної геометричної форми). Розглянемо поширення теплоти в прямому стержні з постійним поперечним перерізом по довжині.

Диференціальне рівняння і його розв'язання

Позначимо площу поперечного перерізу стержня через f і периметр через u. Стержень знаходиться в середовищі з постійною температурою $t_ж$, коефіцієнт тепловіддачі від поверхні стержня до навколишнього середовища вважатимемо постійним для всієї поверхні. Вважатимемо також, що значення коефіцієнта теплопровідності матеріалу стержня λ достатньо великі, а площа поперечного перерізу дуже мала в порівнянні з його довжиною. Останнє дає підставу знехтувати зміною температури в поперечному перерізі і вважати, що вона змінюється тільки уздовж осі стержня. Для зручності подальших викладень відлік температури вестимемо від $t_ж = \text{const}$. Відлічену таким чином надмірну температуру стержня позначимо через θ. Очевидно,

$$\theta = t - t_{ж},$$

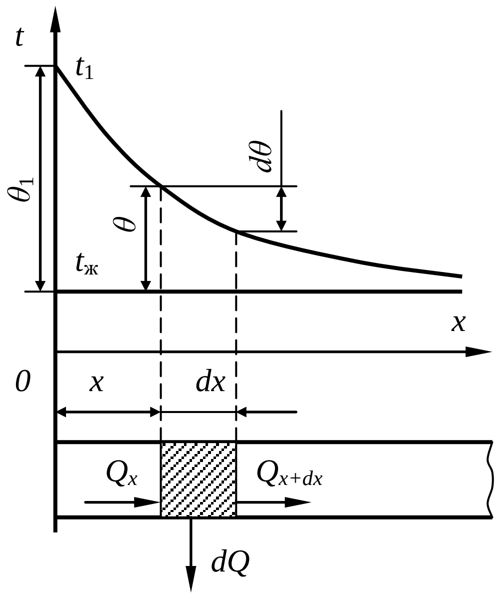


Рис. 2.10. Перенос теплоти через стержень

де $t_ж$ – температура середовища, яке оточує стержень; t – поточна температура стержня.

Якщо задана температура основи стержня t_1, то надмірна температура стержня (рис. 2.10) буде:

$$\theta_1 = t_1 - t_ж.$$

На відстані x від основи стержня виділимо елемент стержня довжиною dx. Рівняння теплового балансу для даного елемента можна записати у вигляді

$$Q_x - Q_{x+dx} = dQ,$$

де Q_x – кількість теплоти, яка входить в ліву грань елемента за одиницю часу; Q_{x+dx} – кількість теплоти, яка виходить з протилежної грані за одиницю часу; dQ – кількість теплоти, яка віддається за одиницю часу зовнішньою поверхнею елемента в навколишнє середовище.

Згідно із законом Фур'є

$$Q_x = -\lambda \frac{d\theta}{dx} f$$

та

$$Q_{x+dx} = -\lambda \frac{d}{dx}\left(\theta + \frac{d\theta}{dx}dx\right) f = -\lambda f \frac{d\theta}{dx} - \lambda f \frac{d^2\theta}{dx^2}dx,$$

отже,

$$Q_x - Q_{x+dx} = \lambda f \frac{d^2\theta}{dx^2}dx.$$

Але згідно із законом Ньютона – Ріхмана

$$dQ = \alpha_p \theta u dx.$$

Прирівнюючи два останні рівняння, одержуємо диференціальне рівняння, яке описує зміну температури стержня:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = \frac{\alpha_р u}{\lambda f}\theta = m^2\theta, \tag{2.68}$$

де $m = \sqrt{\dfrac{\alpha_р u}{\lambda f}}$, 1/м.

Для ребра, форма і розміри якого задані, за умови постійності коефіцієнта тепловіддачі $\alpha_р$ по всій поверхні і постійності λ в даному інтервалі температур, m = const. Тоді загальний інтеграл рівняння (2.68) буде:

$$\theta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}. \qquad (2.69)$$

Значення сталих C_1 та C_2 визначаються з граничних умов, які задаються залежно від геометрії стержня і інших факторів.

Стержень нескінченної довжини

У початковому перерізі стержня температура підтримується постійною, тобто при $x = 0$ $\theta = \theta_1$. Якщо довжина стержня $l \to \infty$, то вся теплота, яка підводиться до стержня, буде віддана ним у навколишнє середовище, і при $x \to \infty$ маємо $\theta = 0$.

Підстановка граничних умов в рівняння (2.69) дає:

при $x = 0$ $\qquad \theta = C_1 + C_2 = \theta_1$;

при $x \to \infty$ $\qquad \theta = C_1 e^{\infty} + C_2 \cdot 0 = 0$.

Остання рівність можлива тільки при $C_1 = 0$. Таким чином, $C_2 = \theta_1$. Підставляючи ці значення сталих C_1 і C_2 у рівняння (2.69), одержуємо:

$$\theta = \theta_1 e^{-mx}. \qquad (2.70)$$

Останню рівність можна записати у вигляді

$$\Theta = \frac{\theta}{\theta_1} e^{-mx}.$$

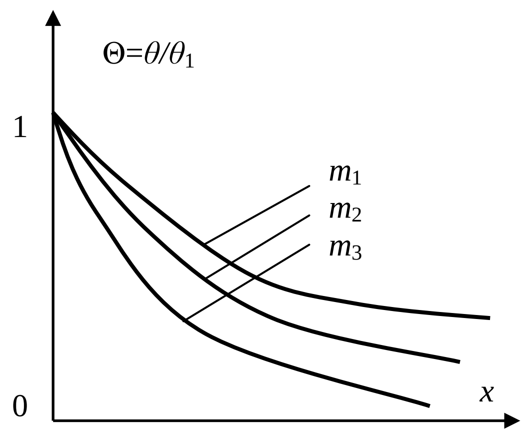


Рис. 2.11. Зміна температури по довжині стержня

де Θ – безрозмірна температура, яка виражається в долях температури θ_1 початкового перерізу стержня.

На рис. 2.11 подана залежність безрозмірної температури Θ від довжини стержня при різних значеннях параметра m ($m_1 < m_2 < m_3$).

З розгляду рис. 2.11 виходить, що безрозмірна температура убуває тим сильніше, чим більше множник

m. При $x \to \infty$ усі криві асимптотично наближаються до $\Theta = 0$.

З рівняння $m = \sqrt{\alpha_\text{р} u / \lambda f}$ випливає, що величина пропорційна коефіцієнту тепловіддачі з бічної поверхні і обернено пропорційна $\sqrt{\lambda f}$ – фактору, що визначає передачу теплоти теплопровідністю уздовж стержня. Звідси випливає, що при оребренні необхідно вибирати матеріал для ребер з великим коефіцієнтом теплопровідності. Це призводить до зменшення значень m і збереження великих надмірних температур уздовж стержня. При $\alpha_\text{р}/\lambda = \text{const}$ значення m зростають із зростанням u/f, що вказує на більш ефективну роботу ребер з профілями, що мають менше відношення u/f при тому ж поперечному перерізі.

Кількість теплоти, яка передається стержнем в оточуюче середовище, дорівнює кількості теплоти, що проходить через його основу. Через основу стержня проходить тепловий потік:

$$Q = -\lambda \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{x=0} f .$$

З рівняння (2.70) знаходимо:

$$\left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{x=0} = -me^{-m \cdot 0} \theta_1 = -m\theta_1 .$$

Підставляючи значення градієнта температури при $x = 0$ у попереднє рівняння для теплового потоку, одержуємо формулу, що визначає кількість теплоти, яка віддається стержнем в оточуюче середовище:

$$Q = \lambda f m \theta_1 = \theta_1 \sqrt{\alpha_\text{р} \lambda u f} . \tag{2.71}$$

Стержень кінцевої довжини

Для стержня кінцевої довжини диференціальне рівняння (2.68) і його розв’язок (2.69) зберігають силу, але друга гранична умова буде іншою. При $x = l$ має місце рівність кількості теплоти, яка підводиться до торця стержня за рахунок теплопровідності, кількості теплоти, що віддається поверхнею торця в оточуюче середовище за рахунок тепловіддачі. Таким чином, граничні умови для стержня кінцевої довжини будуть мати вигляд:

$$\begin{aligned} &\text{при } x = 0 \qquad \theta = \theta_1; \\ &\text{при } x = l \qquad \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{x=l} = -\frac{\alpha_l}{\lambda} \theta_l , \end{aligned} \tag{2.72}$$

де θ_l – температура на кінці стержня; α_l — коефіцієнт тепловіддачі з торця стержня.

Для визначення сталих C_1 і C_2 у рівнянні (2.69) використовуємо граничні умови (2.72):

при $x = 0$ $\quad \theta_l = C_1 + C_2$;

при $x = l$ $\quad \left(\dfrac{d\theta}{dx}\right)_{x=l} = C_1 m e^{ml} - C_2 m e^{-ml} = -\dfrac{\alpha_l}{\lambda}\theta_l$,

де $\theta_l = C_1 e^{ml} + C_2 e^{-ml}$.

З отриманих рівнянь (2.72) визначаємо сталі C_1 та C_2:

$$C_1 = \frac{\theta_1\left(m - \dfrac{\alpha_l}{\lambda}\right)}{e^{2ml}\left(m + \dfrac{\alpha_l}{\lambda}\right) + m - \dfrac{\alpha_l}{\lambda}}; \quad C_2 = \frac{\theta_1 e^{2ml}\left(m + \dfrac{\alpha_l}{\lambda}\right)}{e^{2ml}\left(m + \dfrac{\alpha_l}{\lambda}\right) + m - \dfrac{\alpha_l}{\lambda}}.$$

Підставляючи отримані значення C_1 та C_2 в рівняння (2.69), отримуємо:

$$\theta = \theta_1\left[\frac{e^{mx}\left(m - \dfrac{\alpha_l}{\lambda}\right)}{e^{2ml}\left(m + \dfrac{\alpha_l}{\lambda}\right) + m - \dfrac{\alpha_l}{\lambda}} + \frac{e^{-mx}e^{2ml}\left(m + \dfrac{\alpha_l}{\lambda}\right)}{e^{2ml}\left(m + \dfrac{\alpha_l}{\lambda}\right) + m - \dfrac{\alpha_l}{\lambda}}\right]. \qquad (2.73)$$

Помноживши і розділивши праву частину рівняння (2.73) на e^{-ml} і провівши прості перетворення , отримаємо:

$$\theta = \theta_1\left[\frac{m\left[e^{m(l-x)} + e^{-m(l-x)}\right] + \dfrac{\alpha_l}{\lambda}\left[e^{m(l-x)} - e^{-m(l-x)}\right]}{m\left[e^{ml} + e^{-ml}\right] + \dfrac{\alpha_l}{\lambda}\left[e^{ml} - e^{-ml}\right]}\right],$$

або, з урахуванням $ch(x) = (e^x + e^{-x})/2$ і $sh(x) = (e^x - e^{-x})/2$ рівняння (2.73) буде мати вигляд

$$\theta = \theta_1\frac{ch\left[m(l-x)\right] + \dfrac{\alpha_l}{m\lambda}sh\left[m(l-x)\right]}{ch(ml) - \dfrac{\alpha_l}{m\lambda}sh(ml)}. \qquad (2.73')$$

Якщо тепловіддачею з кінця стержня знехтувати, то граничні умови (2.72) можна записати:

при $x = 0$ $\quad \theta = \theta_1$;

при $x = l$ $\quad \left(\dfrac{d\theta}{dx}\right)_{x=l} = 0$.

Останнє можна допустити для випадку, коли α_l на торці стержня мале, а коефіцієнт теплопровідності матеріалу λ великий і відношення $\alpha_l/\lambda \to 0$, тобто можна знехтувати тепловіддачею з торця стержня.

Для цих умов у відношенні (2.73') другі члени чисельника і знаменника правої частини обертаються в нуль і рівняння набуває вигляду:

$$\theta = \theta_1 \frac{ch\left[m(l-x)\right]}{ch(ml)}. \tag{2.74}$$

За формулами (2.73') та (2.74) можна обчислити температуру в будь-якому перерізі стержня. Звичайно частина теплоти, що віддається з торця стержня, мала в порівнянні з кількістю теплоти, що віддається з поверхні ребра, і для практичних інженерних розрахунків, як правило, використовується формула (2.74).

У випадку при граничних умовах, коли $x = l$, формула (2.74) набуває вигляду**:**

$$\theta_{x=l} = \frac{\theta_1}{ch(ml)}.$$

Кількість теплоти $Q_\text{р}$, що віддається поверхнею ребра в оточуюче середовище, буде дорівнювати кількості теплоти, що підводиться до основи ребра:

$$Q_\text{р} = -\lambda f \left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{x=0}.$$

З рівняння (2.74) знаходимо:

$$\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{x=0} = -\theta_1 m \frac{sh(ml)}{ch(ml)} = -\theta_1 m \cdot th(ml),$$

тоді

$$Q_\text{р} = \lambda f m \theta_1 \cdot th(ml). \tag{2.75}$$

Підставивши $m = \sqrt{\alpha_\text{р} u / \lambda f}$ в (2.75), одержимо:

$$Q_\text{р} = \theta_1 \sqrt{\alpha_\text{р} u \lambda f} \cdot th(ml). \tag{2.75'}$$

Якщо довжина стержня дуже велика, то $ch(ml) \to \infty$, а $th(ml) \approx 1$, тоді $\theta_{x=l} = 0$ і формула (2.75) перетворюється в (2.71).

2.7. Теплопередача через ребристу плоску стінку

Необхідно знайти тепловий потік через плоску ребристу стінку безмежних розмірів. Стінка оребрена з боку меншого коефіцієнта тепловіддачі.

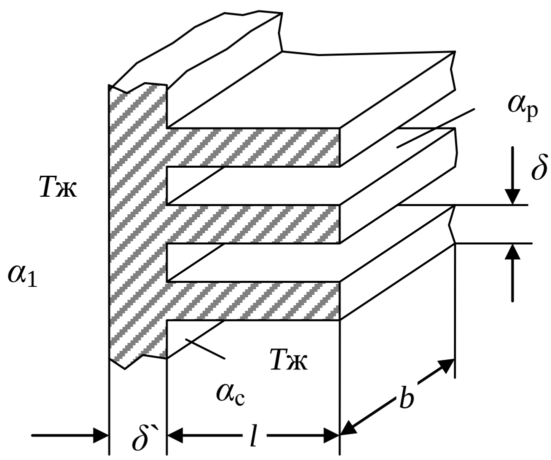


Рис. 2.12. Тепловіддача через ребристу стінку

Задані постійні значення коефіцієнтів тепловіддачі на необребренній поверхні стінки α_1, гладкої частини оребренної поверхні $\alpha_с$ і на поверхні ребер $\alpha_р$. Задані геометричні розміри ребер (рис. 2.12) і температури теплоносіїв $t_{ж1}$ і $t_{ж2}$.

Оскільки для ребра $b >> \delta$, то вважаємо, що периметр поперечного перерізу ребер $u = 2b$. Площа поперечного перерізу ребра $f = b\delta$.

Отже, $m = \sqrt{\alpha_р u/\lambda f} = \sqrt{2\alpha_р/\lambda\delta}$, 1/м. Підставивши отриманий вираз для m в рівняння (2.75), помноживши і розділивши на $2l$, отримаємо:

$$Q_р = \theta_1\sqrt{\alpha_р 2b\lambda b\delta}\,\frac{2l}{2l}\cdot th\left(\frac{l}{\delta}\sqrt{\frac{2\alpha_р\delta}{\lambda}}\right) = \alpha_р\theta_1 F_р\,\frac{th\left(\frac{l}{\delta}\sqrt{\frac{2\alpha_р\delta}{\lambda}}\right)}{\frac{l}{\delta}\sqrt{\frac{2\alpha_р\delta}{\lambda}}}$$

де $\alpha_р\delta/\lambda$ = Bi – безрозмірний комплекс**,** який називається «число Біо». Число Bi є важливою характеристикою процесу теплопровідності. Воно є відношенням внутрішнього термічного опору теплопровідності до зовнішнього термічного опору тепловіддачі:

$$\mathrm{Bi} = \frac{\delta/\lambda}{1/\alpha_р}.$$

Остаточне рівняння для теплового потоку з поверхні ребра можна записати у вигляді:

$$Q_{\text{р}} = \alpha_{\text{р}}\theta_1 F_{\text{р}} \frac{th\left(\frac{l}{\delta}\sqrt{2\text{Bi}}\right)}{\frac{l}{\delta}\sqrt{2\text{Bi}}}. \tag{2.76}$$

Позначимо $\frac{th\left(\frac{l}{\delta}\sqrt{2\text{Bi}}\right)}{\frac{l}{\delta}\sqrt{2\text{Bi}}} = E$ – коефіцієнтом ефективності ребра. Тоді рівняння (2.76) набуває вигляду $Q_{\text{р}} = \alpha_{\text{р}}\theta_1 F_{\text{р}} E$.

Величина $E = f\left(\frac{l}{\delta}\sqrt{2\text{Bi}}\right)$ прагне до свого максимального значення, рівного одиниці при $\frac{l}{\delta}\sqrt{2\text{Bi}} \to 0$ (при заданих геометричних розмірах ребра останнє можливо, якщо $\lambda \to \infty$, тобто $\text{Bi} \to 0$).

Тепловий потік Q_c, який віддається гладкою частиною оребренної поверхні:

$$Q_c = \alpha_c \theta_1 F_c.$$

Загальний тепловий потік

$$Q = Q_{\text{р}} + Q_c = \alpha_{\text{р}}\theta_1 F_{\text{р}} E + \alpha_c \theta_1 F_c,$$

або

$$Q = \alpha_{\text{пр}}\theta_1 F_{\text{р.с}}, \qquad F_{\text{р.с}} = F_{\text{р}} + F_c.$$

Із зіставлення вище наведених рівнянь випливає, що

$$\alpha_{\text{пр}} = \alpha_{\text{р}} E \frac{F_{\text{р}}}{F_{\text{р.с}}} + \alpha_c \frac{F_c}{F_{\text{р.с}}}. \tag{2.77}$$

Величина $\alpha_{\text{пр}}$, яка входить в рівняння (2.77), називається *приведеним коефіцієнтом тепловіддачі*. Це усереднений коефіцієнт тепловіддачі ребристої стінки, який враховує тепловіддачу поверхні ребра, поверхні гладкої стінки і ефективність роботи ребра.

Для передачі теплоти через ребристу стінку можна записати систему рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} Q &= \alpha_1\left(t_{ж1}-t_{c1}\right)F_1; \\ Q &= \frac{\lambda}{\delta'}\left(t_{c1}-t_{c2}\right)F_1; \\ Q &= \alpha_{пр}\left(t_{c2}-t_{ж2}\right)F_{р.с} \end{aligned}\right\}$$

З цих рівнянь одержуємо:

$$Q=\frac{t_{ж1}-t_{ж2}}{\dfrac{1}{\alpha_1 F_1}+\dfrac{\delta'}{\lambda F_1}+\dfrac{1}{\alpha_{пр}F_{р.с}}}. \qquad (2.78)$$

Якщо тепловий потік віднести до одиниці оребренної поверхні стінки, то

$$\frac{Q}{F_{р.с}}=q_{р.с}=\frac{t_{ж1}-t_{ж2}}{\dfrac{1}{\alpha_1}\dfrac{F_{р.с}}{F_1}+\dfrac{\delta'}{\lambda_1}\dfrac{F_{р.с.}}{F_1}+\dfrac{1}{\alpha_{пр}}}=k_{р.с}\left(t_{ж1}-t_{ж2}\right), \qquad (2.79)$$

де $k_{р.с}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{\alpha_1}\dfrac{F_{р.с}}{F_1}+\dfrac{\delta'}{\lambda_1}\dfrac{F_{р.с}}{F_1}+\dfrac{1}{\alpha_{пр}}}$ — коефіцієнт теплопередачі через ребристу стінку при віднесенні теплового потоку до оребренної поверхні.

Якщо тепловий потік віднести до неоребренної поверхні стінки, то отримаємо:

$$\frac{Q}{F_1}=q_1=\frac{t_{ж1}-t_{ж2}}{\dfrac{1}{\alpha_1}+\dfrac{\delta'}{\lambda_1}+\dfrac{1}{\alpha_{пр}}\dfrac{F_1}{F_{р.с}}}=k_1\left(t_{ж1}-t_{ж2}\right), \qquad (2.80)$$

де $k_1=\dfrac{1}{\dfrac{1}{\alpha_1}+\dfrac{\delta'}{\lambda_1}+\dfrac{1}{\alpha_{пр}}\dfrac{F_1}{F_{р.с}}}$ — коефіцієнт теплопередачі при віднесенні теплового потоку до неоребренної поверхні стінки.

Відношення оребренної поверхні $F_{р.с}$ до гладкої F_1 називається *коефіцієнтом оребрення*.

Вплив оребрення на коефіцієнт теплопередачі можна показати на наступному прикладі. Нехай $\alpha_1 = 1000$ Вт/(м^2 К) і $\alpha_{пр} = 20$ Вт/(м^2 К). Вважатимемо, що δ'/λ мале і ним можна знехтувати. Тоді $k_1'=\dfrac{1}{\dfrac{1}{\alpha_1}+\dfrac{1}{\alpha_{пр}}\dfrac{F_1}{F_{р.с}}}$. Для плоскої поверхні (коефіцієнт оребрення $F_{р.с}/F_1 = 1$) одержимо:

$$k_1^{'} = \frac{1}{\frac{1}{1000} + \frac{1}{20}} \approx 20 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}.$$

Якщо стінка має ребра з одного боку, причому коефіцієнт $F_{р.с}/F_1 = 2$, то

$$k_1^{'} = \frac{1}{\frac{1}{1000} + \frac{1}{20}\cdot\frac{1}{2}} \approx 40 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}.$$

Отже, при заданих співвідношеннях коефіцієнтів тепловіддачі при оребренні плоскої стінки з боку малого α з коефіцієнтом оребрення $F_{р.с}/F_1 = 2$ передача теплоти збільшується приблизно в 2 рази.

2.8. Теплопровідність круглого ребра постійної товщини

Ребра, що мають змінну площу поперечного перерізу, розраховуються складніше, ніж прямі ребра, розглянуті вище. Розглянемо розрахунок теплопровідності круглого ребра постійної товщини (рис. 2.13). Круглі ребра застосовуються при оребренні циліндричних поверхонь (труб).

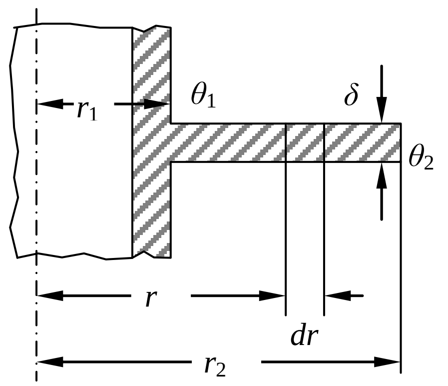


Рис. 2.13. Перенос теплоти через кругле ребро

Задані внутрішній радіус ребра r_1, зовнішній r_2, товщина δ і коефіцієнт теплопровідності λ. Температура середовища $t_ж = \text{const}$. Надмірна температура ребра буде:

$$\theta = t - t_ж.$$

Задані постійний коефіцієнт тепловіддачі α на всій поверхні ребра і температура у основи ребра θ_1.

Режим стаціонарний, і температура змінюється тільки по висоті ребра. Знайдемо для цих умов диференціальне рівняння, яким описується процес теплопровідності в ребрі. Складемо рівняння балансу енергії для кільцевого елемента ребра товщиною dr:

$$Q_r - Q_{r+dr} = dQ. \tag{2.81}$$

Знаходячи складові рівняння (2.81), одержуємо диференціальне рівняння вигляду

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{d\theta}{dr} - \frac{2\alpha}{\lambda\delta}\theta = 0. \qquad (2.82)$$

Позначимо $2\alpha/\lambda\delta = m^2$, $mr = z$ і $1/r = m/z$; тоді рівняння (2.82) після підстановки $d\theta/dr = md\theta/dz$ і $d^2\theta/dr^2 = m^2(d^2\theta/dz^2)$ прийме вигляд:

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} - \frac{1}{z}\frac{d\theta}{dz} - \theta = 0. \qquad (2.83)$$

Рівняння (2.83) є рівнянням Бесселя, що має загальне рішення вигляду

$$\theta = C_1 I_0(z) + C_2 K_0(z), \qquad (2.84)$$

де $I_0(z) = I_0(mr)$ – модифікована функція Бесселя першого роду нульового порядку; $K_0(z) = K_0(mr)$ – модифікована функція Бесселя другого роду нульового порядку.

Ці функції мають наступні властивості:

1. при $r = 0$ $I_0(mr) = 1$ і $K_0(mr) \to \infty$;
2. при $r = \infty$ $I_0(mr) \to \infty$ і $K_0(mr) = 0$.

Сталі C_1 і C_2 визначаються з граничних умов.

Якщо тепловіддачею з торця ребра знехтувати, то розрахункові формули матимуть вигляд:

для поточної температури в ребрі

$$\theta = \theta_1 \frac{I_0(mr)K_1(mr_2) + I_1(mr_2)K_0(mr)}{I_0(mr_1)K_1(mr_2) + I_1(mr_2)K_0(mr_1)}; \qquad (2.85)$$

для температури на кінці ребра

$$\theta_2 = \theta_1 \frac{I_0(mr_2)K_1(mr_2) + I_1(mr_2)K_0(mr_2)}{I_0(mr_1)K_1(mr_2) + I_1(mr_2)K_0(mr_1)}; \qquad (2.86)$$

для кількості теплоти

$$Q = -\lambda 2\pi r_1 \delta \left(\frac{d\theta}{dr}\right)_{r=r_1} = 2\pi r_1 \lambda \delta m \theta_1 \psi, \qquad (2.87)$$

де

$$\psi = \frac{I_1(mr_2)K_1(mr_1) - I_1(mr_1)K_1(mr_2)}{I_0(mr_1)K_1(mr_2) + I_1(mr_2)K_0(mr_1)}.$$

Для круглого ребра постійної товщини коефіцієнт ефективності може бути розрахований за залежністю:

$$E = \frac{\lambda\delta m\psi r_1}{\alpha\left(r_2^2 - r_1^2\right)}. \qquad (2.88)$$

При користуванні цими формулами тепловіддача з торця може бути врахована при умовному збільшенні висоти ребра r_2 на половину товщини торця.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1. Сталева труба діаметром d_1/d_2 = 100/110 мм з коефіцієнтом теплопровідності λ_1 = 50 Вт/(м·К) покрита ізоляцією в два шари однакової товщини $\delta_1 = \delta_2$ = 50 мм. Температури внутрішньої поверхні труби t_{c1} = 250 ºС і зовнішньої поверхні ізоляції t_{c4} = 50 ºС (рис. 2.14). Визначити втрати тепла через ізоляцію з одного погонного метра труби і температуру на межі зіткнення шарів ізоляції, якщо перший шар ізоляції, що накладається на поверхню труби, виконаний з матеріалу з коефіцієнтом теплопровідності λ_2 = 0,06 Вт/(м·К), а другий шар – з матеріалу з коефіцієнтом теплопровідності λ_3 = 0,12 Вт/(м·К).

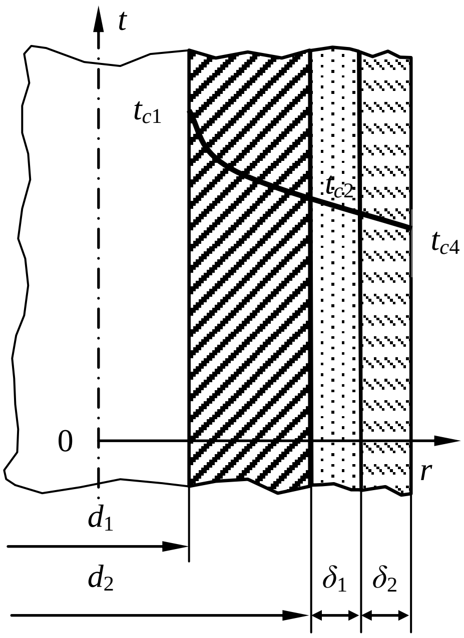


Рис. 2.14. До прикладу 1

Розв'язання. В задачі розглядається стаціонарний процес теплопровідності в багатошаровій циліндричній стінці з граничними умовами першого роду. Коефіцієнт теплопередачі λ є постійною величиною. Скориставшись рівнянням (2.57), отриманими вище, визначимо лінійну густину теплового потоку:

$$q_l = k_l \pi \left(t_{c1} - t_{c4}\right),$$

де лінійний коефіцієнт теплопередачі k_l визначається з рівняння

$$k_l = \frac{1}{\frac{1}{2\lambda_1}\ln\frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{2\lambda_2}\ln\frac{d_2 + 2\delta_1}{d_2} + \frac{1}{2\lambda_3}\ln\frac{d_2 + 2\delta_1 + 2\delta_2}{d_2 + 2\delta_1}}.$$

$$k_l = \frac{1}{\frac{1}{2\cdot 50}\ln\frac{0,11}{0,1} + \frac{1}{2\cdot 0,06}\ln\frac{0,11+2\cdot 0,05}{0,11} + \frac{1}{2\cdot 0,12}\ln\frac{0,11+2\cdot 0,05+2\cdot 0,05}{0,11+2\cdot 0,05}} =$$

$$= 0,143\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}.$$

Тоді втрати тепла через ізоляцію з 1 пог. м труби

$$q_l = 0,143\cdot 3,14\left(250-50\right) = 89,8\frac{\text{Вт}}{\text{м}}.$$

Температура на межі зіткнення шарів ізоляції, як виходить з рівняня (2.58), визначається таким чином:

$$t_{c3} = t_{c1} - \frac{q_l}{\pi}\left(\frac{1}{2\lambda_1}\ln\frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{2\lambda_2}\ln\frac{d_2+2\delta_1}{d_2}\right);$$

$$t_{c3} = 250 - \frac{89,8}{3,14}\left(\frac{1}{2\cdot 50}\ln\frac{0,11}{0,1} + \frac{1}{2\cdot 0,06}\ln\frac{0,11+2\cdot 0,05}{0,11}\right) = 95,8\ ^\circ\text{C}.$$

Відповідь: Теплові втрати з 1 пог. м трубопроводу складають q_l = 89,8 Вт/м·, температура на межі зіткнення шарів ізоляції t_{c3} = 95,8 ºС.

Приклад 2. Трубу зовнішнім діаметром d = 20 мм необхідно покрити тепловою ізоляцією. Як ізоляція може бути узятий азбест з коефіцієнтом теплопровідності λ = 0,1 Вт/(м·К), коефіцієнт тепловіддачі в зовнішнє середовище α_2 = 5 Вт/(м^2·К). Чи доцільно в даному випадку використовувати азбест як матеріал для теплової ізоляції?

Розв'язання. Критичний діаметр ізоляції

$$d_{\text{кр.із}} = \frac{2\lambda_{\text{із}}}{\alpha_2} = \frac{2\cdot 0,1}{5} = 0,04\,\text{м}.$$

Оскільки $d_2 < d_{\text{кр}},$ азбест у даному випадку використовувати недоцільно.

Вище розглянуто питання про критичний діаметр стосовно круглого циліндра. Очевидно, що аналогічний ефект спостерігатиметься і у тіл іншої геометрії, у яких внутрішня і зовнішня поверхні різні.

Приклад 3. Для інтенсифікації теплопередачі необхідно провести оребрення плоскої поверхні повітронагрівача шириною b = 1 м прямими ребрами з товщиною δ = 1 мм. Коефіцієнт тепловіддачі від плоскої поверхні і ребер α = 5,7 Вт/(м^2·К), Величина зазору між ребрами x = 5 мм. Температури у основи ребра t_0 = 70 °С і середовища $t_ж$ = 20 °С відповідно. На оребрення 1 м^2 поверхні витрачається 5 кг алюмінію. Густина і коефіцієнт теплопровідності алюмінію ρ = 2700 кг/м^3, λ = 14,7 Вт/(м·°С). Визначити тепловий потік з оребренної поверхні і температуру на кінці ребра.

Розв'язання. Загальний тепловий потік визначається як сума потоків, що віддаються гладкою частиною поверхні і поверхнею ребер:

$$Q = Q_р + Q_c = \alpha_р \theta_1 F_р E + \alpha_c \theta_1 F_c .$$

Кількість ребер на одиницю довжини:

$$n = \frac{1}{\delta + x} = \frac{1}{0.001 + 0.005} \approx 167 .$$

Довжину ребра знайдемо з урахування маси оребрення:

$$l = \frac{m}{\delta \cdot b \cdot \rho \cdot n} = \frac{5}{0,001 \cdot 1 \cdot 2700 \cdot 167} = 0,011 \, \text{м}.$$

де число Біо для ребра:

$$\text{Bi} = \frac{\delta \alpha}{\lambda} = \frac{0,001 \cdot 5,7}{14,7} = 0,0004.$$

Коефіцієнт ефективності ребра:

$$E = \frac{th\left(\dfrac{l}{\delta}\sqrt{2\text{Bi}}\right)}{\dfrac{l}{\delta}\sqrt{2\text{Bi}}} = \frac{th\left(\dfrac{0,011}{0,001}\sqrt{2 \cdot 0,0004}\right)}{\dfrac{0,011}{0,001}\sqrt{2 \cdot 0,0004}} = 0,969 .$$

Визначимо площу гладкої поверхні між ребрами:

$$F_c = (1 - x \cdot b \cdot n) \cdot b = (1 - 0,005 \cdot 1 \cdot 167) \cdot 1 = 0,835 \, \text{м}^2$$

і поверхні ребер:

$$F_р = (\delta + 2 \cdot l) \cdot n \cdot b = (0.001 + 2 \cdot 0.011) \cdot 167 \cdot 1 = 3.841 \, \text{м}^2 .$$

Надмірна температура біля основи ребра:

$$\theta_1 = t_0 - t_ж = 70 - 20 = 50 \, °\text{C}.$$

Тепловий поток через оребрену поверхню:

$$Q_р = \alpha_р \theta_1 F_р E = 5,7 \cdot 50 \cdot 3,841 \cdot 0,969 = 1060,75 \, \text{Вт},$$

неоребрену поверхню:

$$Q_c = \alpha_c \theta_1 F_c = 5,7 \cdot 50 \cdot 0,835 = 237,96 \, \text{Вт} .$$

Повний поток тепла:

$$Q = Q_р + Q_c = 1060,75 + 237,96 = 1298,7 \, \text{Вт} .$$

Визначимо надмірну температуру на кінці ребра за допомогою формули (2.74). Для $x = l$ отримаємо: $\theta_{x=l} = \theta_1 \dfrac{1}{ch(ml)}$, де $m = \sqrt{\dfrac{\alpha \cdot u}{\lambda \cdot f}}$.

Оскільки для ребра $b >> \delta$, то периметр і площу поперечного перетину ребер обчислюємо таким чином: $u \approx 2b = 2 \cdot 1 = 2$ м, $f \approx b \cdot \delta = 1 \cdot 0{,}001 = 0{,}001$м^2.

Тоді $m = \sqrt{\dfrac{5.7 \cdot 2}{14.7 \cdot 0.001}} = 27{,}85$.

Температуру на кінці ребра знайдемо із рівняння

$$t_{x=l} = t_ж + \theta_{x=l} = t_ж + \theta_1 \frac{1}{ch(ml)} = 20 + 50 \frac{1}{ch(27{,}85 \cdot 0{,}011)} = 67{,}7 \ {}^\circ\text{C}.$$

Відповідь: Тепловий потік з оребренної поверхні дорівнює Q = 1298,7 Вт, температура на кінці ребра $\theta_{x=l}$ = 67,7 °С.

Приклад 4. Плоска стінка товщиною δ_1 = 8 мм покрита двома шарами теплової ізоляції. Стінка стальна з коефіцієнтом теплопровідності λ_1 = 46,5 Вт/(м·К). Перший шар ізоляції товщиною δ_2 = 50 мм з матеріалу з коефіцієнтом теплопровідності, який залежить від температури відповідно до рівняння λ_2 = 0,14 + 0,00014t, Вт/(м · К), а другий шар – товщиною δ_3 = 10 мм з матеріалу з коефіцієнтом теплопровідності λ_3 = 0,698 Вт/(м · К). Температура внутрішньої поверхні стінки бака t_{c1} = 250 ºС, зовнішньої поверхні ізоляції t_{c4} = 50 ºС.

Розрахувати густину теплового потока, яка передається через стінку, температури на границях шарів ізоляції.

Розв'язання. У задачі розглядається тришарова плоска стінка з граничними умовами 1-го роду. Густина теплового потоку через кожний шар однакова, що випливає з умови стаціонарності задачі і може бути розрахована за рівняннями:

$$q = \frac{\lambda_1}{\delta_1}\left(t_{c1} - t_{c2}\right), \tag{1}$$

$$q = \frac{\lambda_{2.\text{ср}}}{\delta_2}\left(t_{c2} - t_{c3}\right), \tag{2}$$

$$q = \frac{\lambda_3}{\delta_3}\left(t_{c3} - t_{c4}\right). \tag{3}$$

де $\lambda_{2,\text{ср}}$ — середній коефіціцієнт теплопроводності другого шару, який обчислюється за формулою

$$\lambda_{2.\text{ср}} = \lambda_0 + b\frac{t_{c2} + t_{c3}}{2}. \qquad (4)$$

Коефіцієнти λ_0 та b одержимо із зіставлення рівняня $\lambda = \lambda_0(1+bt)$ та рівняння для температурної залежності для λ_2 з умови задачі ($\lambda_0 = 0{,}14$, $b = 0{,}001$).

Рівняння (1–4) є системою чотирьох нелінійних рівнянь з чотирьма невідомими q, t_{c2}, t_{c3}, $\lambda_{2,\text{ср}}$. Можливе аналітичне рішення, але простіше це зробити, застосувавши компютерні програми, зокрема пакет MathCAD. Приклад розвязання задачі за допомогою цього пакету наведений далі.

Дано:

$t_{c1} := 250$ $\qquad t_{c4} := 50$

$\delta_1 := 0.008$ $\qquad \delta_2 := 0.050$ $\qquad \delta_3 := 0.010$

$\lambda_1 := 46.5$ $\qquad \lambda_0 := 0.14$ $\qquad b := 0.001$ $\qquad \lambda_3 := 0.698$

Початкові наближення:

$q := 1000$ $\qquad t_{c2} := 200$ $\qquad t_{c3} := 100$ $\qquad \lambda_{2.\text{ср}} := 1$

Given

$$q = \frac{\lambda_1}{\delta_1} \cdot (t_{c1} - t_{c2})$$

$$q = \frac{\lambda_{2.\text{ср}}}{\delta_2} \cdot (t_{c2} - t_{c3})$$

$$q = \frac{\lambda_3}{\delta_3} \cdot (t_{c3} - t_{c4})$$

$$\lambda_{2.\text{ср}} = \lambda_0 + b \cdot \frac{t_{c2} + t_{c3}}{2}$$

$$\begin{pmatrix} q \\ t_{c2} \\ t_{c3} \\ \lambda_{2.\text{ср}} \end{pmatrix} := \text{Find}(q, t_{c2}, t_{c3}, \lambda_{2.\text{ср}}) \qquad \begin{pmatrix} q \\ t_{c2} \\ t_{c3} \\ \lambda_{2.\text{ср}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.096 \times 10^3 \\ 249.811 \\ 65.707 \\ 0.298 \end{pmatrix}$$

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ТА ЗАДАЧІ

1. Вивести закон розподілу температури в плоскій нескінченній стінці для λ = const та $\lambda \neq$ const без внутрішніх джерел тепла.

2. Як змінюється температурний градієнт для плоскої однорідної (λ = const) нескінченної стінки без внутрішніх джерел тепла при стаціонарному режимі?

3. Еквівалентний коефіцієнт теплопровідності.

4. Що характеризує коефіцієнт теплопередачі?

5. Вивести закон розподілу температури в циліндричній стінці нескінченної довжини для λ = const та $\lambda \neq$ const без внутрішніх джерел тепла.

6. Як змінюється лінійна густина теплового потоку в циліндричній однорідній (λ = const) стінці нескінченної довжини без внутрішніх джерел тепла при стаціонарному режимі із збільшенням радіуса?

7. Визначення лінійної густини теплового потоку та лінійного коефіцієнта теплопередачі.

8. Визначення критичного діаметра.

9. Вивести закон розподілу температури в кульовій стінці для λ = const без внутрішніх джерел тепла.

10. Перелічити шляхи інтенсифікації теплопередачі.

11. Вивести диференціальне рівняння для визначення температурного поля ребра постоянного поперечного перетину.

12. Вивести закон розподілу температури в ребрі постоянного поперечного перетину нескінченної довжини та кількість тепла, що передається у середовище.

13. Вивести закон розподілу температури в ребрі постоянного поперечного перетину кінцевої довжини та кількість тепла, що передається у середовище.

14. Вивести диференціальне рівняння для визначення температурного поля круглого ребра.

15. Вивести закон розподілу температури в круглому ребрі та кількість

тепла, що передається у середовище.

16. Як залежить розподіл температури в стержні та його ефективність від значення числа Bi?

17. Визначення коефіцієнта ефективності ребра. Вивести розрахункову залежність ефективності ребра постоянного поперечного перетину нескінченної та кінцевої довжини.

18. Вивести розрахункову залежність ефективності циліндричного ребра постійної товщини.

19. Вивести залежність для розрахунку кількості тепла, що передається у середовище через ребристу плоску стінку.

20. В камері згоряння парового котла з рідким золовидаленням температура газів повинна підтримуватися рівною $t_{ж1}$ = 1300 ºC, температура повітря в котельній $t_{ж2}$ = 30 ºC. Стіни топочної камери виконані з шару вогнеупору завтовшки δ_1 = 250 мм з коефіцієнтом теплопровідності $\lambda_1 = 0{,}28(1+0{,}833\cdot10^{-3}t)$ Вт/(м · К) і шару діатомитової цеглини з коефіцієнтом теплопровідності $\lambda_2 = 0{,}113(1 + 0{,}206\cdot10^{-3}t)$ Вт/(м·К). Коефіцієнт тепловіддачі від газів до обмурівки α_1 = 30 Вт/(м^2 · К) і від зовнішньої поверхні топочної камери до навколишнього повітря α_2 = 10 Вт/(м^2 · К). Якою повинна бути товщина діатомитового шару, щоб втрати в оточуюче середовище не перевищували 750 Вт/м^2?

<u>Відповідь:</u>Товщина діатомитового шару повинна бути δ_2 = 132 мм.

21. Обчислити втрату тепла з 1 пог. м неізольованого трубопроводу діаметром d_1/d_2 = 150/165 мм, прокладеного на відритому повітрі, якщо усередині труби протікає вода з середньою температурою $t_{ж1}$ = 90 ºC і температурою навколишнього повітря $t_{ж2}$ = –15 ºC. Коефіцієнт теплопровідності матеріалу труби λ = 50 Вт/(м · К). Коефіцієнт тепловіддачі від води до стінки труби α_1 = 1000 Вт/(м^2 · К) і від труби до навколишнього повітря α_2 = 12 Вт/(м^2 · К). Визначити також температури на внутрішній і зовнішній поверхнях труби.

<u>Відповідь</u>: q_l = 4650 Вт/м, t_{c1} = 89,8 ºC, t_{c2} = 89,6 ºC.

22. Нагрівальний прилад виконаний у вигляді вертикальної труби з подовжніми сталевими ребрами прямокутного перетину. Висота труби

h = 1200 мм; зовнішній діаметр труби d_2 = 60 мм; довжина ребер l = 50 мм і товщина ребер δ = 3 мм. Загальне число ребер n = 20. Температура у підстави ребра t_0 = 80 ºС, температура навколишнього повітря $t_ж$ = 18 ºС. Коефіцієнт тепловіддачі від ребер і зовнішньої поверхні труби до навколишнього повітря α = 9,3 Вт/(м^2 · К), коефіцієнт теплопровідності стінки λ = 55,7 Вт/(м · К). Обчислити кількість теплоти, що віддається ребристою стінкою в оточуюче середовище.

Відповідь:Кількість теплоти, що віддається ребрами, $Q_р$ = 1270 Вт. Кількість теплоти, що віддається гладкою поверхнею між ребрами, $Q_с$ = 88 Вт. Всією ребристою стінкою передається $Q_{р.с}$ = 1358 Вт.

3. ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ ПРИ СТАЦІОНАРНОМУ РЕЖИМІ ЗА НАЯВНОСТІ ВНУТРІШНІХ ДЖЕРЕЛ ТЕПЛОТИ

В розглянутих раніше задачах внутрішні джерела тепла були відсутні.

Проте у ряді випадків усередині об'єктів дослідження можуть протікати процеси, в результаті яких виділятиметься або поглинатиметься теплота. Прикладами таких процесів можуть бути: виділення джоулевої теплоти при проходженні електричного струму по провідниках; об'ємне виділення теплоти в тепловиділяючих елементах атомних реакторів унаслідок гальмування осколків поділу ядер атомного пального, а також уповільнення потоку нейтронів; виділення або поглинання теплоти при протіканні ряду хімічних реакцій і т.д.

При дослідженні перенесення теплоти в таких випадках важливо знати інтенсивність об'ємного виділення (поглинання) теплоти, яка кількісно характеризується потужністю джерел теплоти q_v, Вт/м^3. Якщо значення q_v – позитивні, то говорять, що в тілі є позитивні джерела теплоти. При негативних значеннях q_v є негативні джерела (стоки) теплоти. Залежно від особливостей зміни величини q_v у просторі можна говорити про точкові, лінійні, поверхневі і об'ємні джерела теплоти.

Для стаціонарного режиму при $\partial t/\partial\tau = 0$ диференціальне рівняння теплопровідності за наявності джерел теплоти має вигляд:

$$\nabla^2 t + \frac{q_v}{\lambda} = 0. \qquad (3.1)$$

3.1. Теплопровідність однорідної пластини

Розглянемо довгу пластину, товщина якої 2δ мала в порівнянні з двома іншими розмірами. Джерела теплоти рівномірно розподілені за об'ємом і дорівнюють q_v = const. Задані коефіцієнти тепловіддачі α і температура рідини за пластиною $t_ж$, причому α = const і $t_ж$ = const. Завдяки однаковим умовам охолодження температури обох поверхонь пластини однакові. За вказаних умов температура пластини змінюватиметься тільки уздовж осі x, направленої нормально до поверхні тіла. Температури на осі пластини і на її поверхні позначимо відповідно через t_0 та t_c (рис. 3.1). Ці температури невідомі. Крім того, необхідно знайти розподіл температури в пластині і кількість теплоти, віддану в навколишнє середовище.

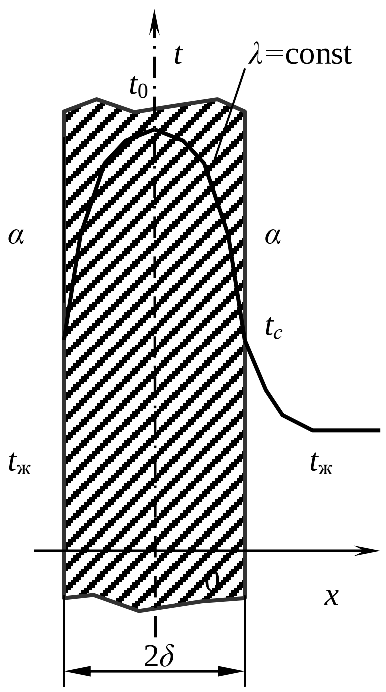


Рис. 3.1. Теплопровідність плоскої пластини за наявності внутрішніх джерел теплоти

Диференціальне рівняння (3.1) у даному випадку спрощується:

$$\frac{d^2t}{dx^2} + \frac{q_v}{\lambda} = 0. \qquad (3.2)$$

Граничні умови:

при $x = \pm\delta$ маємо $\mp\lambda\left(\partial t/\partial x\right)_{x\pm\delta} = \alpha(t_c - t_ж)$.

Оскільки граничні умови для обох сторін пластини однакові, температурне поле усередині пластини повинне бути симетричним щодо площини $x = 0$. Теплота з однаковою інтенсивністю відводиться через ліву і праву поверхні тіла. Однакове і тепловиділення в обох половинах пластини. Це означає, що можна далі розглядати лише одну половину пластини (рис. 3.1), і записати граничні умови для неї у вигляді

$$\left.\begin{aligned} x = 0; &\quad \left(\frac{dt}{dx}\right)_{x=0} = 0; \\ x = \delta; &\quad -\lambda\left(\frac{dt}{dx}\right)_{x=\delta} = \alpha(t_c - t_ж). \end{aligned}\right\} \qquad (3.3)$$

Після інтегрування (3.2) отримаємо:

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{q_v x}{\lambda} + C_1; \qquad (3.4)$$

$$t=-\frac{q_v x^2}{2\lambda}+C_1 x+C_2 . \tag{3.5}$$

Константи інтегрування C_1 та C_2 визначаються з граничних умов (3.3). При $x = 0$ з рівняння (3.4) отримаємо $C_1 = 0$. При $x = \delta$

$$-\lambda\left(\frac{dt}{dx}\right)_{x=\delta}=\alpha(t_c-t_ж).$$

З (3.4) маємо: $\left(\frac{dt}{dx}\right)_{x=\delta}=-\frac{q_v\delta}{\lambda}$. Тоді друга гранична умова набуває вигляду:

$$-\lambda\cdot\left(-\frac{q_v\delta}{\lambda}\right)=\alpha\cdot\left(-\frac{q_v\delta^2}{2\lambda}+C_2-t_ж\right),$$

з якого знаходимо значення другої константи інтегрування:

$$C_2=t_ж+\frac{q_v\delta}{\alpha}+\frac{q_v\delta^2}{2\lambda}.$$

Підставивши значення констант C_1 і C_2 у вираз (3.5), знайдемо рівняння температурного поля:

$$t_x=t_ж+\frac{q_v\delta}{\alpha}+\frac{q_v\delta^2}{2\lambda}\left[1-\left(\frac{x}{\delta}\right)^2\right]. \tag{3.6}$$

З рівняння (3.6) виходить, що температура в плоскій стінці у разі симетричної задачі розподіляється за параболічним законом.

У даній задачі, відповідно до (3.4), тепловий потік змінюється уздовж осі x за рівнянням

$$q=-\lambda\left(\frac{dt}{dx}\right)=q_v x. \tag{3.7}$$

При $x = 0$ і густина теплового потоку $q = 0$ (це випливає з умови: $(dt/dx)_{x=0} = 0$). Тепловий потік з одиниці поверхні пластини при $x = \delta$:

$$q=\alpha(t_c-t_ж)=q_v\delta.$$

і загальна кількість теплоти, віддана всією поверхнею в одиницю часу (вся поверхня F дорівнює двом бічним поверхням F_1):

$$Q=qF=q_v\delta\cdot 2F_1. \tag{3.8}$$

Температура на осі симетрії ($x = 0$) та на поверхні ($x = \delta$)пластини розраховується із залежностей:

$$t_0 = t_ж + \frac{q_v \delta}{\alpha} + \frac{q_v \delta^2}{2\lambda},$$

$$t_c = t_ж + \frac{q_v \delta}{\alpha},$$

а перепад температур між віссю симетрії стінки і її поверхнею

$$t_0 - t_c = \frac{q\delta^2}{2\lambda}. \qquad (3.9)$$

Якщо в рівнянні (3.6) покласти $\alpha \to \infty$, то отриманий вираз являє температурне поле для граничних умов першого роду, бо при $\alpha \to \infty$ отримаємо $t_ж \equiv t_c$. З урахуванням сказаного рівняння (3.6) набуває вигляду:

$$t = t_c + \frac{q_v}{2\lambda}\left(\delta^2 - x^2\right). \qquad (3.10)$$

Дотепер ми вважали, що коефіцієнт теплопровідності матеріалу стінки постійний. При великих перепадах температур може виникнути необхідність в урахуванні залежності коефіцієнта теплопровідності від температури. Часто ця залежність має лінійний характер:

$$\lambda = \lambda_0 (1 + bt),$$

тоді на підставі закону Фурьє та рівняння (3.7) маємо:

$$q_v x = -\lambda_0 (1 + bt) \frac{dt}{dx}.$$

Розділяючи змінні та інтегруючи останнє рівняння, одержуємо:

$$t + b\frac{t^2}{2} = -\frac{1}{\lambda_0}\frac{q_v x^2}{2} + C.$$

При $x = 0$ маємо $t = t_0$. З останнього рівняння виходить:

$$C = t_0 + b\frac{t_0^2}{2}.$$

Підставляючи знайдене значення C і вирішуючи квадратне рівняння щодо t, одержуємо наступне рівняння для розрахунку температурного поля:

$$t = -\frac{1}{b} + \sqrt{\left(t_0 + \frac{1}{b}\right)^2 - \frac{q_v x^2}{\lambda_0 b}}. \qquad (3.11)$$

3.2. Теплопровідність однорідного циліндричного стержня

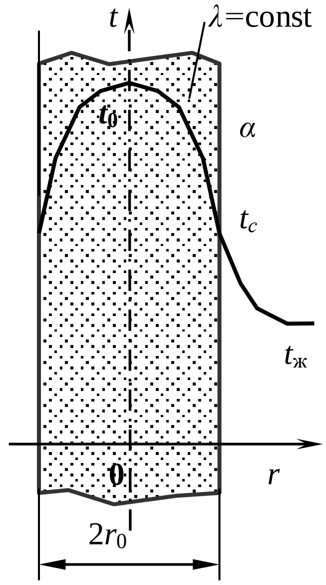


Рис. 3.2. Теплопровідність циліндричного стержня за наявності внутрішніх джерел тепла

Розглянемо круглий циліндр (рис. 3.2), радіус якого малий в порівнянні з довжиною циліндра. За цих умов температура змінюватиметься тільки уздовж радіусу.

Внутрішні джерела теплоти рівномірно розподілені за об'ємом тіла. Задані температура навколишнього середовища $t_ж = \text{const}$ і постійний по всій поверхні коефіцієнт тепловіддачі. За цих умов температура у всіх точках зовнішньої поверхні циліндра буде однакова.

Для циліндра, як і для пластини, задача одномірна і симетрична. Рівняння (3.1) при цьому у циліндричній системі координат має вигляд:

$$\frac{d^2t}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dt}{dr} + \frac{q_v}{\lambda} = 0. \qquad (3.12)$$

Граничні умови:

$$\left.\begin{aligned} r = 0; &\quad \left(\frac{dt}{dr}\right)_{r=0} = 0; \\ r = r_0; &\quad -\lambda\left(\frac{dt}{dr}\right)_{r=r_0} = \alpha(t_c - t_ж) \end{aligned}\right\}. \qquad (3.13)$$

Необхідно знайти рівняння температурного поля і тепловий потік, а також значення температур на осі t_0 і на поверхні t_c.

Проведемо заміну переменнї $dt/dr = u$ у рівняння (3.12). Тоді воно матиме вигляд:

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} + \frac{q_v}{\lambda} = 0,$$

або

$$r\,du + u\,dr + \frac{q_v}{\lambda} r\,dr = 0.$$

Після інтегрування цього рівняння отримаємо:

$$u+\frac{q_v r}{2\lambda}=\frac{C_1}{r},$$

або, повернувшись до старої змінної,

$$\frac{dt}{dr}+\frac{q_v r}{2\lambda}=\frac{C_1}{r}. \qquad (3.14)$$

Після другого інтегрування отримаємо:

$$t=-\frac{q_v r^2}{4\lambda}+C_1\ln r+C_2, \qquad (3.15)$$

де C_1 та C_2 визначаються з граничних умов (3.13).

При $r = 0$ з (3.14) знаходимо, що $C_1 = 0$ та при $r = r_0$ $(dt/dr) = -q_v r_0/(2\lambda)$. Підставивши останній вираз у граничні умови (3.13), одержимо:

$$-\lambda\left(-\frac{q_v r_0}{2\lambda}\right)=\alpha\left(-\frac{q_v r_0^2}{4\lambda}+C_2-t_ж\right),$$

з якого знаходимо C_2:

$$C_2=t_ж+\frac{q_v r_0}{2\alpha}+\frac{q_v r_0^2}{4\lambda}.$$

Підставивши C_1 і C_2 у рівняння (3.15), одержимо:

$$t=t_ж+\frac{q_v r_0}{2\alpha}+\frac{q_v}{4\lambda}(r_0^2-r^2). \qquad (3.16)$$

Отримане рівняння дає можливість обчислити температуру будь-якої точки циліндричного стержня. Воно показує, що розподіл температури в круглому стержні підкорюється параболічному закону.

З рівняння (3.16) при $r = 0$ знайдемо температуру на осі циліндра:

$$t_0=t_ж+\frac{q_v r_0}{2\alpha}+\frac{q_v r_0^2}{4\lambda},$$

та при $r = r_0$ – температуру на поверхні циліндра:

$$t_c=\frac{q_v r_0}{2\alpha}+t_ж.$$

Густина теплового потоку на ізотермічній поверхні циліндра радіуса r

$$q=-\lambda\cdot\left(\frac{dt}{dr}\right)=-\lambda\cdot\left(-\frac{q_v r}{2\lambda}\right)=\frac{q_v r}{2},$$

а на поверхні циліндра відповідно

$$q_c=\frac{q_v r_0}{2}. \qquad (3.17)$$

Повний тепловий потік з поверхні циліндра

$$Q = q_c F = \frac{q_v r_0}{2} 2\pi r_0 l = q_v \pi r_0^2 l \,. \qquad (3.18)$$

З рівняння (3.17) виходить, що густина теплового потоку залежить тільки від продуктивності внутрішніх джерел і від розміру зовнішньої поверхні радіусом r_0, через яку проходить тепловий потік.

Нехай тепер задані граничні умови першого роду, тобто температура поверхні циліндра t_c. Ці умови відповідають окремому випадку попередньої задачі, якщо вважати, що коефіцієнт тепловіддачі $\alpha \to \infty$. При цьому, очевидно, $t_ж \equiv t_c$, тоді рівняння (3.16) прийме вигляд:

$$t = t_c + \frac{q_v r_0^2}{4\lambda}\left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]. \qquad (3.19)$$

Якщо необхідно враховувати залежність коефіцієнта теплопровідності від температури, задану у вигляді $\lambda(t) = \lambda_0(1 + bt)$, то, інтегруючи залежність

$$\frac{q_v r}{2} = -\lambda_0 (1 + bt)\frac{dt}{dr},$$

одержуємо:

$$t + b\frac{t^2}{2} = -\frac{1}{4\lambda_0} q_v r^2 + C\,. \qquad (3.20)$$

Значення константи C визначається з граничних умов. При $r = 0$ маємо $t = t_0$ і $C = t_0 + bt_0^2/2$. Підставляючи це значення в рівняння (3.20) і вирішуючи його щодо t, одержуємо наступну залежність для температурного поля:

$$t = -\frac{1}{b} + \sqrt{\left(t_0 + \frac{1}{b}\right)^2 - \frac{q_v r^2}{2\lambda_0 b}}\,. \qquad (3.21)$$

3.3. Теплопровідність циліндричної стінки

Розглянемо нескінченно довгу циліндричну стінку (трубу) з внутрішнім радіусом r_1 і зовнішнім r_2 і постійним коефіцієнтом теплопровідності λ. Усередині цієї стінки є рівномірно розподілені джерела теплоти продуктивністю q_v.

В такій стінці температура змінюватиметься тільки у напрямі радіусу і процес теплопровідності описуватиметься рівнянням (3.12):

$$\frac{d^2t}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dt}{dr}+\frac{q_v}{\lambda}=0.$$

Інтеграл цього рівняння зображений виразом (3.15):

$$t=-\frac{q_v r^2}{4\lambda}+C_1\ln r+C_2.$$

Константи інтегрування C_1 і C_2 в останньому рівнянні визначаються з граничних умов. Розглянемо випадки, коли поверхнею, яка віддає тепло, є або тільки зовнішня поверхня, або тільки внутрішня, або обидві поверхні одночасно.

Теплота відводиться тільки через зовнішню поверхню труби

Розглядатимемо випадок, коли задані граничні умови третього роду, тобто температура навколишнього середовища з боку зовнішньої поверхні $t_{ж2}$ і постійний коефіцієнт тепловіддачі на зовнішній поверхні труби (рис. 3.3). При цьому граничні умови запишемо таким чином:

$$\left.\begin{aligned} r=r_1;\quad q=0\quad &\Rightarrow\quad \left(\frac{dt}{dr}\right)_{r=r_1}=0;\\ r=r_2;\quad \left(\frac{dt}{dr}\right)_{r=r2}&=-\frac{\alpha}{\lambda}\left(t_{c2}-t_{ж2}\right)\end{aligned}\right\}$$

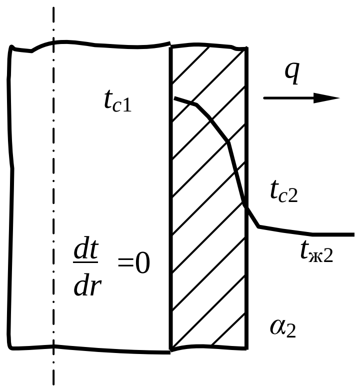


Рис. 3.3. Відведення теплоти через зовнішню поверхню

З рівняння (3.15) одержимо:

$$\frac{dt}{dr}=-\frac{q_v r}{2\lambda}+\frac{C_1}{r}.$$

При $r = r_1 \cdot \left(\frac{dt}{dr}\right)_{r=r_1}=-\frac{q_v r_1}{2\lambda}+\frac{C_1}{r_1}=0$, звідки

$$C_1=\frac{q_v r_1^2}{2\lambda}.$$

При $r = r_2$, з рівняння (3.15) з урахуванням знайденого виразу для C_1 отримаємо:

$$t_{c2}=-\frac{q_v r_2^2}{4\lambda}+\frac{q_v r_1^2}{2\lambda}\ln r_2+C_2.$$

З другої граничнї умови (на зовнішній поверхні)

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)_{r=r_2}=-\frac{\alpha}{\lambda}(t_{c2}-t_{ж2}),$$

або після підстановки градієнта темперетури та температури на зовнішній поверхні маємо:

$$-\frac{q_v r_2}{2\lambda}+\frac{C_1}{r_2}=-\frac{\alpha}{\lambda}\left(-\frac{q_v r_2^2}{4\lambda}+\frac{q_v r_1^2}{2\lambda}\ln r_2+C_2-t_{ж2}\right),$$

з якого знаходимо другу константу інтегрування:

$$C_2=t_{ж2}+\frac{q_v r_2}{2\alpha}+\frac{q_v r_2^2}{4\lambda}-\frac{q_v r_1^2}{2\alpha r_2}-\frac{q_v r_1^2}{2\lambda}\ln r_2 .$$

Підставляючи знайдені значення C_1 і C_2 у рівняння (3.15), отримаємо вираз для температурного поля:

$$t=t_{ж2}+\frac{q_v r_2}{2\alpha}\left[1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right]+\frac{q_v r_2^2}{4\lambda}\left[1+\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 2\ln\left(\frac{r}{r_2}\right)-\left(\frac{r}{r_2}\right)^2\right]. \quad (3.22)$$

Температуру на внутрішній поверхні труби знайдемо з рівняння (3.22) при підстановці в нього значення $r = r_1$:

$$t_{c1}=t_{ж2}+\frac{q_v r_2}{2\alpha}\left[1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right]+\frac{q_v r_2^2}{4\lambda}\left[1+\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 2\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right]. \quad (3.23)$$

Для зовнішньої поверхні, яка віддає тепло (при $r= r_2$):

$$t_{c2}=t_{ж2}+\frac{q_v r_2}{2\alpha}\left[1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right]. \quad (3.24)$$

Густина теплового потоку на поверхні, яка віддає тепло:

$$q=\alpha(t_{c2}-t_{ж2})=\frac{q_v r_2}{2}\left[1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right]. \quad (3.24)$$

Нехай тепер задані граничні умови першого роду, тобто температура поверхні, що віддає тепло, t_{c2}. Ці умови можна розглядати як окремий випадок даної задачі, коли коефіцієнт тепловіддачі на поверхні достатньо великий ($\alpha \to \infty$). Тоді температура рідини буде рівна температурі поверхні труби. З урахуванням сказаного рівняння (3.22) приймає вигляд:

$$t=t_{c2}+\frac{q_v r_2^2}{4\lambda}\left[1+\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 2\ln\left(\frac{r}{r_2}\right)-\left(\frac{r}{r_2}\right)^2\right]. \quad (3.26)$$

Вважаючи в цьому рівнянні $r = r_1$ та $t = t_{c1}$, знаходимо падіння температури в стінці:

$$t_{c1}-t_{c2}=\frac{q_v r_2^2}{4\lambda}\left[1+\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 2\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right]=\frac{q_v r_1^2}{4\lambda}\left[\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2-2\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)-1\right]. \quad (3.27)$$

Теплота відводиться тільки через внутрішню поверхню труби

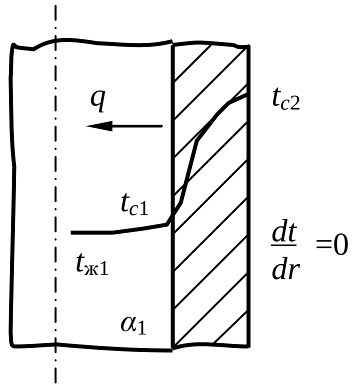


Рис. 3.4. Відведення теплоти через внутрішню поверхню

При заданих коефіцієнті тепловіддачі α на внутрішній поверхні і температурі середовища $t_{ж1}$ граничні умови запишуться так:

$$\left.\begin{aligned} r=r_1; \quad & \left(\frac{dt}{dr}\right)_{r=r_1}=+\frac{\alpha}{\lambda}(t_{c1}-t_{ж1})\,; \\ r=r_2; \quad & \left(\frac{dt}{dr}\right)_{r=r_2}=0. \end{aligned}\right\}$$

Аналогічно попередньому випадку з цих рівнянь визначаються константи C_1 і C_2, після підстановки яких в рівняння (3.15) отримаємо:

$$t=t_{ж1}+\frac{q_v r_1}{2\alpha}\left[\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2-1\right]+\frac{q_v r_2^2}{4\lambda}\left[2\ln\left(\frac{r}{r_1}\right)+\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2-\left(\frac{r}{r_2}\right)^2\right]. \quad (3.28)$$

Перепад температур між середовищем і поверхнею, яка віддає тепло, отримаємо, якщо в рівняння (3.28) підставимо значення поточної координати, рівне r_1, тоді

$$t_{c1}-t_{ж1}=+\frac{q_v r_1}{2\alpha}\left[\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2-1\right]. \quad (3.29)$$

Коли задана температура поверхні, яка віддає тепло t_{c1} ($\alpha\to\infty$), рівняння (3.28) набуває вигляду

$$t=t_{c1}+\frac{q_v r_2^2}{4\lambda}\left[2\ln\left(\frac{r}{r_1}\right)+\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2-\left(\frac{r}{r_2}\right)^2\right]. \quad (3.30)$$

Вважаючи в цьому рівнянні $r = r_2$, а $t = t_{c2}$, одержуємо повний температурний напір у стінці:

$$t_{c2}-t_{c1}=\frac{q_v r_2^2}{4\lambda}\left[2\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)+\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2-1\right]. \quad (3.31)$$

Теплота відводиться через внутрішню і зовнішню поверхні

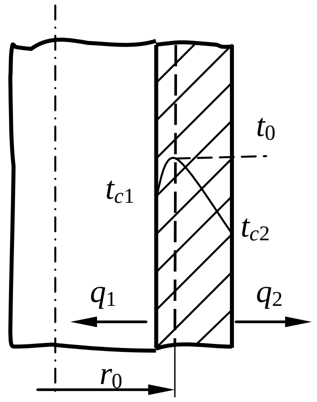


Рис. 3.5. Відведення теплоти через обидві поверхні

Якщо теплота віддається навколишньому середовищу з обох поверхонь, повинен існувати максимум температури усередині стінки. Ізотермічна поверхня, яка відповідає максимальній температурі t_0, розділяє циліндричну стінку на два шари. У внутрішньому шарі теплота передається в середину труби, у зовнішньому – назовні. Максимальне значення температури відповідає умові $dt/dr = 0$, і отже, $q = 0$.

Таким чином, для вирішення даної задачі можна використовувати вже отримані вище співвідношення. Для цього потрібно знати радіус r_0 (рис. 3.5), який відповідає максимальній температурі t_0.

Згідно з рівнянням (3.27) і (3.31) максимальні перепади температур в зовнішньому і внутрішньому шарах визначаються рівняннями:

$$t_0 - t_{c2} = \frac{q_v r_0^2}{4\lambda}\left[\left(\frac{r_2}{r_0}\right)^2 - 2\ln\left(\frac{r_2}{r_0}\right) - 1\right]; \tag{3.32}$$

$$t_0 - t_{c1} = \frac{q_v r_0^2}{4\lambda}\left[2\ln\left(\frac{r_0}{r_1}\right) + \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2 - 1\right]. \tag{3.33}$$

Віднімаючи відповідно ліві і праві частини двох останніх рівнянь, одержуємо:

$$t_{c1} - t_{c2} = \frac{q_v r_0^2}{4\lambda}\left[\left(\frac{r_2}{r_0}\right)^2 - \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2 + 2\ln\left(\frac{r_0}{r_2}\right) - 2\ln\left(\frac{r_0}{r_1}\right)\right] = \frac{q_v}{4\lambda}\left[r_2^2 - r_1^2 - 2r_0^2\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)\right].$$

Рішення цього рівняння відносно r_0 дає вираз для розрахунку координати максимума температури:

$$r_0^2 = \frac{q_v(r_2^2 - r_1^2) - 4\lambda(t_{c1} - t_{c2})}{q_v 2\ln\dfrac{r_2}{r_1}}. \tag{3.34}$$

Підставивши обчислене з рівняння (3.34) значення r_0 у вирази (3.32) і (3.33), знайдемо максимальну температуру в даній стінці.

Для знаходження розподілу температури у внутрішньому шарі в рівняння (3.30) підставляються значення поточної координати $r_1 < r < r_0$, а для знаходження розподілу температури в зовнішньому шарі в рівняння (3.26) підставляються значення $r_0 < r < r_2$.

Якщо температури зовнішніх поверхонь циліндричної стінки t_{c1} і t_{c2} рівні, то рівняння (3.34) спрощується. В цьому випадку

$$r_0^2 = \frac{(r_2^2 - r_1^2)}{2\ln\dfrac{r_2}{r_1}}, \tag{3.34'}$$

тобто значення r_0 залежить тільки від розмірів стінки і не залежить від теплових умов.

Якщо відомі температури рідин $t_{ж1}$ і $t_{ж2}$ всередині і зовні труби і коефіцієнти тепловіддачі α_1 і α_2, то для визначення r_0 до рівняння (3.34) необхідно додати рівняння

$$\left.\begin{aligned} q_{l1} &= \alpha_1(t_{c1} - t_{ж1})2\pi r_1; \\ q_{l2} &= \alpha_2(t_{c2} - t_{ж2})2\pi r_{2,} \end{aligned}\right\}, \tag{3.35}$$

де $\quad q_{l1} = q_v\pi(r_0^2 - r_1^2); \quad q_{l2} = q_v\pi(r_2^2 - r_0^2)$.

Для визначення r_0 потрібно вирішувати рівняння (3.35) спільно з рівнянням (3.34).

ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1. Плоска стінка завтовшки $2\delta = 0{,}1$ м з постійним коефіцієнтом теплопровідності $\lambda = 15$ Вт/(м·К) знаходиться в середовищі з постійною температурою $t_ж = 20\ {}^oC$. В стінці рівномірно розподілені джерела тепла з інтенсивністю $q_v = 9000$ Вт/м^3. Знайти значення максимальної температури в стінці, якщо коефіцієнт теплообміну з навколишнім середовищем $\alpha = 10$ Вт/(м^2·К).

Розв’язання. Температурне поле довгої пластини, обидві поверхні якої охолоджуються рідиною з постійною температурою (граничні умови 3-го роду), разраховуються відповідно до рівняння (3.6):

$$t = t_ж + \frac{q_v\delta}{\alpha} + \frac{q_v\delta^2}{2\lambda}\left[1 - \left(\frac{x}{\delta}\right)^2\right].$$

Задача симетрична, температура в стінці розподіляється за параболічним законом, тобто максимальна температура буде на осі пластини при $x = 0$:

$$t_{\max} = t_ж + \frac{q_v \delta}{\alpha} + \frac{q_v \delta^2}{2\lambda} = 20 + \frac{9000 \cdot 0,005}{10} + \frac{9000 \cdot 0,005^2}{2 \cdot 15} = 65,75\ ^{\circ}\mathrm{C}.$$

Відповідь: Максимальна температура в стінці $t_{\max}$ = 65,75 $^{\circ}$C.

Приклад 2. Який діаметр повинен мати алюмінієвий провідник у гумовій ізоляції товщиною δ = 1 мм, щоб максимальна температура провідника (в середині) не перевищувала 70 $^{\circ}$C при протіканні струму 30 А? Провідник знаходиться у повітрі з температурою 20 $^{\circ}$C. Коефіцієнт теплообміну між повітрям та поверхнею ізоляції провідника 15 Вт/(м^2·К).

Розв'язання. Використовуючи справочник з теплофізичних якостей речовин, знаходимо коефіцієнти теплопровідності:

- алюмінію λ_1 = 204 Вт/(м·К),
- резини λ_2 = 0,16 Вт/(м·К),

а також питомий опір алюмінію: ρ = 2,9·10^{-8} Ом·м.

Зовнішній діаметр та радіус ізоляції:

$$d_2 = d_1 + 2\delta, \qquad r_2 = r_1 + \delta.$$

Відповідно до закону Ленца – Джоуля при протіканні електричного струму по провіднику довжиною l радіусом r_1 виділяється потужність, яка розраховується за формулою

$$Q = I^2 \rho \frac{l}{\pi r_1^2}.$$

Об'ємна потужність внутрішніх джерел тепла:

$$q_v = \frac{Q}{V} = \left. \frac{I^2 \rho l}{\pi r_1^2} \middle/ \pi r_1^2 l \right. = \frac{I^2 \rho}{\pi^2 r_1^4}. \qquad (1)$$

Лінійна густина теплового потоку на поверхні провідника, на поверхні ізоляції та на будь-який ізотермічній поверхні системи, яка розглядається (з умови стаціонарності задачі):

$$q_l = \frac{Q}{l} = I^2 \rho \frac{1}{\pi r_1^2}. \qquad (2)$$

Для розрахунку температур провідника з током застосовуємо формули для стержня з внутрішніми джерелами тепла з граничними умовами 1-го роду:

$$t_{c1} = t_0 + \frac{q_v r_1^2}{4\lambda_1} = t_0 - \frac{I^2 \rho}{4\lambda_1 \pi^2 r_1^2}. \tag{3}$$

Для розрахунку лінійної густини теплового потоку в ізоляції застосовуємо формули для циліндричної стінки без джерел тепла з граничними умовами 2-го роду на внутрішній поверхні та 3-го роду на зовнішній поверхні:

$$q_l = \frac{\pi(t_{c1} - t_ж)}{\frac{1}{2\lambda_2}\ln\frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha d_2}} = \frac{\pi(t_{c1} - t_ж)}{\frac{1}{2\lambda_2}\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\alpha \cdot 2r_2}}. \tag{4}$$

Розвязуючи систему рівнянь (1)–(4), отримаємо значення радіуса (діаметра) провідника.

Ця задача може бути розв’язана аналітично, но набагато простіше це зробити застосувавши компютерні програми, зокрема пакет MathCAD. Приклад розв’язання задачі за допомогою цього пакету наведено далі.

Дано:

$t_0 := 70$ $\quad$ $t_g := 20$ $\quad$ $\alpha := 15$

$\delta := 0.001$ $\quad$ $I := 30$

$\lambda_1 := 204$ $\quad$ $\lambda_2 := 0.16$ $\quad$ $\rho := 2.9 \cdot 10^{-8}$

Початкові наближення:

$r_1 := 0.001$ $\quad$ $q_v := 1000$ $\quad$ $q_l := 1000$ $\quad$ $t_{c1} := 69$

Given

$$q_V = \frac{I^2 \rho}{\pi^2 \cdot r_1^{\,4}}$$

$$q_l = \frac{I^2 \rho}{\pi \cdot r_1^{\,2}}$$

$$t_{c1} = t_0 - \frac{q_V \cdot r_1^{\,2}}{4 \cdot \lambda_1}$$

$$q_l = \frac{\pi \cdot (t_{c1} - t_g)}{\frac{1}{2\lambda_2} \cdot \ln\left(\frac{r_1 + \delta}{r_1}\right) + \frac{1}{\alpha \cdot (r_1 + \delta)}}$$

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ q_V \\ q_l \\ t_{c1} \end{pmatrix} := \mathrm{Find}(r_1, q_V, q_l, t_{c1}) \qquad \begin{pmatrix} r_1 \\ q_V \\ q_l \\ t_{c1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.281 \times 10^{-3} \\ 9.818 \times 10^{5} \\ 5.062 \\ 69.998 \end{pmatrix}$$

Приклад 3. Зовнішня цегляна стіна будівлі має товщину 0,5 м. Коефіцієнт теплопровідності цегляної кладки 0,8 Вт/(м·к). Температура усередині будівлі 20 °С, а зовні –10 °С. Коефіцієнти теплообміну 10 і 50 Вт/(м^2·К) відповідно. Усередині стінки діють джерела тепла з об'ємною щільністю 1000 Вт/м^3.

Побудувати графік температурного поля для стіни. Визначити:

1) координату і значення максимальної температури в стіні;

2) температуру і густину теплового потоку на внутрішній і зовнішній поверхнях стіни.

Розв’язання. Розглядається плоска нескінченна стінка з внутрішніми джерелами теплоти з різними (несиметричними) граничними умовами 3-го роду. Для вирішення такої задачі потрібно знайти положення екстремума (максимума) температури, розв’язуючи нелінійне рівняння відносно координати максимума. Це рівняння прирівнює значення максимальної температури при розгяданні лівої та правої частин пластини. Після знаходження координати максимума температури знаходимо температури максимальну та на границях, а також густини теплових потоків на границях. Також будується графік температурного поля пластини.

Розв’язання цієї задачі в математичному пакети MathCAD наведено нижче.

Дано:

$T_1 := 20 \qquad T_2 := -10 \qquad \alpha_1 := 10 \qquad \alpha_2 := 50$

$\delta := 0.5 \qquad \lambda := 0.8 \qquad q_V := 10^3$

Визначення координати з максимальною температурою:

Начальне наближення: $x_0 := -0.1$

Given

$$T_1 + \frac{q_V \cdot x_0}{\alpha_1} + \frac{q_V \cdot x_0^{\,2}}{2\lambda} = T_2 + \frac{q_V \cdot (\delta - x_0)}{\alpha_2} + \frac{q_V \cdot (\delta - x_0)^2}{2\lambda}$$

$x_0(q_V) := \mathrm{Find}(x_0) \qquad\qquad x_0(q_V) = 0.183$

Температурне поле лівої, відносно максимума температури, частини пластини:

$$T_1(q_V, x) := T_1 + \frac{q_V \cdot x_0(q_V)}{\alpha_1} + \frac{q_V \cdot (x_0(q_V))^2}{2\lambda} \cdot \left[1 - \left(\frac{x}{x_0(q_V)}\right)^2\right]$$

Температурне поле правої, відносно максимума температури, частини пластини:

$$T_2(q_V, x) := T_2 + \frac{q_V \cdot (\delta - x_0(q_V))}{\alpha_2} + \frac{q_V \cdot (\delta - x_0(q_V))^2}{2\lambda} \cdot \left[1 - \left(\frac{x}{\delta - x_0(q_V)}\right)^2\right]$$

Густина теплового потока для лівій частини пластини:

$q_1(q_V, x) := -\lambda \cdot \left(\frac{d}{dx} T_1(q_V, x)\right) \qquad\qquad q_1(q_V, x_0(q_V)) = 182.886$

Густина теплового потока для правій частини пластини:

$q_2(q_V, x) := -\lambda \cdot \left(\frac{d}{dx} T_2(q_V, x)\right) \qquad\qquad q_2(q_V, \delta - x_0(q_V)) = 317.114$

Максимальне значення температури:

$$T_{1\_max}(q_V) := T_1(q_V, 0) \qquad T_{1\_max}(q_V) = 59.193$$

$$T_{2\_max}(q_V) := T_2(q_V, 0) \qquad T_{2\_max}(q_V) = 59.193$$

Температура на лівій границі пластини:

$$T_{c1}(q_V) := T_1(q_V, x_0(q_V)) \qquad T_{c1}(q_V) = 38.289$$

Температура на правій границі пластини:

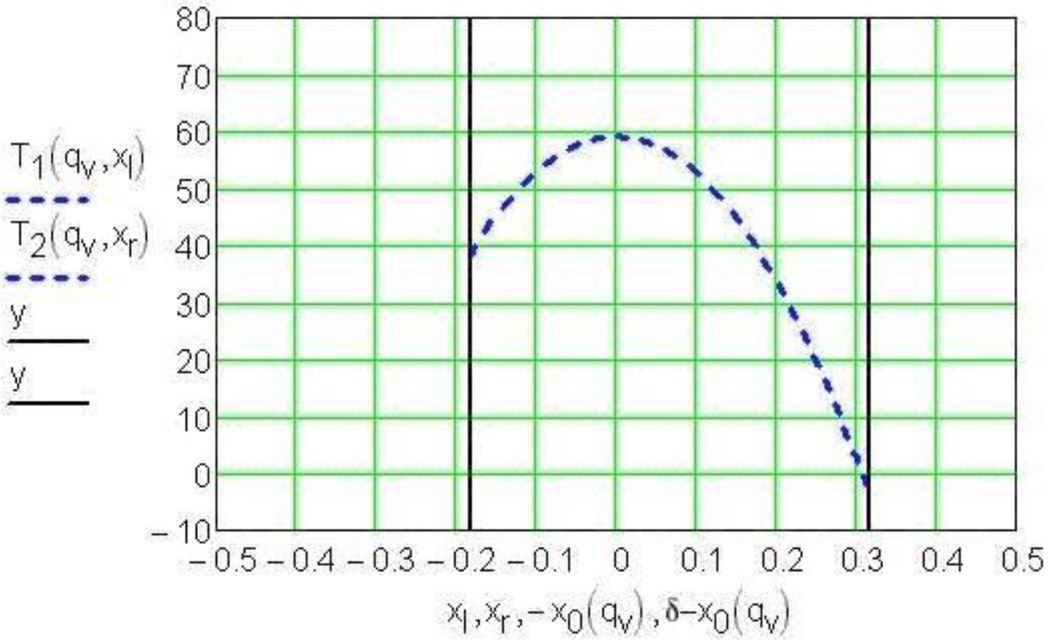
$$T_{c2}(q_V) := T_2(q_V, \delta - x_0(q_V)) \qquad T_{c2}(q_V) = -3.658$$

Температурне поле:

$$x_l := -x_0(q_V), -0.95 \cdot x_0(q_V) .. 0$$

$$x_r := 0, 0.05 \cdot (\delta - x_0(q_V)) .. \delta - x_0(q_V)$$

$$y := -200, -100 .. 1000$$



КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ТА ЗАДАЧІ

1. Вивести рівняння температурного поля однорідної нескінченної пластини при наявності внутрішніх джерел теплоти.

2. Як змінюється густина теплового потоку в нескінченній пластині з внутрішнім тепловиділенням по координаті? Яких значень вона набуває на поверхнях?

3. Температурнне поле однорідної нескінченної пластини при наявності внутрішніх джерел теплоти при залежності коефіцієнту теплопроводності від температури.

4. Вивести рівняння температурного поля однорідного нескінченного циліндричного стержня при наявності внутрішніх джерел теплоти.

5. Як змінюється густина теплового потоку в нескінченному циліндричному стержні з внутрішнім тепловиділенням по координаті? Яких значень вона набуває на поверхні?

6. Температурнне поле однорідного нескінченного циліндричного стержня при наявності внутрішніх джерел теплоти при залежності коефіцієнту теплопроводності від температури.

7. Розподіл температури в однорідній циліндричній стінці при відведенні теплоти тільки через зовнішню поверхню труби.

8. Розподіл температури в однорідній циліндричній стінці при відведенні теплоти тільки через внутрішню поверхню труби.

9. Розподіл температури в однорідній циліндричній стінці при відведенні теплоти через внутрішню і зовнішню поверхні труби.

10. Як змінюється густина теплового потоку в нескінченній циліндричній стінці з внутрішнім тепловиділенням по координаті? Яких значень вона набуває на поверхнях?

11. Довгий суцільний циліндр радіусом r_0 має постійний коефіцієнт теплопровідності λ. Інтенсивність внутрішніх джерел змінюється за законом $q_v = c \cdot r$, де $c = \text{const}$. Поверхня циліндра має постійну температуру T_c. Знайти рівняння температурного поля та густину теплового потоку на поверхні.

12. Плоска стінка завтовшки $\delta = 0{,}1$ м з постійним коефіцієнтом теплопровідності $\lambda = 15$ Вт/(м·К) знаходиться в середовищі з постійною температурою $T_ж = 20$ °С. В стінці рівномірно розподілені джерела тепла з інтенсивністю $q_v = 9000$ Вт/м^3. Знайти значення максимальної температури в стінці, якщо коефіцієнт теплообміну з навколишнім середовищем $\alpha = 10$ Вт/(м^2·К).

13. На поверхнях нескінченної циліндричної стінки з геометричними розмірами $d_1/d_2 = 20/40$ мм виділяється тепло за рахунок внутрішніх джерел тепла з постійною об'ємною потужністю. Лінійна густина теплового потоку з

внутрішньої сторони стінки в два рази менше ніж із зовнішньої сторони. Визначити діаметр з максимальною температурою.

14. Пластина з рівномірно розподіленими внутрішніми джерелами теплоти q_v, Вт/м^3, омивається з двох боків рідиною. Товщина пластини s, м, коефіцієнт теплопровідності її матеріалу λ, Вт/(м·К). Температура рідини з боку однієї з поверхонь дорівнює $t_{ж1}$, К і коефіцієнт тепловіддачі від цієї поверхні до рідини дорівнює α_1, Вт/(м^2·К).Визначити значення температури рідини з боку іншої поверхні $t_{ж2}$, при якій тепловий потік через цю поверхню буде рівний нулю ($q_{c2} = 0$).

15. Визначити значення t_0 і координату x_0 максимальної температури в пластині з рівномірно розподіленими внутрішніми джерелами теплоти $q_v = 8 \cdot 10^6$ Вт/м^3. Товщина пластини $s = 10$ мм, коефіцієнт теплопровідності матеріалу пластини $\lambda = 20$ Вт/(м·К). Температури на поверхнях пластини рівні відповідно $t_{c1} = 80$ ºС і $t_{c2} = 86$ ºС.

16. Тепловиділяючий елемент ядерного реактора виконаний з суміші карбіду урану і графіту у вигляді циліндричного стержня діаметром $d = 12$ мм. Об'ємна продуктивність джерел теплоти $q_v = 3{,}88 \cdot 10^8$ Вт/м^3. Джерела можна вважати рівномірно розподіленими за об'ємом. Теплопровідність матеріалу стержня $\lambda = 58$ Вт/(м·К). Визначити температуру і густину теплового потоку на поверхні тепловиділяючого елемента, якщо його максимальна температура (на осі) не повинна перевищувати 2000 ºС.

17. Плоска стінка завтовшки δ має постійний коефіцієнт теплопровідності λ. Температура поверхонь $T(0) = T_{c1}$ та $T(\delta) = T_{c2}$. Інтенсивність внутрішнього тепловиділення змінюється за законом $q_v = C \cdot \cos\left(\dfrac{\pi x}{2\delta}\right)$, де C – константа. Знайти рівняння температурного поля, координати площини з максимальною температурою та максимальну температуру, густину теплового потоку на поверхнях.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ

1. Лыков А.В. Теория теплопроводности / А.В. Лыков.– М.: Высш. шк., 1967.

2. Тепло- и массообмен : справочник / под ред. В.А. Григорьева.– М.: Энергоиздат, 1982.

3. Исаченко В.П. Теплопередача / В.П. Исаченко, В.А. Осипов, А.С. Сукомел.– М.: Энергия, 1975.

4. Теоретические основы хладотехники. Тепломассообмен / С.Н. Богданов, Н.А. Бучко, Э.Й. Гуйго и др.; под ред. Э.Й. Гуйго.– М.: Агропромиздат, 1986.

5. Кутателадзе С.С. Теплопередача и гидродинамическое сопротивление. Справочное пособие.– М.: Энергоатомиздат, 1990.

6. Михеев М.А., Михеева И.М. Основы теплопередачи.– М.: Энергия, 1973.

7. Крэйт Ф., Блэк У. Основы теплопередачи.– М.: Мир, 1983.

ЗМІСТ