

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

**НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
"ХАРЬКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ"**

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

**к выполнению индивидуального расчетного задания
по дисциплине «Тепломассообмен»
с применением пакета MathCAD
для студентов специальности
8.090507 «Криогенная техника и технология»**

Утверждено
редакционно–издательским
советом НТУ «ХПИ»
протокол № 2 от 21.06.2007

Харьков НТУ «ХПИ» 2007

Методичні вказівки до виконання індивідуального розрахункового завдання по дисципліні «Тепломасообмін» з використанням пакета MathCAD для студентів спеціальності 8.090507 «Кріогенна техніка і технологія» / Укл. С.В. Юшко, О.Є. Борщ., М.А. Юшко— Харків: НТУ «ХПІ», 2007.— 52 с.

Укладачі: С.В. Юшко

О.Є. Борщ

М.А. Юшко

Рецензент: М.С. Степанов

Кафедра «Технічна кріофізика»

ВСТУПЛЕНИЕ

Появление в середине XX века компьютеров вызвало огромные изменения в теории и практике инженерных расчетов и математического моделирования технических устройств. Стало возможным в ограниченные сроки проводить сложные расчеты, основанные на методах численной математики, варианты инженерных расчетов, позволяющие осуществлять оптимизацию технических устройств.

Однако в выполнении компьютерных расчетов оставалось узкое место — инженеру требовалось либо самому становиться еще и программистом (знать хотя бы один язык программирования), либо привлекать к работе профессионального математика-программиста, который обычно не являлся специалистом в данной области знаний. Эта проблема снижала скорость и качество реализации проекта.

Решением проблемы было либо всеобщее освоение технологий программирования каждым инженером и научным работником, либо создание систем (пакетов) программирования, максимально приближенных по виду записей математических выражений операторов к сложившемуся в математике стилю, либо в некоторой разумной комбинации первых двух путей.

Появление персонального компьютера с его максимально упрощенным интерфейсом, а затем целого ряда математических пакетов, рассчитанных на пользователя, не являющегося профессиональным программистом, позволило отказаться от требования освоения каждым инженером не только своей специальности, но и технологий программирования. Однако чтобы проводить расчеты, нужно знать, что и как считать. А это требует не только знаний технической проблемы, но и основ численной математики, а также способов их реализации в выбранном математическом пакете.

В данных методических указаниях рассматриваются типичные задачи, которые возникают при проведении инженерных теплофизических расчетов, а также методы их решения для математического пакета MathCAD.

1. ОСНОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ И ИХ РЕШЕНИЕ В ПАКЕТЕ MATHCAD

1.1. Нахождение корня уравнения

Необходимость решить уравнение возникает практически во всех задачах теплообмена. Для линейных и квадратных уравнений это не представляет сложности. Однако для уравнений более высоких степеней или трансцендентных уравнений аналитического решения, как известно, не существует. Для решения подобных уравнений разработаны приближенные численные методы (половинного деления, Ньютона и т.д.) с заданной точностью нахождения решения. В пакете MathCAD существует ряд встроенных функций, которые ищут корень уравнения численным методом:

- **polyroots(V)** — вектор, элементы которого являются корнями многочлена степени n . Коэффициенты многочлена находятся в векторе V , имеющем длину равную $n + 1$. Элементы расположены по возрастанию степени.
- **root(f(x),x)** — значение переменной x (в пределах точности, заданной в системной переменной TOL), при котором $f(x) = 0$. Функция требует предварительного задания первого приближения для значения корня.
- **root(f(x),x,a,b)** — значение переменной x (в пределах точности, заданной в системной переменной TOL), при котором $f(x) = 0$ на интервале изоляции корня $[a, b]$.

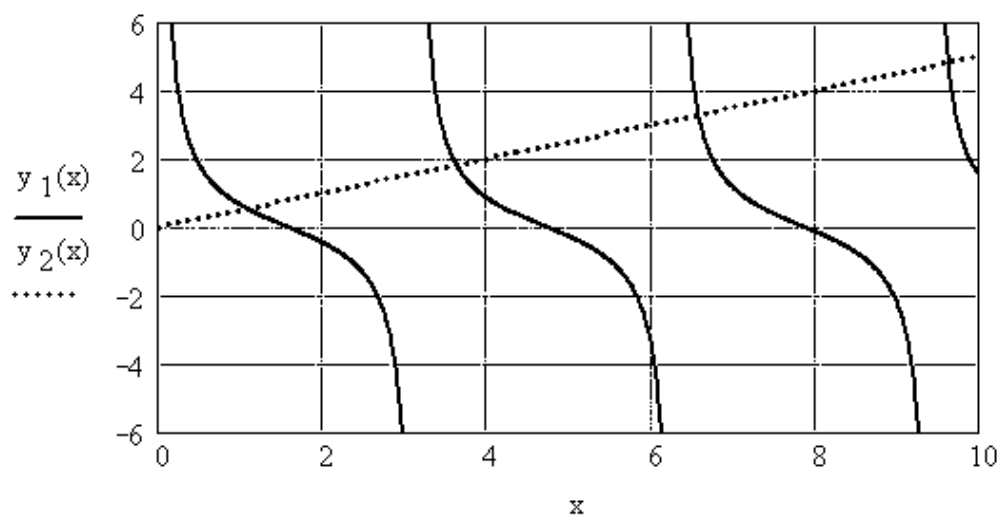


Рис. 1.1 — Графическое определение корней уравнения

В качестве примера рассмотрим задачу определения корней уравнения $\operatorname{ctg} x = x/B_i$ при расчете нестационарного температурного поля плоской бесконечной пластины. Если обозначить $y_1 = \operatorname{ctg} x$ и $y_2 = x/B_i$, то решениями являются точки пересечения графиков (рис. 1.1). Как видно из графика, корней бесконечно много. В зависимости от величины начального приближения (для функции $\operatorname{root}(f(x),x)$) или границ интервала изоляции корня (для функции $\operatorname{root}(f(x),x,a,b)$) будет найден какой-либо один корень. Для нахождения ряда корней, необходимо менять начальное приближение или границы интервала изоляции. Это можно реализовать, например, с помощью индексированной переменной или программного блока. Фрагмент программы для определения корней уравнения в пакете MathCAD приведен ниже.

$$B_i := 2$$

$$f(x) := \operatorname{cot}(x) - \frac{x}{B_i}$$

$$i := 0..7$$

$$\mu_i := \operatorname{root}[f(x), x, i \cdot \pi + 0.001, (i + 1) \cdot \pi - 0.001]$$

$$\mu^T = (1.077 \quad 3.644 \quad 6.578 \quad 9.63 \quad 12.722 \quad 15.834 \quad 18.955 \quad 22.081)$$

1.2. Решение системы уравнений

Для решения системы линейных уравнений разработан целый ряд методов, которые подразделяются на две группы. К первой группе относятся точные или прямые методы — алгоритмы позволяющие получить решение за конечное число арифметических действий. Это метод обращения матриц, метод Крамера нахождения решения с помощью определителей, метод Гаусса и метод прогонки. Вторую группу составляют приближенные методы, в частности итерационные методы. Правило Крамера в компьютерных программах не применяют, т. к. оно требует значительно большего числа арифметических действий, чем метод Гаусса. Метод Гаусса используется при числе уравнений в системе до порядка 10^3 , а итерационные методы — до порядка 10^6 . Метод прогонки используют для решения важного класса специальных линейных систем с трехдиагональной матрицей.

При решении систем нелинейных уравнений применяются только приближенные итерационные методы.

В пакете MathCAD есть встроенные функции, позволяющие решать соответствующие задачи. Для решения систем линейных уравнений вида $A \cdot X = B$ применяют функции:

- A^{-1} — матрица обратная данной. Решением является вектор $X = A^{-1} \cdot B$;
- **Isolve(A,B)** — вектор X , являющийся решением системы линейных уравнений вида $A \cdot X = B$.

Примеры решения системы линейных уравнений в пакете MathCAD представлены ниже.

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица коэффициентов системы линейных уравнений

$$B := \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$X1 := A^{-1} \cdot B$$

$$X1 = \begin{array}{|c|c|} \hline & 0 \\ \hline 0 & 4 \\ \hline 1 & 5 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Решение системы обращением матрицы

$$X2 := \text{Isolve}(A, B)$$

$$X2 = \begin{array}{|c|c|} \hline & 0 \\ \hline 0 & 4 \\ \hline 1 & 5 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Решение с применением функции Isolve

Для решения систем нелинейных уравнений используют специальный вычислительный блок, открываемый директивой Given и имеющий следующую структуру:

1. Начальные приближения для неизвестных (задаются обычным присваиванием);
2. Директива Given;
3. Уравнения системы (в уравнениях левая и правая части приравняются с помощью жирного знака равенства из Toolbars Boolean);
4. Ограничительные условия (задаются, если необходимо, в виде неравенств или равенств, которые должны удовлетворяться при решении системы);

5. Выражение с функциями **Find**, **Minerr**.

Так как решение системы ищется приближенными методами, рекомендуется осуществлять проверку найденного решения.

Для решения системы нелинейных уравнений используется одна из следующих двух функций:

- **Find**(x_1, x_2, \dots) — вектор с элементами x_1, x_2, \dots , доставляющими решение системе уравнений (как линейной, так и нелинейной);
- **Minerr**(x_1, x_2, \dots) — вектор с элементами x_1, x_2, \dots , которые приводят к минимальной ошибке в системе уравнений.

Ниже приведено решение задачи стационарной теплопроводности для бесконечной плоской двухслойной стенки с граничными условиями 1-го рода. Коэффициент теплопроводности одного из слоев зависит от температуры.

$$\begin{aligned} \delta_1 &:= 0.125 & T_{c3} &:= 50 \\ \delta_2 &:= 0.500 & \lambda_1(T) &:= 0.28 + 0.00023 \cdot T \\ T_{c1} &:= 1100 & \lambda_2 &:= 0.7 \end{aligned}$$

$$q := 1000 \quad T_{c2} := 800$$

Given

$$q = \frac{\lambda_1(T_{c1}) + \lambda_1(T_{c2})}{2 \cdot \delta_1} \cdot (T_{c1} - T_{c2})$$

$$q = \frac{\lambda_2}{\delta_2} \cdot (T_{c2} - T_{c3})$$

$$\begin{pmatrix} q \\ T_{c2} \end{pmatrix} := \text{Find}(q, T_{c2})$$

$$q = 1.09 \times 10^3 \quad T_{c2} = 828.492$$

Проверка решения:

$$\frac{\lambda_1(T_{c1}) + \lambda_1(T_{c2})}{2 \cdot \delta_1} \cdot (T_{c1} - T_{c2}) = 1.09 \times 10^3$$

$$\frac{\lambda_2}{\delta_2} \cdot (T_{c2} - T_{c3}) = 1.09 \times 10^3$$

1.3. Интегрирование и дифференцирование

Для проведения операций интегрирования и дифференцирования в пакете MathCAD осуществляется применением соответствующих символов.

Если по каким-либо причинам выполнение этих операций невозможно, то интеграл приближенно может быть вычислен как интегральная сумма, записанная в каком-либо виде (метод прямоугольников, метод трапеций и т. д.). Производная может находиться в соответствии с определением, как предел приращения функции к приращению аргумента, при стремлении приращения аргумента к нулю. Операции суммирования и вычисления пределов также являются встроенными функциями MathCAD'a.

Необходимо заметить, что в пакете MathCAD предоставлена возможность находить интегралы (неопределенные и определенные) и производные в символьном виде в режиме символьных преобразований.

Пример выполнения операций интегрирования и дифференцирования в пакете MathCAD представлен ниже.

Вычисление для заданной функции

интеграла:

$$f(x) := x^4 + 3 \sin(2x)$$

$$a := 0 \quad b := 1$$

$$\int_a^b f(x) dx = 2.324$$

$$h := 10^{-2} \quad N := \frac{b-a}{h} \quad N = 100$$

Вычисление интеграла по методу прямоугольников (левых и правых) и методу трапеций

$$\left(\sum_{i=0}^{N-1} f(a+i \cdot h) \right) \cdot h = 2.306$$

$$\left(\sum_{i=1}^N f(a+i \cdot h) \right) \cdot h = 2.343$$

$$\left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} f(a+i \cdot h) + \frac{f(b)}{2} \right) \cdot h = 2.324$$

производной:

$$x := 2$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = 28.078$$

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) = 57.082$$

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 28.078$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \rightarrow 32 + 6 \cdot \cos(4)$$

$$32 + 6 \cdot \cos(4) = 28.078$$

1.4. Интерполяция

При решении различного рода компьютерных задач часто возникает необходимость в проведении интерполяции или аппроксимации для функции.

При задании функции табличным способом (например, степени черноты поверхности от температуры) неизбежно возникает задача приближенного вычисления функции в промежутках между узловыми точками. Кроме того, для автоматизации расчетов необходимо иметь зависимость для вычисления функции в любой точке. Эта задача решается интерполяцией исходных данных. Интерполяция представляет собой определение коэффициентов ряда для некоторого базисного набора функций (обычно степенных), которые обеспечивают равенство функции и интерполяционной зависимости в заданных точках (узлах). Интерполяция может проводиться для всего интервала изменения функции (непрерывная интерполяция) или отдельно для его частей (кусочная интерполяция). В дальнейшем можно использовать полученные интерполяционные зависимости для проведения расчетов в автоматическом режиме.

Для проведения непрерывной интерполяции (например интерполяции по методу Лагранжа) в пакете MathCAD нет встроенных инструментов, но, при необходимости, это можно сделать вручную. Пример для данных записанных в векторах \mathbf{X} и \mathbf{Y} представлен ниже.

$$i := 0..n \quad j := 0..n$$

$$L(x) := \sum_i Y_i \cdot \prod_j \left(\text{if} \left(i \neq j, \frac{x - X_j}{X_i - X_j}, 1 \right) \right)$$

Для кусочной интерполяции в пакете MathCAD есть встроенные функции, позволяющие провести линейную и сплайновую интерполяцию. При небольшом числе точек линейная интерполяция оказывается довольно грубой. Уже первая производная интерполяционной функции в узлах имеет разрывы. Гораздо лучше дает результаты сплайновая интерполяция. При ней исходная функция заменяется отрезками кубических полиномов,

проходящих через три смежные узловые точки. Коэффициенты полиномов рассчитываются так, чтобы непрерывными были первая и вторая производные.

- **linterp(X, Y, x)** — значение линейной интерполяции данных в векторах X, Y в точке x . Графически это означает соединение узловых точек отрезками прямых. При экстраполяции (координата x выходит за границы интервала задания функции) используются отрезки прямых, проведенных через две крайние точки;
- **lspline(X, Y)** — возвращает вектор VS коэффициентов сплайна, построенного по векторам X, Y при приближении в узловых точках к линейной зависимости;
- **pspline(X, Y)** — возвращает вектор VS коэффициентов сплайна, построенного по векторам X, Y при приближении в узловых точках к квадратичной зависимости;
- **cspline(X, Y)** — возвращает вектор VS коэффициентов сплайна, построенного по векторам X, Y при приближении в узловых точках к кубическому полиному;
- **interp(VS, X, Y, x)** — значение сплайновой интерполяции данных в векторах X, Y в точке x , вычисленное по коэффициентам VS с помощью одной из выше приведенных функций (**lspline**, **pspline** или **cspline**).

Примеры использования функций интерполяции и графики интерполяционных зависимостей показаны ниже.

$$X := \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \quad Y := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Линейная интерполяция:

$$f(x) := \text{linterp}(X, Y, x)$$

Интерполяция сплайнами:

1) с линейным переходом в узлах

$$VS1 := \text{lspline}(X, Y)$$

$$f1(x) := \text{interp}(VS1, X, Y, x)$$

2) с квадратичным переходом в узлах

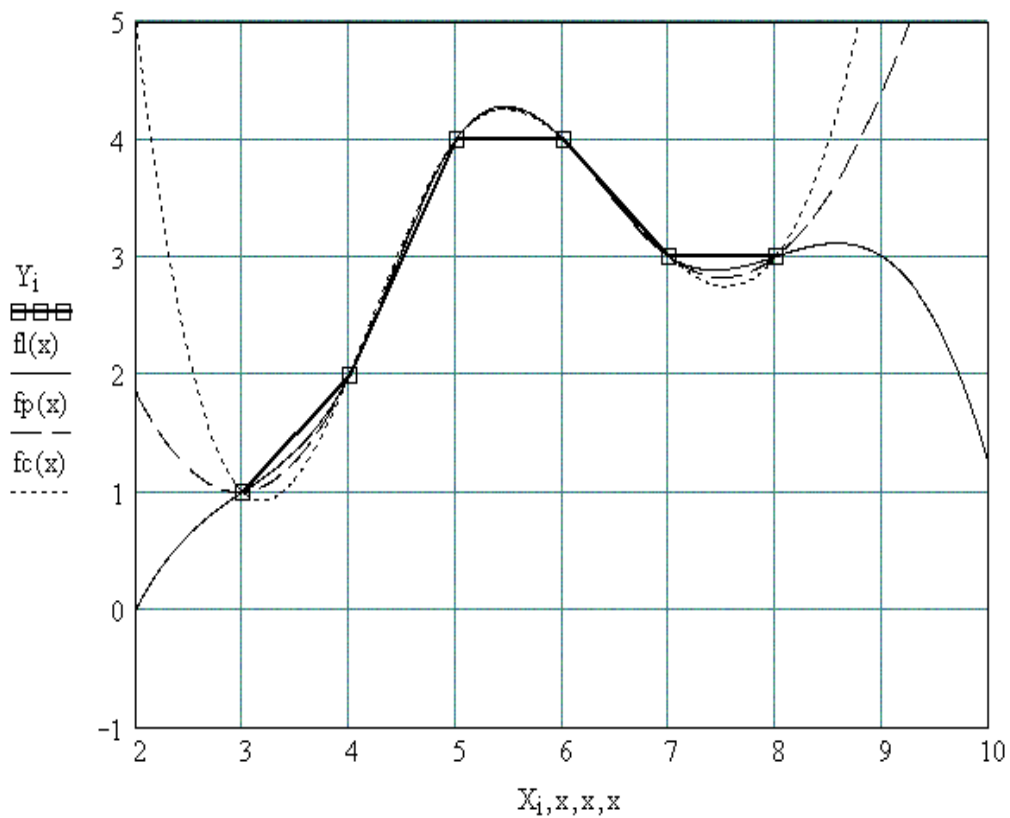
$$VS2 := \text{pspline}(X, Y)$$

$$f2(x) := \text{interp}(VS2, X, Y, x)$$

3) с кубическим переходом в узлах

$$VS3 := \text{cspline}(X, Y)$$

$$f3(x) := \text{interp}(VS3, X, Y, x)$$



Кроме одномерной сплайновой интерполяции пакет предоставляет возможность осуществления двумерной сплайн-интерполяции. Для этого используются те же функции (**lspline**, **pspline** или **cspline**) для нахождения коэффициентов и функция **interp** для вычисления значения интерполяции. Отличие состоит в том, что в качестве аргументов функций вместо векторов X , Y должны быть двумерные массивы XY и Z . Двухмерный массив XY размерности $(2*n)$ содержит упорядоченные по возрастанию координаты узлов сетки. Двухмерный массив Z размерности $(n*n)$ содержит значения функции в соответствующих узлах (координата x изменяется в соответствии с номером строки, а координата y — в соответствии с номером столбца). Применение двумерной интерполяции показано ниже.

$$XY := \begin{pmatrix} 0.09 & 0.2 \\ 0.27 & 0.4 \\ 0.44 & 0.6 \\ 0.55 & 0.8 \\ 1.00 & 1.0 \end{pmatrix} \quad Z := \begin{pmatrix} 4.5 & 7.9 & 11.1 & 15.8 & 24.7 \\ 1.8 & 2.8 & 4.1 & 6.1 & 8.9 \\ 1.4 & 1.9 & 2.4 & 3.0 & 4.8 \\ 1.2 & 1.6 & 1.8 & 2.2 & 3.3 \\ 1.0 & 1.2 & 1.5 & 1.8 & 2.3 \end{pmatrix}$$

$$VS := (\text{cspline}(XY, Z)) \quad f(x, y) := \text{interp} \left[VS, XY, Z, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]$$

Результат интерполяции для точки (0,15; 0,65): $f(0.15, 0.65) = 8.599$

1.5. Аппроксимация

В некоторых случаях требовать точного равенства приближающей зависимости в узловых точках нецелесообразно. В этом случае говорят об аппроксимации функции. Наиболее часто аппроксимация осуществляется методом наименьших квадратов. Аппроксимирующей функцией обычно является многочлен, хотя возможно применение и других функций.

В пакете MathCAD есть целый набор функций для проведения аппроксимации:

- **slope(X,Y)** — значение параметра a — углового коэффициента линейной регрессии $y = ax + b$ для данных заданных векторами X и Y ;
- **intercept(X,Y)** — значение параметра b — коэффициента линейной регрессии $y = ax + b$ для данных заданных векторами X и Y ;

- **line(X,Y)** — возвращает вектор коэффициентов линейной регрессии $y = ax + b$ для данных заданных векторами X и Y (первый элемент вектора — b ; второй элемент — a);
- **medfit(X,Y,G)** — вектор коэффициентов (a , b и c) аппроксимирующего выражения вида $a \cdot x + b$, которое наилучшим образом приближается к точкам, координаты которых хранятся в векторах X и Y ;
- **regress(X,Y,n)** — возвращает вектор VS коэффициентов полинома порядка n для функции **interp**, который наилучшим образом приближает данные из m -мерных векторов X , Y ($m > n$);
- **regress(XY,Z,n)** — возвращает вектор VS коэффициентов полинома порядка n для функции **interp**, который наилучшим образом приближает поверхность для данных из двумерного массива XY (размера $2 * m$ координат узлов) и вектора Z (длиной m) координат, соответствующие точкам указанным в XY ;
- **loess(X,Y,sp)** — возвращает вектор VS коэффициентов для функции **interp**, который определяет набор многочленов второй степени, наилучшим образом приближающих часть данных из векторов X , Y . Параметр $sp > 0$ определяет размер локальной области приближаемых данных (рекомендуемое начальное значение $-0,75$). Чем больше sp , тем сильнее сказывается сглаживание данных. При больших значениях эта функция приближается к **regress(X,Y,2)**;
- **loess(XY,Z,sp)** — возвращает вектор VS коэффициентов для функции **interp**, который определяет набор многочленов второй степени, наилучшим образом приближающих поверхность для части данных из двумерного массива XY (размера $2 * m$ координат узлов) и вектора Z (длиной m) координат, соответствующие точкам указанным в XY . Параметр sp определяет размер части аппроксимируемых данных;
- **linfit(X,Y,F)** — коэффициенты линейной аппроксимации методом наименьших квадратов для базисных функций, заданных в символьном векторе F ;

- **genfit(X,Y,G,F)** — вектор из $n + 1$ параметра, которые наилучшим образом приближают данные в векторах X и Y функцией $f(x, a_0, a_1, \dots, a_n)$. Символьный вектор $F(x, a)$ из $n + 2$ элементов, содержит саму функцию, и ее частные производные по параметрам. Вектор G содержит начальные приближения для параметров;
- **expfit(X,Y,G)** — вектор коэффициентов (a , b и c) аппроксимирующего выражения вида $a \cdot e^{bx} + c$, которое наилучшим образом приближается к точкам, координаты которых хранятся в векторах X и Y . Вектор G содержит начальное приближение коэффициентов;
- **logfit(X,Y,G)** — вектор коэффициентов (a , b и c) аппроксимирующего выражения вида $a \cdot \ln x + b + c$, которое наилучшим образом приближается к точкам, координаты которых хранятся в векторах X и Y . Вектор G содержит начальное приближение коэффициентов;
- **pwrfit(X,Y,G)** — вектор коэффициентов (a , b и c) аппроксимирующего выражения вида $a \cdot x^b + c$, которое наилучшим образом приближается к точкам, координаты которых хранятся в векторах X и Y . Вектор G содержит начальное приближение коэффициентов;
- **sinfит(X,Y,G)** — вектор коэффициентов (a , b и c) аппроксимирующего выражения вида $a \cdot \sin x + b + c$, которое наилучшим образом приближается к точкам, координаты которых хранятся в векторах X и Y . Вектор G содержит начальное приближение коэффициентов;
- **lgsfit(X,Y,G)** — вектор коэффициентов (a , b и c) аппроксимирующего выражения вида $\frac{a}{1 + b \cdot e^{-cx}}$, которое наилучшим образом приближается к точкам, координаты которых хранятся в векторах X и Y . Вектор G содержит начальное приближение коэффициентов.

Примеры применения различных видов аппроксимации в пакете MathCAD представлены ниже.

Линейное приближение данных в пакете MathCAD

Метод наименьших квадратов для линейной аппроксимации:

$$\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} := \text{medfit}(X, Y)$$

$$a = 3.694$$

$$b = 9.29$$

$$\text{mf}(x) := a \cdot x + b$$

Линейная регрессия:

$$\begin{pmatrix} d \\ c \end{pmatrix} := \text{line}(X, Y)$$

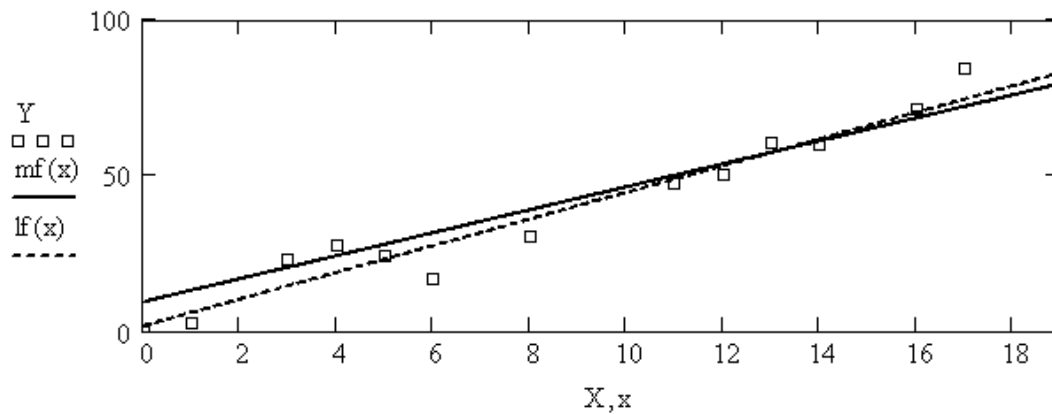
$$c = 4.287$$

$$d = 1.587$$

$$\text{lf}(x) := c \cdot x + d$$

$$\text{slope}(X, Y) = 4.287$$

$$\text{intercept}(X, Y) = 1.587$$



Приближение данных в пакете MathCAD

Аппроксимация полиномом n-го порядка (n=2):

$$n := 2$$

$$VS := \text{regress}(X, Y, n)$$

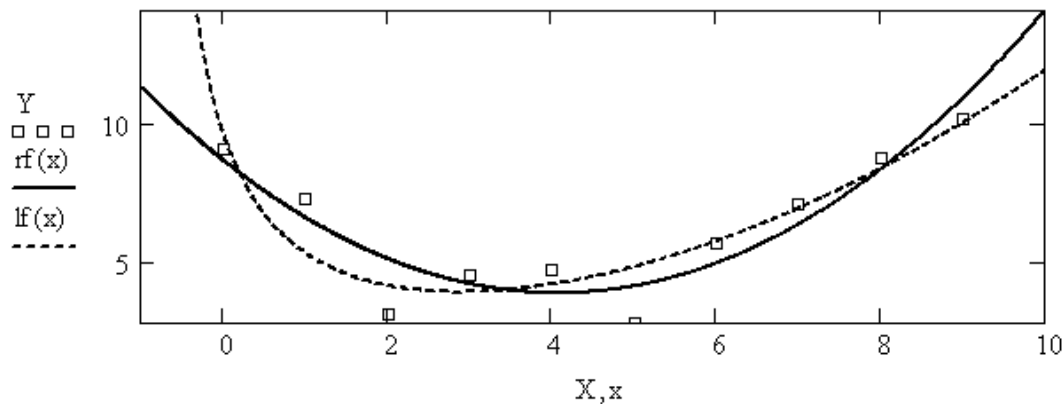
$$\text{rf}(x) := \text{interp}(VS, X, Y, x)$$

Аппроксимация линейной комбинацией базисных функций, заданных в векторе F(x):

$$F(x) := \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{x+1} \\ x^2 \end{pmatrix}$$

$$S := \text{linfit}(X, Y, F)$$

$$\text{lf}(x) := F(x) \cdot S$$



Приближение данных в пакете MathCAD

Аппроксимация заданной функцией с параметрами:

$$F(x, a) := \begin{pmatrix} e^{-a_0 \cdot x} \cdot \sin(a_1 \cdot x) \\ -x \cdot e^{-a_0 \cdot x} \cdot \sin(a_1 \cdot x) \\ x \cdot e^{-a_0 \cdot x} \cdot \cos(a_1 \cdot x) \end{pmatrix}$$

$$G1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$VS1 := \text{genfit}(X, Y, G1, F)$$

$$VS1 = \begin{pmatrix} 0.448 \\ 0.997 \end{pmatrix}$$

$$gf(x) := F(x, VS1)_0$$

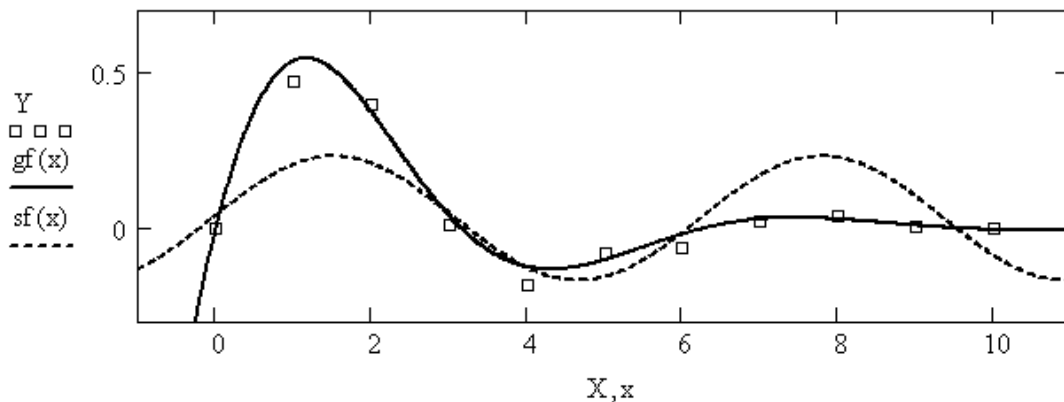
Аппроксимация функцией вида $a \cdot \sin(x+b)+c$:

$$G2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} := \text{sinfit}(X, Y, G2)$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.199 \\ 3.201 \\ 0.03 \end{pmatrix}$$

$$sf(x) := a \cdot \sin(x + b) + c$$



1.6. Статистическое сглаживание данных

Данные большинства экспериментов имеют случайные составляющие. Поэтому возникает необходимость в статистическом сглаживании данных. Сглаживание также вызывается необходимостью дальнейшей обработки данных с применением встроенных функций, например их дифференцированием или интегрированием. Ряд функций пакета MathCAD предназначены для выполнения операций сглаживания различными методами:

- **medsmooth(Y,n)** — для m -мерного вектора данных Y возвращает m -мерный вектор сглаженных данных по методу скользящей медианы; параметр n задает ширину окна сглаживания по количеству точек; n должно быть нечетным, меньшим m ;

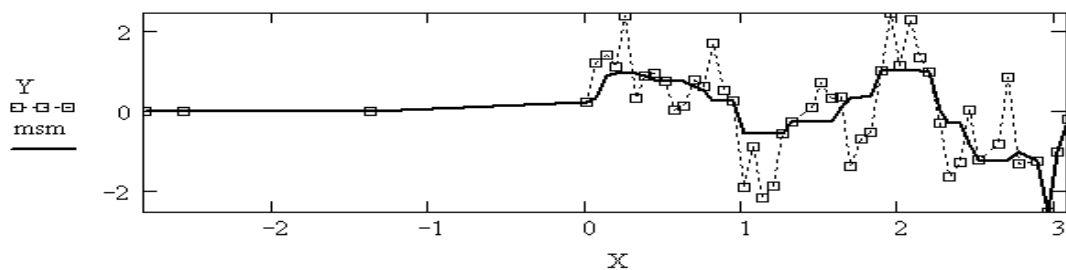
- **ksmooth(X,Y,sp)** — для m -мерных векторов данных X и Y возвращает m -мерный вектор сглаженных данных, вычисленных на основе распределения Гаусса; параметр sp задает ширину окна сглаживания в единицах длины по оси x ; sp должно в несколько раз превышать интервал между точками по оси x ;
- **medsmooth(X,Y)** — для m -мерного вектора данных X и Y возвращает m -мерный вектор сглаженных данных, вычисленных на основе использования процедуры линейного сглаживания методом наименьших квадратов по правилу k -ближайших соседей с адаптивным выбором k .

Ниже показано применения функций сглаживания в пакете MathCAD.

Номер последнего элемента массивов X и Y $m := \text{last}(X)$ $m = 49$

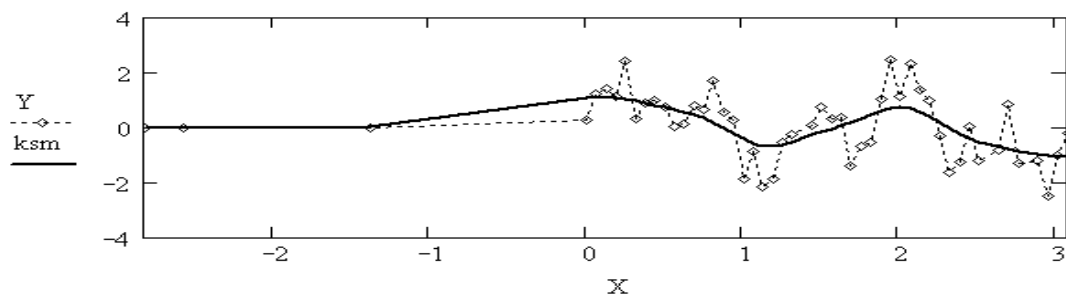
Ширина окна сглаживания $n := 9$

$\text{msm} := \text{medsmooth}(Y, n)$

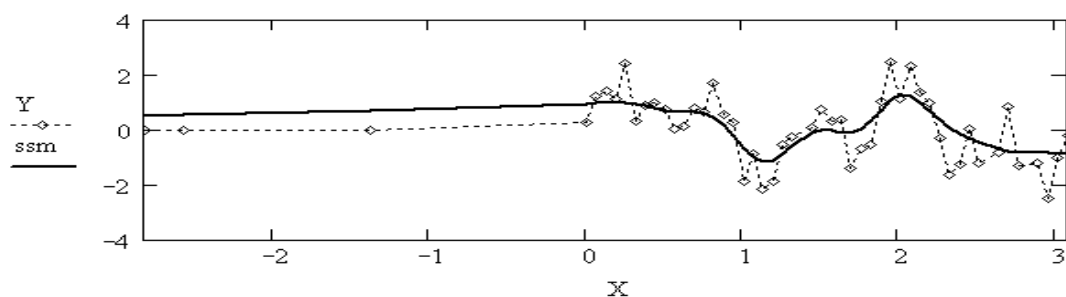


Ширина окна сглаживания $sp := 5 \cdot \frac{X_m - X_0}{m + 1}$ $sp = 0.591$

$\text{ksm} := \text{ksmooth}(X, Y, sp)$



$\text{ssm} := \text{supsmooth}(X, Y)$



1.7. Оптимизация

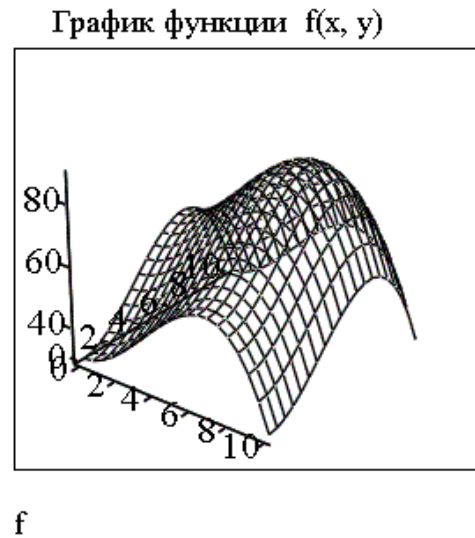
Решение задачи оптимизации — определение параметра (набора параметров), при котором целевая функция приобретает максимальное (или минимальное) значение — является неотъемлемой задачей проектирования. К задачам оптимизации так же относятся задачи линейного программирования. Для решения подобных задач разработаны специальные математические методы. Ряд встроенных функций пакета MathCAD предназначены для решения задач оптимизации. К ним относятся:

- **max(M)** — определяет максимальное значение матрицы M ;
- **min(M)** — определяет минимальное значение матрицы M ;
- **Maximize(f, x_1, x_2, \dots)** — определяет значения параметров x_1, x_2, \dots в пределах области их изменения (ограничения на параметры задаются в вычислительном блоке Given в виде равенств и неравенств), которые соответствуют максимуму функции f . Функция Maximize требует задания перед вычислительным блоком начального приближения параметров оптимизации;
- **Minimize(f, x_1, x_2, \dots)** — определяет значения параметров x_1, x_2, \dots в пределах области их изменения (ограничения на параметры задаются в вычислительном блоке Given в виде равенств и неравенств), которые соответствуют минимуму функции f . Функция Maximize требует задания перед вычислительным блоком начального приближения параметров оптимизации.

Примеры применение функций оптимизации для поиска максимума (минимума) функции представлены ниже.

$$f(x, y) := 30 + 2 \cdot x^2 + 2 \cdot y^2 - \frac{x^3}{5} - \frac{y^3}{5}$$

$$x := 0..10 \quad y := 0..10$$



Поиск минимума функции f(x,y) в заданной области:

$$x := 4 \quad y := 5$$

Given

$$x \geq 0$$

$$0 \leq y \leq 10 - x$$

$$P := \text{Minimize}(f, x, y) \quad P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f(P_0, P_1) = 30$$

Поиск максимума функции f(x,y) в заданной области:

$$x := 4 \quad y := 5$$

Given

$$x \geq 0$$

$$0 \leq y \leq 10 - x$$

$$R := \text{Maximize}(f, x, y) \quad R = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad f(R_0, R_1) = 80$$

1.8. Специальные функции

Наряду с элементарными функциями в пакете MathCAD содержится ряд встроенных специальных математических функций. Их применение расширяет возможности системы в решении сложных математических задач,

прежде всего дифференциальных уравнений. К ним относятся:

- **J0(x)** — функция Бесселя первого рода нулевого порядка;
- **J1(x)** — функция Бесселя первого рода первого порядка;
- **Jn(n,x)** — функция Бесселя первого рода n -го порядка;
- **Y0(x)** — функция Бесселя второго рода нулевого порядка;
- **Y1(x)** — функция Бесселя второго рода первого порядка;
- **Yn(n,x)** — функция Бесселя второго рода n -го порядка;
- **I0(x)** — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка;
- **I1(x)** — модифицированная функция Бесселя первого рода первого порядка;
- **In(n,x)** — модифицированная функция Бесселя первого рода n -го порядка;
- **K0(x)** — модифицированная функция Бесселя второго рода нулевого порядка;
- **K1(x)** — модифицированная функция Бесселя второго рода первого порядка;
- **Kn(n,x)** — модифицированная функция Бесселя второго рода n -го порядка;
- **erf(z)** — функция ошибок

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(z - \frac{1}{1!} \frac{z^3}{3} + \frac{1}{2!} \frac{z^5}{5} - \frac{1}{3!} \frac{z^7}{7} \pm \dots \right);$$

- **erfc(x)** — дополнительная функция ошибок $1 - \operatorname{erf}(z)$;
- **Tcheb(n,x)** — полином Чебышева первого рода степени n ;
- **Ucheb(n,x)** — полином Чебышева второго рода степени n ;
- **Lag(n,x)** — полином Лагерра степени n ;
- **Leg(n,x)** — полином Лежандра степени n ;
- $\Gamma(z)$ — гамма-функция;
- $\delta(x,y)$ — символ Кронекера: равен 1, если $x = y$, и 0, если $x \neq y$ (x и y целые);
- **Phi(x)** — функция Хевисайда: равна 1, если $x \geq 0$, и 0, если $x < 0$.

2. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ИНДИВИДУАЛЬНОГО РАСЧЕТНОГО ЗАДАНИЯ В ПАКЕТЕ MATHCAD

Формулировка задания: Наружная кирпичная стена здания имеет толщину 0,5 м. Коэффициент теплопроводности кирпичной кладки 0,8 Вт/(м·К). Температура внутри здания 20 °С, а снаружи –10 °С. Коэффициенты теплообмена 10 и 50 Вт/(м²·К) соответственно. Внутри стенки действуют источники тепла с объемной плотностью 1000 Вт/м³.

Построить график температурного поля для стены. Определить:

- 1) координату и значение максимальной температуры в стене;
- 2) температуру и плотность теплового потока на внутренней и наружной поверхностях стены.

Построить графики зависимостей этих параметров от величины объемной плотности источников тепла.

Выполнение задания: Ниже приведено решение задания в пакете MathCAD.

ДАНО

Температуры сред:

$$T_1 := 20$$

$$T_2 := -10$$

Коэффициенты теплообмена:

$$\alpha_1 := 10$$

$$\alpha_2 := 50$$

Толщина стенки:

$$\delta := 0.5$$

Коэффициент теплопроводности стенки:

$$\lambda := 0.8$$

Объемная плотность источников тепла:

$$q_v := 10^3$$

РЕШЕНИЕ

Определение координаты с максимальным значением температуры:

$$x_0 := -0.1$$

- начальное приближение для блока Given-Find:

Given

$$T_1 + \frac{q_v \cdot x_0}{\alpha_1} + \frac{q_v \cdot x_0^2}{2\lambda} = T_2 + \frac{q_v \cdot (\delta - x_0)}{\alpha_2} + \frac{q_v \cdot (\delta - x_0)^2}{2\lambda}$$

$$x_0(q_v) := \text{Find}(x_0)$$

$$x_0(q_v) = 0.183$$

Температурное поле для левой, относительно максимума температуры, части пластины:

$$T_1(q_v, x) := T_1 + \frac{q_v \cdot x_0(q_v)}{\alpha_1} + \frac{q_v \cdot (x_0(q_v))^2}{2\lambda} \cdot \left[1 - \left(\frac{x}{x_0(q_v)} \right)^2 \right]$$

Температурное поле для правой, относительно максимума температуры, части пластины:

$$T_2(q_v, x) := T_2 + \frac{q_v \cdot (\delta - x_0(q_v))}{\alpha_2} + \frac{q_v \cdot (\delta - x_0(q_v))^2}{2\lambda} \cdot \left[1 - \left(\frac{x}{\delta - x_0(q_v)} \right)^2 \right]$$

Плотность теплового потока для левой части пластины:

$$q_1(q_v, x) := -\lambda \cdot \left(\frac{d}{dx} T_1(q_v, x) \right)$$

Плотность теплового потока для правой части пластины:

$$q_2(q_v, x) := -\lambda \cdot \left(\frac{d}{dx} T_2(q_v, x) \right)$$

Температура на левой границе пластины:

$$T_{c1}(q_v) := T_1(q_v, x_0(q_v))$$

$$T_{c1}(q_v) = 38.289$$

Температура на правой границе пластины:

$$T_{c2}(q_v) := T_2(q_v, \delta - x_0(q_v))$$

$$T_{c2}(q_v) = -3.658$$

Максимальное значение температуры:

$$T_{1_max}(q_v) := T_1(q_v, 0)$$

$$T_{1_max}(q_v) = 59.193$$

$$T_{2_max}(q_v) := T_2(q_v, 0)$$

$$T_{2_max}(q_v) = 59.193$$

Плотность теплового потока для левой границы пластины:

$$q_1(q_v, x_0(q_v)) = 182.886$$

Плотность теплового потока для правой границы пластины:

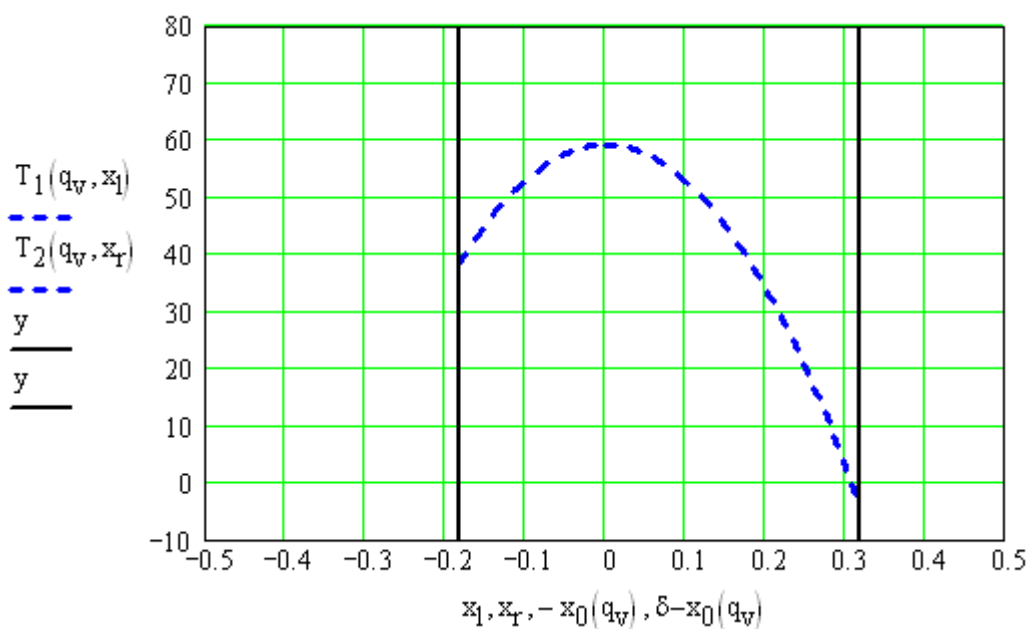
$$q_2(q_v, \delta - x_0(q_v)) = 317.114$$

Температурное поле:

$$x_1 := -x_0(q_v), -0.95 \cdot x_0(q_v) .. 0$$

$$x_T := 0, 0.05 \cdot (\delta - x_0(q_v)) .. \delta - x_0(q_v)$$

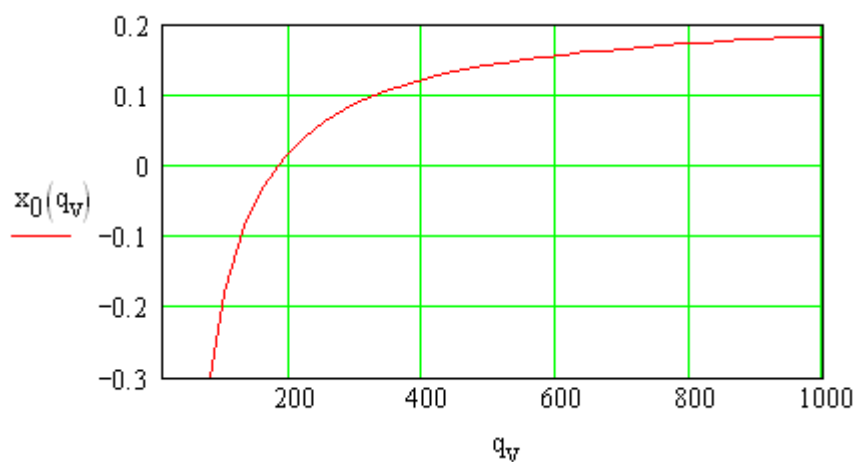
$$y := -200, -100 .. 1000$$



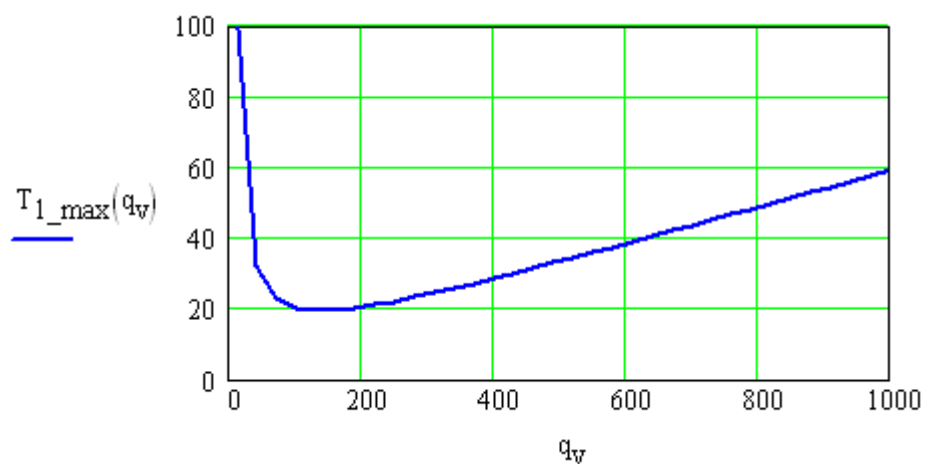
Графики зависимостей от:

$$q_v := 10,40 \cdot 10^3$$

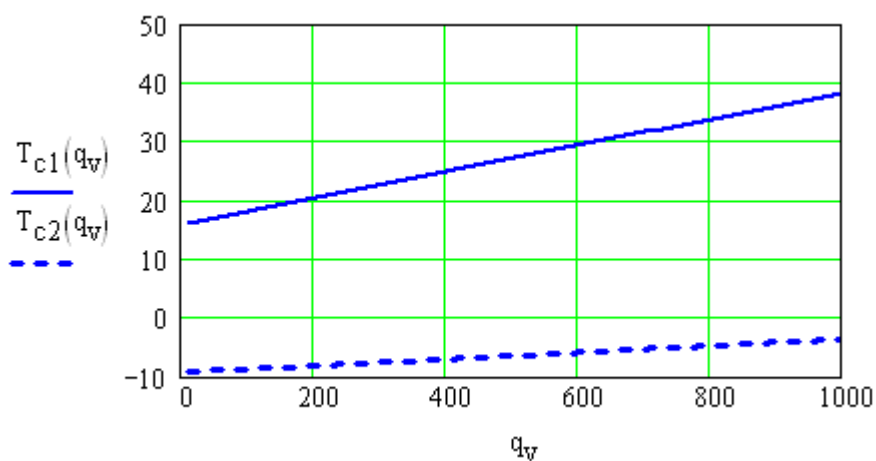
1) координаты максимального значения температуры:



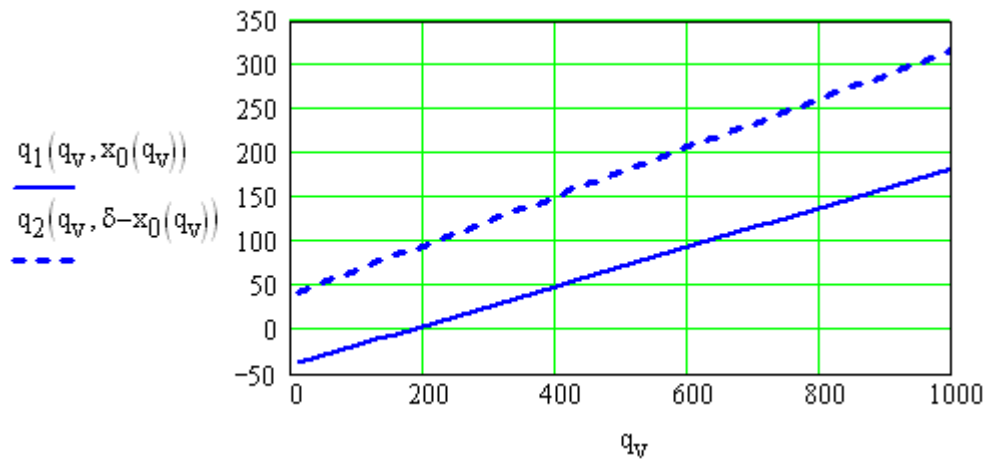
2) максимального значения температуры:



3) температур на поверхностях стены:



4) плотностей теплового потока на поверхностях стены:



Таблицы значений от:

$$q_v := 100, 200 \dots 10^3$$

$q_v =$	$x_0(q_v) =$	$T_{1_max}(q_v)$	$T_{c1}(q_v) =$	$T_{c2}(q_v) =$
100	-0.18	20.219	18.205	-8.641
200	0.022	20.496	20.436	-8.087
300	0.089	24.151	22.668	-7.534
400	0.122	28.65	24.899	-6.98
500	0.143	33.487	27.131	-6.426
600	0.156	38.493	29.362	-5.872
700	0.166	43.596	31.594	-5.319
800	0.173	48.759	33.826	-4.765
900	0.178	53.962	36.057	-4.211
1·10 ³	0.183	59.193	38.289	-3.658

$q_v =$	$q_1(q_v, x_0(q_v))$	$q_2(q_v, \delta - x_0(q_v))$
100	-17.953	67.953
200	4.362	95.638
300	26.678	123.322
400	48.993	151.007
500	71.309	178.691
600	93.624	206.376
700	115.94	234.06
800	138.255	261.745
900	160.57	289.43
1·10 ³	182.886	317.114

3. ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ РАСЧЕТНЫХ ЗАДАНИЙ

3.1. Теплопроводность при стационарном режиме

3.1.1. Без внутренних источников тепла

1. Построить график зависимости температуры поверхности нихромовой спирали ($\rho = 1,1 \cdot 10^{-6}$ Ом · м, $L = 2$ м), подключенной к сети переменного электрического напряжения 220 В, от ее диаметра (изменяется от 0,05 до 0,3 мм). Спираль находится в среде с температурой 35 °С, коэффициент теплообмена на ее поверхности $\alpha = 20$ Вт/(м² · К). Определить размеры спирали (длину и диаметр) с температурой поверхности 950 °С и мощностью 1000 Вт.

2. Построить график зависимости температуры поверхности нихромовой спирали ($\rho = 1,1 \cdot 10^{-6}$ Ом · м, $L = 2$ м, $d = 0,15$ мм), от величины приложенного напряжения. Спираль находится в среде с температурой 30 °С, коэффициент теплообмена на ее поверхности $\alpha = 20$ Вт/(м² · К). Какого диаметра необходимо использовать провод, чтобы спираль длиной 2 м имела мощность 100 Вт и температуру 800 °С?

3. Трубчатый воздухоподогреватель производительностью 2,5 кг/с выполнен из стальных труб диаметром $d_1/d_2 = 43/49$ мм. Внутри труб движется горячий газ, а наружная поверхность омывается поперечным потоком воздуха. Средняя температура дымовых газов 250 °С. Температура воздуха на входе в подогреватель 20 °С. Коэффициенты теплообмена на внутренней и наружной поверхности труб соответственно 45 и 25 Вт/(м² · К). Построить график зависимости температуры воздуха на выходе из подогревателя от величины его площади теплопередающей поверхности. При какой площади теплопередающей поверхности температура воздуха на выходе будет иметь температуру 200 °С? (При решении задачи учесть зависимость теплоёмкости воздуха от температуры).

4. Трубчатый теплообменник-испаритель холодильного агрегата, изготовленный из медных ($\lambda = 190$ Вт/(м · К)) труб диаметром $d_1/d_2 = 5/7$ мм, находится внутри холодильной камеры. Температура среды в камере –15 °С. Внутри труб теплообменника кипит фреон при температуре –23 °С.

Коэффициенты теплообмена на внутренней и наружной поверхности труб соответственно 95 и 7 Вт/(м²·К). Холодильный агрегат для поддержания заданной температуры в холодильной камере работает 25% времени. Как будет изменяться продолжительность работы холодильного агрегата, если на поверхности труб будет расти слой инея? Построить график зависимости продолжительности работы агрегата от толщины слоя инея ($\lambda = 0,05$ Вт/(м·К)). При какой толщине инея продолжительность работы агрегата составит 50%?

5. Построить график зависимости температуры поверхности нихромовой спирали ($\rho = 1,1 \cdot 10^{-6}$ Ом·м, $L=2$ м), по которой протекает переменный электрический ток 10 А, от ее диаметра (изменяется от 0,5 до 3 мм). Спираль находится в среде с температурой 35 °С, коэффициент теплообмена на ее поверхности $\alpha = 20$ Вт/(м²·К). Определить размеры спирали (длину и диаметр) с температурой поверхности 1000 °С и мощностью 1500 Вт.

6. Трубчатый воздухоподогреватель производительностью 1,9 кг/с выполнен из стальных ($\lambda = 50$ Вт/(м·К)) труб диаметром $d_1/d_2=43/49$ мм. Внутри труб движется горячий газ, а наружная поверхность омывается поперечным потоком воздуха. Средняя температура дымовых газов 250 °С. Температура воздуха на входе в подогреватель 20 °С, а на выходе 200 °С. Коэффициенты теплообмена на внутренней и наружной поверхности труб соответственно 45 и 25 Вт/(м²·К). Определить площадь поверхность воздушного подогревателя. Как будет изменяться температура горячего воздуха, если в процессе эксплуатации со стороны дымовых газов образуется слой сажи ($\lambda = 0,08$ Вт/(м·К))? Построить график зависимости температуры подогретого воздуха от толщины сажи. При какой толщине сажи температура снизится на 10%? (При решении задачи учесть зависимость теплоёмкости воздуха от температуры).

7. По трубопроводу диаметром $d_1/d_2=18/20$ мм протекает фреон. Средняя температура фреона –25 °С, температура окружающего воздуха 20 °С. Коэффициенты теплоотдачи внутри и снаружи трубопровода 100 Вт/(м²·К) и 10 Вт/(м²·К). Коэффициент теплопроводности материала

трубопровода $50 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$. Какой должна быть толщина изоляции из пенопласта с коэффициентом теплопроводности $0,03 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, чтобы снизить хладопотери в n раз, по сравнению с вариантом без изоляции? Произвести расчет и построить график зависимости $\delta = f(n)$, изменяя n от 1 до 10.

8. Для теплоизоляции трубопровода диаметром $d_1/d_2 = 18/20$ мм от окружающей среды применяют один из трех материалов: асбест ($\lambda_1 = 0,15 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$), стекловату ($\lambda_2 = 0,1 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$) или пенополиуретан ($\lambda_3 = 0,02 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$). Температуры и коэффициенты теплообмена внутри и снаружи трубы $T_1 = 200 \text{ К}$, $\alpha_1 = 100 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ и $T_2 = 300 \text{ К}$, $\alpha_2 = 10 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ соответственно. Определить критический диаметр для каждой изоляции. Определить толщину слоя теплоизоляции, при котором тепловые потери с одного погонного метра трубы не будут превышать $100 \text{ Вт}/\text{м}$. Построить графики зависимости термического сопротивления теплопередачи изолированного трубопровода и его составляющих, а также линейной плотности теплового потока от толщины теплоизоляции.

9. Теплоизоляция холодильной камеры выполнена из пенопласта толщиной $0,1 \text{ м}$. В камере температура $-20 \text{ }^\circ\text{C}$, а снаружи $25 \text{ }^\circ\text{C}$. Коэффициенты теплообмена внутри и снаружи камеры равны 15 и $10 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ соответственно. Определить плотность теплового потока через изоляцию и температурное поле изоляции (изобразить в виде графика) для двух случаев: а) $\lambda = 0,03 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$; б) $\lambda = (0,03 + 2 \cdot 10^{-6} \cdot T) \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, где T — температура в $^\circ\text{C}$.

10. Трубопровод диаметром $d_1/d_2 = 18/20$ мм теплоизолирован пенопластом толщиной $0,1 \text{ м}$ от среды с температурой $25 \text{ }^\circ\text{C}$. По трубопроводу протекает фреон с температурой $-25 \text{ }^\circ\text{C}$. Коэффициенты теплообмена внутри и снаружи трубопровода 100 и $10 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ соответственно. Определить линейную плотность теплового потока к хладагенту и распределение температуры по толщине теплоизоляции (изобразить в виде графика) для двух случаев: а) $\lambda = 0,02 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$; б) $\lambda = (0,02 + 2 \cdot 10^{-6} \cdot T) \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, где T — температура в $^\circ\text{C}$.

11. Построить график зависимости температуры поверхности нихромовой спирали ($\rho = 1,1 \cdot 10^{-6}$ Ом·м, $L=2$ м), по которой протекает переменный электрический ток 10 А, от ее диаметра (изменяется от 0,05 до 0,3 мм). Спираль находится в среде с температурой 35 °С, коэффициент теплообмена на ее поверхности $\alpha = 20$ Вт/(м²·К). Определить размеры спирали (длину и диаметр) с температурой поверхности 1000 °С и мощностью 1500 Вт.

12. Теплоизоляция термоса, имеющего форму шара диаметром 0,3 м, выполнена из пенопласта толщиной 0,1 м. Внутри термоса температура –20 °С, а снаружи 20 °С. Коэффициенты теплообмена внутри и снаружи равны 20 и 5 Вт/(м²·К) соответственно. Определить плотность теплового потока на внутренней и наружной стенке изоляции, тепловой поток и распределение температуры по толщине изоляции (изобразить в виде графика) для двух случаев: а) $\lambda = 0,02$ Вт/(м·К);

б) $\lambda = (0,02 + 2 \cdot 10^{-6} \cdot T)$ Вт/(м·К), где T — температура в °С.

13. Климатическая камера с внутренними размерами 1×1×1 м теплоизолирована от окружающей среды воздушной прослойкой толщиной 0,02 м и слоем пенополиуретана ($\lambda = 0,02$ Вт/(м·К)) толщиной 0,1 м. Температура снаружи камеры 25 °С. Коэффициенты теплообмена снаружи и внутри камеры 10 и 50 Вт/(м²·К) соответственно. Для поддержания заданной температуры внутри камеры используется электрический нагреватель. Определить мощность нагревателя и температуры ее внутренней и наружной поверхностей в зависимости от температуры внутри камеры от 50 до 300 °С (изобразить графически). Какими будут эти параметры при температуре в камере 200 °С?

14. Климатическая камера с внутренними размерами 1×1×1 м теплоизолирована от окружающей среды слоем пенополиуретана ($\lambda = 0,02$ Вт/(м·К)) толщиной 0,1 м. Температура снаружи камеры 25 °С. Коэффициенты теплообмена снаружи и внутри камеры 10 и 50 Вт/(м²·К) соответственно. Для поддержания заданной температуры внутри камеры в трубчатом теплообменнике с площадью теплопередающей поверхности 2 м²

кипит фреон. Коэффициент теплообмена фреона с поверхностью $100 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. Определить мощность теплообменника - испарителя, температуры фреона, внутренней и наружной поверхностей камеры в зависимости от температуры внутри камеры от -70 до $0 \text{ }^\circ\text{C}$ (изобразить графически). Какими будут эти параметры при температуре в камере $-40 \text{ }^\circ\text{C}$?

15. Для интенсификации теплопередачи необходимо провести оребрение плоской поверхности воздухонагревателя. Определить оптимальные размеры оребрения (толщину и высоту ребра), если на оребрение 1 м^2 поверхности расходуется не более 5 кг алюминия, плотность расположения ребер $n = 50 \text{ шт}/\text{м}$, коэффициент теплоотдачи от плоской поверхности и ребер $\alpha = 9 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$, температуры у основания ребра и среды 70 и $20 \text{ }^\circ\text{C}$ соответственно. Построить графики зависимости коэффициента эффективности ребра, температуры на конце ребра, теплового потока с 1 м^2 исходной поверхности для различных вариантов оребрения.

16. Для интенсификации теплообмена необходимо провести оребрение наружной поверхности ($d_n = 80 \text{ мм}$) стальной трубы. Температуры поверхности трубы и окружающей среды 80 и $20 \text{ }^\circ\text{C}$ соответственно, коэффициент теплообмена $\alpha = 8,5 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. Определить оптимальные размеры оребрения (толщину и высоту ребер), если плотность расположения ребер $n = 50 \text{ шт}/\text{м}$, а увеличение массы 1 м трубы за счет оребрения не должно превышать $5,5 \text{ кг}$. Построить графики зависимости коэффициента эффективности ребра, температуры на конце ребра, линейной плотности теплового потока для различных вариантов оребрения.

17. Для интенсификации теплопередачи необходимо провести оребрение плоской поверхности воздухонагревателя прямыми ребрами с толщиной 1 мм . Коэффициент теплоотдачи от плоской поверхности и ребер приближенно может быть аппроксимирован следующей зависимостью $\alpha = 33 \cdot x^{0,33} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$, где x — величина зазора между ребрами в метрах. Температуры у основания ребра и среды 70 и $20 \text{ }^\circ\text{C}$ соответственно. Определить оптимальные параметры оребрения (высоту ребра и количество ребер на 1 метр длины), если на оребрение 1 м^2 поверхности расходуется не более 5 кг алюминия. Построить графики зависимости коэффициента

эффективности ребра, температуры на конце ребра, теплового потока с 1 м^2 исходной поверхности для различных вариантов оребрения.

18. Для интенсификации теплообмена необходимо провести оребрение наружной поверхности ($d_n = 80 \text{ мм}$) медной трубы ребрами с толщиной 1 мм . Температуры поверхности трубы и окружающей среды 80 и $20 \text{ }^\circ\text{C}$ соответственно, коэффициент теплообмена от поверхности трубы и ребер приближенно может быть аппроксимирован следующей зависимостью $\alpha = 33 \cdot x^{0,33} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$, где x — величина зазора между ребрами в метрах. Определить оптимальные параметры оребрения (высоту ребер и количество на 1 метр длины), если увеличение массы 1 м трубы за счет оребрения не должно превышать 7 кг . Построить графики зависимости коэффициента эффективности ребра, температуры на конце ребра, линейной плотности теплового потока для различных вариантов оребрения.

3.1.2. С внутренними источниками тепла

19. По медному проводнику ($\lambda = 225 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $\rho = 1,750 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$) круглого сечения, находящемуся в среде с температурой $30 \text{ }^\circ\text{C}$ необходимо пропускать ток 300 А . Построить графики зависимости температуры на поверхности и в середине проводника от его диаметра, если коэффициент теплообмена $\alpha = 10 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. Определить минимально возможный диаметр проводника, при котором температура его поверхности не превышает $70 \text{ }^\circ\text{C}$.

20. Построить график зависимости температуры на оси нихромовой спирали ($\rho = 1,1 \cdot 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{м}$, $L = 2 \text{ м}$, $\lambda = 25 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$), подключенной к сети переменного электрического напряжения 127 В , от ее диаметра (изменяется от $0,05$ до $0,4 \text{ мм}$). Спираль находится в среде с температурой $25 \text{ }^\circ\text{C}$, коэффициент теплообмена на ее поверхности $\alpha = 20 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. Определить размеры спирали (длину и диаметр) с температурой поверхности $900 \text{ }^\circ\text{C}$ и мощностью 750 Вт .

21. Алюминиевый ($\lambda = 190 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $\rho = 2,80 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$) проводник диаметром 2 мм находится в среде с температурой $35 \text{ }^\circ\text{C}$. Коэффициент теплообмена на поверхности проводника $\alpha = 7 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. Построить графики зависимости температуры на поверхности и в середине проводника

от величины силы тока, который протекает по проводнику. Определить максимальную силу тока, при которой температура поверхности проводника не превысит $70\text{ }^{\circ}\text{C}$.

22. По медному проводнику ($\lambda = 225\text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $\rho = 1,750 \cdot 10^{-8}\text{ Ом} \cdot \text{м}$) диаметром 2 мм протекает ток 200 А . Проводник находится в среде с температурой $25\text{ }^{\circ}\text{C}$. Определить зависимости температур на поверхности и в середине проводника от величины коэффициента теплообмена и построить их графики. Определить величину коэффициента теплообмена, при котором температура поверхности не превысит $50\text{ }^{\circ}\text{C}$.

23. Построить график зависимости температуры на оси нихромовой спирали ($\rho = 1,1 \cdot 10^{-6}\text{ Ом} \cdot \text{м}$, $L = 2\text{ м}$, $\lambda = 25\text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$), по которой протекает переменный электрический ток 7 А , от ее диаметра (изменяется от $0,05$ до $0,3\text{ мм}$). Спираль находится в среде с температурой $20\text{ }^{\circ}\text{C}$, коэффициент теплообмена на ее поверхности $\alpha = 15\text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. Определить размеры спирали (длину и диаметр) с температурой поверхности $950\text{ }^{\circ}\text{C}$ и мощностью 1000 Вт .

24. Алюминиевый ($\lambda = 190\text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $\rho = 2,80 \cdot 10^{-8}\text{ Ом} \cdot \text{м}$) проводник диаметром 2 мм , покрытый резиновой изоляцией ($\lambda = 0,16\text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$) толщиной 1 мм , находится в среде с температурой $30\text{ }^{\circ}\text{C}$. Коэффициент теплообмена на поверхности проводника $\alpha = 7\text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. Построить графики зависимостей температур на поверхности и в середине проводника, на наружной поверхности изоляции от величины силы тока, проходящего по проводнику. Определить значение силы тока, при котором температура изоляции (на поверхности проводника) не превысит $70\text{ }^{\circ}\text{C}$.

25. Построить график зависимости температуры на оси нихромовой спирали ($\rho = 1,1 \cdot 10^{-6}\text{ Ом} \cdot \text{м}$, $\lambda = 25\text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $L = 2\text{ м}$, $d = 0,15\text{ мм}$), от величины протекающего по ней тока. Спираль находится в среде с температурой $25\text{ }^{\circ}\text{C}$, коэффициент теплообмена на ее поверхности $\alpha = 20\text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. Какого диаметра необходимо использовать провод, чтобы спираль длиной 2 м имела мощность 100 Вт и температуру $800\text{ }^{\circ}\text{C}$?

26. Построить график зависимости температуры на оси нихромовой спирали ($\rho = 1,1 \cdot 10^{-6}$ Ом \cdot м, $L = 2$ м, $\lambda = 25$ Вт/(м \cdot К), $d = 0,15$ мм), подключенной к сети переменного электрического напряжения 220 В, от величины коэффициента теплообмена на ее поверхности (изменяется от 5 до 100 Вт/(м² \cdot К)). Спираль находится в среде с температурой 20 °С. Определить величину коэффициент теплообмена, при котором температура поверхности не превысит 950 °С.

3.2. Теплопроводность при нестационарном режиме

1. Стальной лист ($\lambda = 14$ Вт/(м \cdot К), $c = 461$ Дж/(кг \cdot К), $\rho = 7817$ кг/м³) с размерами 1×1×0,05 м с начальной температурой 450 К охлаждается воздухом с температурой 300 К. Коэффициент теплообмена на поверхности листа $\alpha = 15$ Вт/(м² \cdot К). Определить зависимости температур поверхности и середины листа от времени и построить их график.

2. Стальной лист ($\lambda = 14$ Вт/(м \cdot К), $c = 461$ Дж/(кг \cdot К), $\rho = 7817$ кг/м³) с размерами 1×1×0,05 м с начальной температурой 450 К охлаждается воздухом с температурой 300 К. Коэффициент теплообмена на поверхности листа $\alpha = 85$ Вт/(м² \cdot К). Определить температуры поверхности, середины листа и плоскости, удаленной от поверхности на 1/4 толщины листа и построить график их изменения от времени.

3. Стальной лист ($\lambda = 14$ Вт/(м \cdot К), $c = 461$ Дж/(кг \cdot К), $\rho = 7817$ кг/м³) с размерами 1×1×0,05 м с начальной температурой 450 К охлаждается воздухом с температурой 300 К. Коэффициент теплообмена на поверхности листа $\alpha = 85$ Вт/(м² \cdot К). Определить среднюю температуру листа, плотность теплового потока на его поверхности и построить график их изменения от времени.

4. Стальной вал ($\lambda = 14$ Вт/(м \cdot К), $c = 461$ Дж/(кг \cdot К), $\rho = 7817$ кг/м³) длиной 2 м и диаметром 0,2 м с начальной температурой 450 К охлаждается воздухом с температурой 300 К. Коэффициент теплообмена на поверхности вала $\alpha = 75$ Вт/(м² \cdot К). Определить температуры поверхности, оси вала и точек, удаленных от поверхности на 1/4 диаметра вала и построить график их изменения от времени.

5. Стальной вал ($\lambda = 14 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $c = 461 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$, $\rho = 7817 \text{ кг}/\text{м}^3$) длиной 2 м и диаметром 0,2 м с начальной температурой 450 К охлаждается воздухом с температурой 300 К. Коэффициент теплообмена на поверхности вала $\alpha = 75 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. Определить среднюю температуру вала, плотность теплового потока на его поверхности и построить график их изменения от времени.

6. Стеклянный шар ($\lambda = 0,81 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $c = 800 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$, $\rho = 2800 \text{ кг}/\text{м}^3$) диаметром 0,2 м с начальной температурой 600 К охлаждается воздухом с температурой 300 К. Коэффициент теплообмена на поверхности шара $\alpha = 75 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. Определить температуры поверхности, центра шара и точек, удаленных от поверхности на $1/4$ диаметра шара и построить график их изменения от времени.

7. Стеклянный шар ($\lambda = 0,81 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $c = 800 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$, $\rho = 2800 \text{ кг}/\text{м}^3$) диаметром 0,2 м с начальной температурой 600 К охлаждается воздухом с температурой 300 К. Коэффициент теплообмена на поверхности шара $\alpha = 75 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. Определить среднюю температуру шара, плотность теплового потока на его поверхности и построить график их изменения от времени.

8. Стальной лист ($\lambda = 14 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $c = 461 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$, $\rho = 7817 \text{ кг}/\text{м}^3$) с размерами $1 \times 1 \times 0,05 \text{ м}$ с начальной температурой 450 К охлаждается воздухом с температурой 300 К. Коэффициент теплообмена на поверхности листа $\alpha = 85 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. Определить температурное поле листа и построить график его изменения от времени.

9. Стальной вал ($\lambda = 14 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $c = 461 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$, $\rho = 7817 \text{ кг}/\text{м}^3$) длиной 2 м и диаметром 0,2 м с начальной температурой 450 К охлаждается воздухом с температурой 300 К. Коэффициент теплообмена на поверхности вала $\alpha = 75 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. Определить температурное поле вала и построить график его изменения от времени.

10. Стеклянный шар ($\lambda = 0,81 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $c = 800 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$, $\rho = 2800 \text{ кг}/\text{м}^3$) диаметром 0,2 м с начальной температурой 600 К охлаждается воздухом с температурой 300 К. Коэффициент теплообмена на

поверхности шара $\alpha = 75 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. Определить температурное поле шара и построить график его изменения от времени.

11. Сопло реактивного двигателя изготовлено из легированной стали ($\lambda = 22 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $c = 460 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$, $\rho = 7848 \text{ кг}/\text{м}^3$) толщиной $0,0065 \text{ м}$. Коэффициент теплоотдачи на стороне пламени равен $8500 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$, а температура пламени во время горения $2200 \text{ }^\circ\text{С}$. Начальная температура сопла равна $30 \text{ }^\circ\text{С}$, а максимально допустимая рабочая температура для данной стали не должна превышать $1100 \text{ }^\circ\text{С}$. Считая наружную поверхность сопла теплоизолированной, определить допустимую продолжительность работы двигателя, температуры поверхностей в процессе горения (изобразить графически).

12. Длинный металлический стержень ($\lambda = 22 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $c = 460 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$, $\rho = 7848 \text{ кг}/\text{м}^3$) прямоугольного поперечного сечения $7,5 \times 15 \text{ см}$ нагревается до равномерной температуры $500 \text{ }^\circ\text{С}$, после чего подвергается закалке в большой массе жидкости с температурой $50 \text{ }^\circ\text{С}$. Коэффициент теплоотдачи во время процесса закалки равен $1365 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. Определить температуры на оси, ребре и в центрах граней стержня, изобразить их графически в зависимости от времени.

13. Для обеспечения прессовой посадки длинный стальной вал ($\lambda = 17 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $c = 486 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$, $\rho = 7753 \text{ кг}/\text{м}^3$) с номинальным диаметром $0,2 \text{ м}$ охлаждают от начальной температуры 300 К погружением в жидкий азот. Коэффициент теплообмена на поверхности вала $150 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. При охлаждении диаметр вала должен уменьшиться на $0,2 \text{ мм}$. Температурный коэффициент линейного расширения $\alpha_{\text{лр}} = 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ 1}/\text{К}$. Определить продолжительность процесса охлаждения, среднюю температуру и температуры на поверхности и оси вала в этот момент времени. Построить графики изменения температур (средней, оси, поверхности) вала в процессе охлаждения.

14. Мясной брикет ($\lambda = 0,48 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $c = 3960 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$, $\rho = 1050 \text{ кг}/\text{м}^3$) размером $40 \times 60 \times 8 \text{ см}$ с начальной температурой 300 К охлаждают в холодильной камере с температурой 230 К . Коэффициент

теплообмена на поверхности брикета $15 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. Определить длительность охлаждения мяса до средней температуры 250 К . Построить графики изменения температур (средней, в середине и на вершине) мясного брикета во времени. (Примечание: удельная теплота кристаллизации учтена соответствующим увеличением теплоемкости).

15. Ягоды клубники ($\lambda = 0,52 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $\rho = 970 \text{ кг}/\text{м}^3$, $c = 4900 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$) с начальной температурой 300 К замораживаются в холодильной камере с температурой 230 К . Коэффициент теплообмена на поверхности ягод $15 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. Определить длительность охлаждения ягод до средней температуры 250 К , считая их шариками с диаметром 3 см . Определить среднюю скорость движения фронта кристаллизации. Построить график движения фронта кристаллизации во времени. (Примечание: удельная теплота кристаллизации учтена соответствующим увеличением теплоемкости).

16. В магазине продается мороженое, форма которого имеет вид цилиндра с длиной 15 см и диаметром 5 см . Его начальная температура $-20 \text{ }^\circ\text{C}$. Теплофизические свойства мороженого: $\lambda = 0,76 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $c = 5000 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$, $\rho = 845 \text{ кг}/\text{м}^3$. Температура окружающего воздуха $20 \text{ }^\circ\text{C}$, коэффициент теплообмена $\alpha = 15 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. Через какое время мороженое, вынутое из морозильника магазина, начнет таять (температура плавления мороженого $\sim 0 \text{ }^\circ\text{C}$)? Если мороженое сразу завернуть в пакет, чтобы уменьшить приток тепла, коэффициент конвективной теплоотдачи снижается до $5 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. Рассчитать время до начала таяния в этом случае. Определить температуры в середине и на вершине брикета мороженого, построить график их изменения во времени.

17. Произвести расчет первых 5 корней характеристического уравнения для расчета нестационарного температурного поля бесконечной пластины, соответствующих 20 различным числам Bi .

18. Произвести расчет первых 5 корней характеристического уравнения для расчета нестационарного температурного поля бесконечного цилиндра, соответствующих 20 различным числам Bi .

19. Произвести расчет первых 5 корней характеристического уравнения для расчета нестационарного температурного поля шара, соответствующих 20 различным числам Bi .

20. Определить температуры куриного яйца ($\lambda = 0,75 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $\rho = 1080 \text{ кг}/\text{м}^3$, $c = 4000 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$) в центре, на поверхности и среднюю, построить график их изменения во времени (длительность процесса 15 минут). Яйцо вынутого из холодильника ($T = 5 \text{ }^\circ\text{C}$) и опущенного в кипящую воду ($\alpha = 3000 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$). Считать, что яйцо имеет сферическую форму с диаметром 4,8 см. Рассчитать зависимость мощности расходуемой на нагрев яйца от времени и построить ее график.

21. Сырой материал ($\rho = 4000 \text{ кг}/\text{м}^3$, $\lambda = 2,0 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $a = 8 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$) перед применением на сборочном конвейере нужно предварительно нагреть до минимальной температуры $200 \text{ }^\circ\text{C}$. Материал нагревают на ленте конвейера, которая движется через открытую печь с температурой $700 \text{ }^\circ\text{C}$ и коэффициентом конвективной теплоотдачи от горячего воздуха к материалу $450 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. Сырой материал может быть в виде гранул диаметром от 4 до 8 см с интервалом 0,5 см. Начальная температура материала на входе в печь $30 \text{ }^\circ\text{C}$. Сколько времени займет предварительный нагрев гранул разных размеров? Длина ленты транспортера 8 м, ширина 1 м, на 1 м^2 ленты помещается 400, 330, 256, 220, 180, 160, 130, 120, 100 в зависимости от их размера. Найти массовую производительность конвейера для гранул различных размеров, если скорость движения ленты регулируется таким образом, чтобы обеспечить требуемую минимальную температуру тех и других шариков. По результатам расчетов построить графики в зависимости от размера гранул.

22. Кусок мяса ($\lambda = 0,9 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $\rho = 960 \text{ кг}/\text{м}^3$, $c = 5000 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$) имеет форму короткого цилиндра длиной 20 см и диаметром 10 см. Определить температуры мяса на поверхности, в середине и среднюю в процессе приготовления, построить график их изменения во времени. Начальная температура мяса $10 \text{ }^\circ\text{C}$, температура в духовке $220 \text{ }^\circ\text{C}$, а коэффициент теплообмена $30 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. Сколько времени займет процесс приготовления, предполагая, что мясо прожаривается при $75 \text{ }^\circ\text{C}$. Рассчитать

зависимость мощности расходуемой на нагрев мяса от времени и построить ее график.

23. Апельсины ($\lambda = 0,47 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $\rho = 940 \text{ кг}/\text{м}^3$, $c = 3800 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$) имеют начальную температуру $5 \text{ }^\circ\text{C}$. Температура воздуха внезапно падает до $-10 \text{ }^\circ\text{C}$. Как долго апельсины диаметром $0,1 \text{ м}$ могут находиться в таких условиях, если они могут без ущерба выдерживать температуру $-3 \text{ }^\circ\text{C}$, а коэффициент теплообмена на их поверхности $10 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$? Рассчитать и построить графики температур средней, поверхности и середины апельсина в процессе его охлаждения.

24. Стенка цилиндра криогенного гелиевого детандера изготовлена из нержавеющей стали ($\lambda = 14 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $c = 461 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$, $\rho = 7817 \text{ кг}/\text{м}^3$) толщиной 1 мм . Наружная поверхность стенки теплоизолирована. Цилиндр половину цикла заполнен гелием с температурой 50 К , а вторую половину цикла - с температурой 15 К . Определить температуры на поверхностях цилиндра и среднюю температуру в течение цикла, если коэффициент теплообмена на внутренней поверхности цилиндра $\alpha = 1000 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$, а длительность цикла $0,2 \text{ с}$. Определить тепловые потери за счет тепловой инерции стенок, если диаметр и длина цилиндра $0,04 \text{ м}$ и $0,07 \text{ м}$ соответственно.

25. В магазине продается мороженое. Его начальная температура $-10 \text{ }^\circ\text{C}$. Размеры упаковки $10 \times 15 \times 20 \text{ см}$. Теплофизические свойства мороженого: $\lambda = 0,76 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $c = 5000 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$, $\rho = 845 \text{ кг}/\text{м}^3$. Температура окружающего воздуха $25 \text{ }^\circ\text{C}$, коэффициент теплообмена $\alpha = 25 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. Через какое время мороженое, вынутое из морозильника магазина, начнет таять (температура плавления мороженого $\sim 0 \text{ }^\circ\text{C}$)? Если мороженое сразу завернуть в пакет, чтобы уменьшить приток тепла, коэффициент конвективной теплоотдачи снижается до $5 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. Рассчитать время до начала таяния в этом случае. Определить температуры в середине и на вершине брикета мороженого, построить график их изменения во времени.

3.3. Теплообмен излучением

1. Диаметры внутренней и наружной оболочек сосуда Дьюара, равны соответственно 0,3 м и 0,5 м. Температура наружной оболочки 300 К. Сосуд заполнен жидким азотом на половину объема. Температуры поверхностей внутренней оболочки, соприкасающихся с жидким азотом и его парами, равны соответственно 77 К и 90 К. Определить зависимость радиационного теплового потока, от степени черноты оболочек сосуда и построить её график (степень черноты одинакова для всех поверхностей). Определить тепловой поток и его плотность на внутренней оболочке сосуда, если степень черноты всех поверхностей $\varepsilon = 0,1$.

2. Внутренняя и наружная оболочки сосуда Дьюара представляют собой цилиндры диаметром 0,5 м и 0,7 м соответственно. Высота внутреннего цилиндра 0,7 м. Расстояния между торцевыми поверхностями оболочек 0,1 м. Температура наружной оболочки 300 К. Сосуд заполняют жидким азотом. Температуры поверхностей внутренней оболочки, соприкасающихся с жидким азотом и его парами, равны соответственно 77 К и 90 К. Степень черноты всех поверхностей $\varepsilon = 0,1$. Определить зависимость радиационного теплового потока от уровня азота в сосуде и построить её график. Рассчитать средний тепловой поток.

3. Диаметры внутренней и наружной оболочек сосуда Дьюара, равны 0,5 м и 0,7 м соответственно. Температура наружной оболочки 300 К. Сосуд заполняют жидким азотом. Температуры поверхностей внутренней оболочки, соприкасающихся с жидким азотом и с парами азота, равны соответственно 77 К и 90 К. Степень черноты всех поверхностей $\varepsilon = 0,1$. Определить зависимость радиационного теплового потока от уровня азота в сосуде и построить её график. Определить продолжительность испарения азота из полностью заполненного сосуда (при расчетах конвективным и кондуктивным тепловыми потоками, а также радиационным тепловым потоком во внутренней оболочке пренебречь).

4. В опытной установке для определения степени черноты тел, вольфрамовая проволока диаметром 3 мм и длиной 20 см помещена в вакуумную камеру, поверхность которой велика по сравнению с

поверхностью проволоки. Температура поверхности камеры поддерживается постоянной и равной 300 К. При нагреве проволоки до температур 1300, 1800, 2300 К затрачивалась электрическая мощность 45, 237, 839 Вт соответственно. Определить степень черноты вольфрама при этих температурах и построить график зависимости степени черноты от температуры.

5. Монохроматические излучательная и поглощательная способности поверхности одинаковы и в интервале длин волн от 0 до 7 мкм равны 0,5, а далее линейно уменьшаются до 0 при длине волны 17 мкм. Падающее на поверхность излучение чёрное. Построить графики зависимостей интегральных излучательной и поглощательной способностей от температуры поверхности и от температуры чёрного излучения. Определить их значения для температуры 2000 К.

6. Диаметр наружной оболочки сосуда Дьюара 0,7 м, а внутренней 0,5 м. Внутренняя оболочка изготовлена из стеклопластика (средняя удельная теплоемкость $c = 1470$ Дж/(кг · К)) толщиной 3 мм. Температура наружной оболочки сосуда 300 К. Температура одной половины внутренней оболочки 80 К, а второй 100 К. Степень черноты всех поверхностей 0,2. Построить график зависимости температуры частей внутренней оболочки от времени. Сколько потребуется времени для достижения температуры 290 К (при расчетах, конвективным и кондуктивным тепловыми потоками пренебречь; радиационные потоки между частями внутренней оболочки не учитывать)?

7. Температура воздуха в помещении с размерами 4×5×3 м 27 °С. Наружная стена (4×3 м) имеет температуру 17 °С, а остальные стены 22 °С. Термометр располагают на продольной оси комнаты. Коэффициент теплообмена на поверхности термометра 5 Вт/(м² · К). Степень черноты термометра 0,2. Степень черноты поверхности стен 0,5. Построить график зависимости показаний термометра, абсолютной и относительной погрешностей измерения температуры от величины расстояния между термометром и наружной стеной. Каковы эти значения при нахождении термометра в центре комнаты?

8. Листовое кварцевое стекло пропускает 92% падающего излучения в диапазоне длин волн от 0,35 до 2,7 мкм и непрозрачно для других длин волн. Построить графики зависимостей абсолютной и относительной величин плотности теплового потока, прошедшего через стекло, от температуры излучающей поверхности (исследовать диапазон от 100 до 6000 К). Какими будут значения этих величин для температур 300 К (комнатная температура) и 5700 К (температура поверхности Солнца)?

9. Температура воздуха в помещении с размерами 4×5×3 м 27 °С. Наружная стена (4×3 м) имеет температуру 17 °С, а остальные стены — 22 °С. Термометр расположен в центре комнаты. Степень черноты термометра 0,2. Коэффициент теплообмена на поверхности термометра 2 Вт/(м²·К). Построить графики зависимостей показаний термометра, абсолютной и относительной погрешностей измерения температуры от величины степени черноты поверхности стен (для всех стен одинакова). Какими будут эти значения для $\varepsilon = 0,5$?

10. Монохроматические излучательные способности двух красок имеют значения:

$$\alpha_{\lambda 1} = 0,1, \quad \alpha_{\lambda 2} = 0,2 \quad \text{при} \quad 0 \text{ мкм} \leq \lambda \leq 1 \text{ мкм};$$

$$\alpha_{\lambda 1} = 0,2, \quad \alpha_{\lambda 2} = 0,2 \quad \text{при} \quad 1 \text{ мкм} \leq \lambda \leq 2 \text{ мкм};$$

$$\alpha_{\lambda 1} = 0,2, \quad \alpha_{\lambda 2} = 0,6 \quad \text{при} \quad 2 \text{ мкм} \leq \lambda \leq \infty.$$

Построить график зависимости интегральной излучательной способности от температуры поверхности. Определить значения интегральной степени черноты для поверхностей с температурой а) 300 К; б) 1800 К; в) 5500 К.

11. Для сушки краски на прямоугольной плите используют тепловые лампы. Окрашенная поверхность размером 4×4 м имеет излучательную способность 0,25. Тепловые лампы размещены на прямоугольнике такого же размера и могут рассматриваться как диффузные излучатели с температурой 1200 К и излучательной способностью 0,9. Процесс сушки происходит в большой комнате с температурой 20 °С. Принимая, что тыльные стороны поверхностей теплоизолированы, и пренебрегая конвекцией, построить графики зависимостей температуры плиты и мощности нагревателей от

расстояния между тепловыми лампами и окрашенной поверхностью. Какое необходимо расстояние для обеспечения температуры на плите 450 К? Какую при этом необходимо подводить мощность к нагревателям?

12. Длинный конструкционный элемент имеет поперечное сечение в форме шестиугольника. Все поверхности шестиугольника серые, непрозрачные, изотермические. Температуры и излучательные способности поверхностей равны $T_1 = T_3 = 400 \text{ К}$; $T_2 = T_4 = 500 \text{ К}$; $T_5 = T_6 = 300 \text{ К}$; $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0,2$; $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0,3$; $\varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0,4$. Пренебрегая конвекцией и теплопроводностью между поверхностями, определить плотности результирующего теплового потока для каждой поверхности.

13. Длинный конструкционный элемент имеет поперечное сечение в форме шестиугольника. Все поверхности шестиугольника серые, непрозрачные, изотермические. Известно, что $\varepsilon_1 = 0,1$; $\varepsilon_2 = 0,2$; $\varepsilon_3 = 0,3$; $\varepsilon_4 = 0,4$; $\varepsilon_5 = 0,5$; $\varepsilon_6 = 0,6$; $T_1 = 300 \text{ К}$; $T_2 = 400 \text{ К}$; $T_3 = 500 \text{ К}$. На поверхностях 4—6 результирующие тепловые потоки равны нулю. Пренебрегая конвекцией и теплопроводностью между поверхностями, определить плотности результирующих тепловых потоков для поверхностей 1—3 и температуры поверхностей 4—6.

14. Сосуд Дьюара наполнен жидким азотом ($T = 77 \text{ К}$). Зазор между оболочками сосуда существенно меньше их диаметра. Найти толщину пенополиуретановой ($\lambda = 0,02 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$) изоляции, которой можно было бы заменить вакуумную изоляцию в зависимости от степени черноты оболочки. Построить график этой зависимости. Какая необходима толщина изоляции, если $\varepsilon = 0,04$?

15. Электрический нагреватель изготовлен в виде керамической трубы, обмотанной нихромовым проводом. Диаметр нагревателя 25 мм. Степень черноты нихрома 0,7. Температура окружающего воздуха 20 °С, а стен помещения 17 °С. Определить плотность теплового потока, доли радиационной и конвективной составляющих потока в зависимости от температуры нагревателя. Построить графики этих зависимостей. Какими

будут искомые величины при температуре нагревателя 600 °С? Для определения коэффициента теплообмена использовать зависимость:

$$Nu = \left[0,6 + 0,387 \left(\frac{Gr \cdot Pr}{\left[1 + 0,56/Pr \right]^{1,78}} \right)^{0,17} \right]^2,$$

где: $Nu = \frac{\alpha \cdot d}{\lambda}$; $Pr = \frac{\nu}{a}$; $Gr = \frac{\beta g \rho^2 \Delta T_c d^3}{\mu}$.

16. Для алюминиевой, мраморной и покрытой белой краской поверхностей рассчитать их интегральную степень черноты, как функцию от температуры поверхности. Построить график зависимости. Определить степень черноты поверхностей для температур: а) 300 К; б) 2000 К; в) 5500 К

17. Рассчитать доли энергии излучения в ультрафиолетовой, видимой и инфракрасной области спектра, излучаемые поверхностями из огнеупорной глины, платины и молибдена при различной их температуре. Какие температуры должны иметь эти поверхности, чтобы: а) 60%; б) 80% энергии излучения приходилось на инфракрасную область спектра?

18. Внутренняя и наружная оболочки сосуда Дьюара представляют собой цилиндры диаметром 0,5 м и 0,7 м соответственно. Высота внутреннего цилиндра 0,7 м. Расстояния между торцевыми поверхностями оболочек 0,1 м. Температура наружной оболочки 300 К. Сосуд заполнен жидким азотом на половину объема. Температуры поверхностей внутренней оболочки, соприкасающихся с жидким азотом и его парами, равны соответственно 77 К и 90 К. Определить зависимость радиационного теплового потока, от степени черноты оболочек сосуда и построить её график (степень черноты одинакова для всех поверхностей). Определить тепловой поток и его плотность на внутренней оболочке сосуда, если степень черноты всех поверхностей $\varepsilon = 0,1$.

19. Произвести расчет углового коэффициента между элементарной площадкой и прямоугольником со сторонами a и b , один из углов которого

находится над ней в параллельной плоскости на высоте h методом статистической имитации и по аналитической зависимости. Сравнить полученные результаты. Исследовать влияние относительных размеров прямоугольника a/h , b/h на величину углового коэффициента.

20. Произвести расчет углового коэффициента между элементарной площадкой и кругом радиуса R , находящимся над ней на высоте h в параллельной плоскости методом статической имитации и по аналитической зависимости. Сравнить полученные результаты. Исследовать влияние относительного размера круга R/h на величину углового коэффициента.

21. Определить относительную плотность энергии излучения, приходящуюся на ультрафиолетовую, видимую и инфракрасную области спектра при различной температуре для поверхностей: а) абсолютно черной; б) покрытой белой краской; в) молибденовой. Построить графики зависимостей. Рассчитать эти значения для температуры: а) 300 К; б) 1500 К; в) 5500 К.

22. Трубопровод с наружным диаметром 0,2 м заключен в кожух с диаметром 0,25 м. Поверхности трубопровода и кожуха, для снижения радиационных потерь, покрыты белой краской, степень черноты которой зависит от длины волны. Температура трубопровода 80 °С. Определить теплотери с одного погонного метра трубопровода в окружающую среду с температурой 0 °С. Коэффициент теплообмена на наружной поверхности кожуха $\alpha = 5 \text{ Вт/м}^2 \text{ К}$. Коэффициент теплопередачи между трубопроводом и кожухом $k = 0,5 \text{ Вт/м}^2 \text{ К}$. Каковы доли потоков излучения внутри и снаружи кожухов? Как изменятся потери, если поверхность покрыть красной краской?

23. Для сушки круглой поверхности диаметром 2 м покрытой краской с излучательной способностью 0,45 при высокой температуре, используют тепловые излучатели. Диффузные излучатели с излучательной способностью 0,93 размещены на круглой поверхности с диаметром 1,4 м, расположенной напротив на расстоянии 1 м. Процесс сушки происходит в большой комнате с температурой 20 °С. Считая, что тыльные поверхности теплоизолированы, и пренебрегая конвекцией, рассчитать зависимость мощности тепловых излучателей от необходимой температуры сушки. Определить значение

средней температуры излучающей поверхности при этом. Какие значения мощности и температуры излучающей поверхности необходимы для сушки краски при температуре 423 К?

24. Определить интегральную степень черноты поверхностей покрытых белой, желтой, красной и черной красками, как функцию от температуры поверхности. Построить графики зависимости. Рассчитать эти значения для температур: а) 300 К; б) 1500 К; в) 5500 К.

25. Для снижения радиационных теплотерь внутреннюю поверхность материала, используемого для изготовления верхней одежды покрывают пленкой со степенью черноты ϵ . Принять, что температура костюма 295 К, степень его черноты 0,7; теплообмен между костюмом и верхней одеждой соответствует теплообмену между двумя бесконечными пластинами. Коэффициент теплообмена на наружной поверхности верхней одежды $20 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}$, а температура окружающего воздуха 260 К. Рассчитать общие теплотери, долю потерь тепла излучением и равновесную температуру верхней одежды в зависимости от ее степени черноты. Определить значения этих величин для степени черноты материала верхней одежды 0,1.

26. В печи нагревают плоский квадратный ($1 \times 1 \text{ м}$) стальной лист с начальной температурой 300 К толщиной 3 мм, который можно рассматривать как серое тело с излучательной способностью 0,40. Нагреватели таких же размеров расположены выше и ниже нагреваемого листа на расстоянии 0,5 м. Мощность нагревателей 100 кВт и излучательная способность 0,90. Тыльная сторона обоих нагревателей теплоизолирована. Температура боковых стенок камеры 450 К и степень черноты 0,20. Какова должна быть мощность нагревателей, чтобы можно было нагреть лист до 1000 К, при мощности нагревателей в 1,5 раза выше? Пренебрегая конвекцией, рассчитать результирующий поток и температуру листа, температуру нагревателей и теплотери через боковую поверхность от времени нагрева. Сколько времени необходимо нагревать лист до достижения температуры 1000 К?

27. Две параллельные пластины большой протяженности в направлении перпендикулярном плоскости рисунка, находятся на расстоянии $h = 0,2$ м одна над другой. Ширина пластин $l = 0,1$ м, а степень черноты нижней пластины — 0,90, верхней — 0,45. Температура и плотность результирующего теплового потока на нижней пластине, равная 10 кВт/м^2 , равномерны по всей пластине. Внешнюю среду рассматривать как абсолютно черное тело с температурой 300 К. Пренебрегая кондуктивным тепловым потоком в нагреваемой пластине, найти распределение температур по ее ширине при достижении стационарного режима.

28. Куски мяса помещены над угольной жаровней. Слой древесного угля имеет площадь $0,6 \times 0,8$ м, излучательную способность 0,80 и температуру 1000 К. Куски мяса расположены параллельно углям и имеют площадь, равную площади древесного угля. Излучательная способность кусков мяса 0,40. Мясо жарится на открытом воздухе, температура которого 300 К. Во время поджаривания конвективный теплообмен между углем и мясом осуществляется с коэффициентом теплопередачи $50 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}$. Конвективным теплообменом от верхней поверхности кусков мяса и нижней поверхности слоя углей можно пренебречь. Определить равновесную температуру кусков мяса и расход угля для поддержания стационарных условий в зависимости от расстояния между мясом и жаровней. Какими будут эти параметры, если пространство между жаровней и углем полностью закрыто идеально отражающей фольгой? Теплотворная способность угля $2,8 \cdot 10^7 \text{ Дж/кг}$.

29. Печь цилиндрической формы используется для нагрева круглого объекта диаметром 0,5 м. Нагревателем мощностью 1,3 кВт является круглое дно печи с таким же диаметром. Нижняя половина боковой поверхности высотой 0,25 м так же является нагревателем, мощность которого можно плавно изменять в пределах 0—1 кВт. Термическое сопротивление теплопередачи от всех поверхностей к окружающей среде $2 \text{ м}^2 \cdot \text{К/Вт}$, а ее температура 300 К. Излучательная способность обоих нагревателей — 0,90, объекта — 0,50, боковой поверхности — 0,85. Определить равновесные температуры поверхностей и тепловой поток к нагреваемому объекту в

зависимости от мощности регулируемого нагревателя. Чему равны эти величины при мощности 0,5 кВт?

30. Внутри цилиндрической печи диаметром 0,2 м нагревается от температуры 300 К молибденовый стержень диаметром 0,03 м, степень черноты которого зависит от длины волны. Длина печи и стержня 1 м. Торцевые поверхности печи теплоизолированы, а боковая поверхность является нагревателем мощностью 1 кВт и степенью черноты 0,90. Степень черноты стержня зависит от длины волны. Рассчитать динамику нагрева стержня.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Теоретические основы хладотехники. Тепломассообмен. /Под ред. Э.И. Гуйго.— М.: Агропромиздат, 1986.— 320 с.
2. Исаченко В.П., Осипова В.А. Теплопередача.— М.: Энергия, 1975.— 488 с.
3. Михеев М.А., Михеева И.М. Основы теплопередачи.— М.: Энергия, 1977.
4. Юшко С.В., Лысикова И.В. Теплообмен излучением диффузных поверхностей: Учебно–методическое пособие.— Харьков: НТУ «ХПИ», 2006.— 96 с.
5. Дьяконов В. MathCAD 8/2000: Специальный справочник.— СПб.: Питер, 2001.— 592 с.
6. Очков В.Ф. MathCAD PLUS 6.0 для студентов и инженеров.— М.: ТОО «Компьютер Пресс», 1996.— 238 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица П1 — Спектральная степень черноты некоторых материалов.

Длина волны, мкм	Материал, состояние поверхности											
	Алюминий промышлен.	Алюминий анодирован.	Глина огнеупорная	Мрамор	Кирпич белый	Краска белая	Краска желтая	Краска красная	Краска черная	Платина	Молибден	Штукатурка
0,5	0,6	0,18	0,09	0,22	0,19	0,18	0,39	–	–		0,55	0,21
0,6	–	–	–	0,20	–	0,14	0,3	0,74	0,97		–	0,2
0,95	–	0,1	0,09	0,17	0,18	0,16	–	0,59	0,97		0,43	0,12
1,8	–	–	–	0,41	–	–	–	–	–	0,22	–	0,46
2,1	0,37	0,07	0,1	0,48	0,19	–	–	–	–		0,18	0,42
2,9	–	0,76	0,6	0,95	0,72	–	–	–	–		–	0,95
3,6	0,26	0,3	0,43	0,57	0,7	–	–	–	–		0,11	0,75
4,0	–	–	0,37	–	–	–	–	–	–	0,15	–	0,64
4,4	–	0,12	0,52	0,9	0,8	0,77	0,59	0,70	0,97		–	0,9
5,0	–	0,21	0,83	–	–	–	–	–	–	0,13	–	–
5,4	0,18	0,17	0,85	0,72	0,92	–	–	–	–		0,08	0,82
7,0	–	–	0,92	0,85	–	–	–	–	–	0,11	–	0,81
8,0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0,1	–	0,9
8,8	–	0,88	0,65	–	0,83	0,95	0,95	0,96	0,96	–	–	0,6
9,3	0,11	0,87	0,59	0,92	0,82	–	–	–	–		0,06	0,58

Таблица П2 — Теплопроводность материалов.

Материал	λ , Вт/(м·К)	Материал	λ , Вт/(м·К)
Алюминий	204	Новоасбозурит	0,175
Асбест	0,151	Ньювель	0,11
Асбозурит	0,213	Пенопласт	0,05
Асбослюда	0,208	Пеношамот	0,29
Бетон	1,28	Полиэтилен	0,29
Бронза	64	Пористые отложения, пропитанные нефтепродуктами	0,1
Вата минеральная	0,052	Пробковые плиты	0,047
Вермикулит	0,328	Резина	0,16
Вермикулитовые плиты	0,186	Ржавчина	1,15
Винипласт	0,165	Сажа	0,09
Диатомит молотый	0,314	Снег уплотненный	0,46
Кирпич:		Совелит	0,09
Диатомовый	0,25	Сосна поперек волокон	0,151
Динасовый	0,32	Сталь углеродистая	45
Красный	0,76	Сталь нержавеющая	18
Силикатный	0,82	Стекловата	0,047
Шамотный	1,14	Стекло обыкновенное	0,745
Латунь	93	Титан	15
Лед	2,22	Чугун	90
Масляный слой загрязнения	0,15	Шлаковата	0,16
Медь	384	Фарфор	1,04
Накипь	1,75		

Таблица ПЗ — Интегральный коэффициент теплового излучения материалов.

Материал	ε	Материал	ε
Алюминий:		Медь:	
шероховатый	0,055	окисленная	0,62
окисленный	0,15	полированная	0,02
полированный	0,048	Никель окисленный	0,4
Алюминиевая краска	0,5	Нихромовая проволока	0,96
Бетон	0,8	Серебро полированное	0,02
Железо литое необработанное	0,91	Сталь:	
Кирпичная кладка (красный кирпич)	0,93	окисленная	0,80
Латунь:		окисленная, шероховатая	0,95
окисленная	0,6	полированная	0,54
полированная	0,03	Хром	0,17
прокатанная	0,20	Чугун:	
Масляная краска	0,94	обточенный	0,65
		шероховатый, окисленный	0,96

Таблица П4 — Удельная теплоемкость газов c_p , кДж/(кг·К), при давлении 0,1 МПа.

T, K	Азот	Аргон	Водород	Кислород	Окись углерода	Двуокись углерода
260	1,041	0,522	14,15	0,916	1,040	-
280	1,041	0,522	14,24	0,917	1,040	0,830
300	1,041	0,522	14,31	0,920	1,041	0,851
350	1,042	0,521	14,43	0,929	1,043	0,900
400	1,045	0,521	14,48	0,942	1,048	0,942
450	1,050	0,521	14,50	0,956	1,055	0,981
500	1,056	0,521	14,52	0,972	1,064	1,020

**Зависимости степени черноты и поглощательной способности
от длины волны для некоторых материалов**

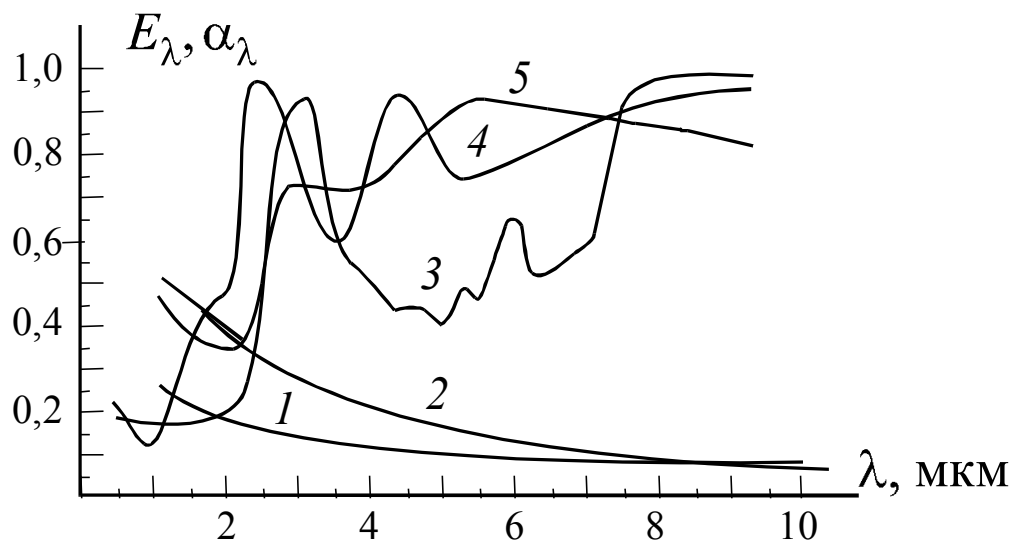


Рисунок П1 — 1 — алюминий полированный, 2 — алюминий промышленный, 3 — алюминий анодированный, 4 — мрамор, 5 — кирпич белый

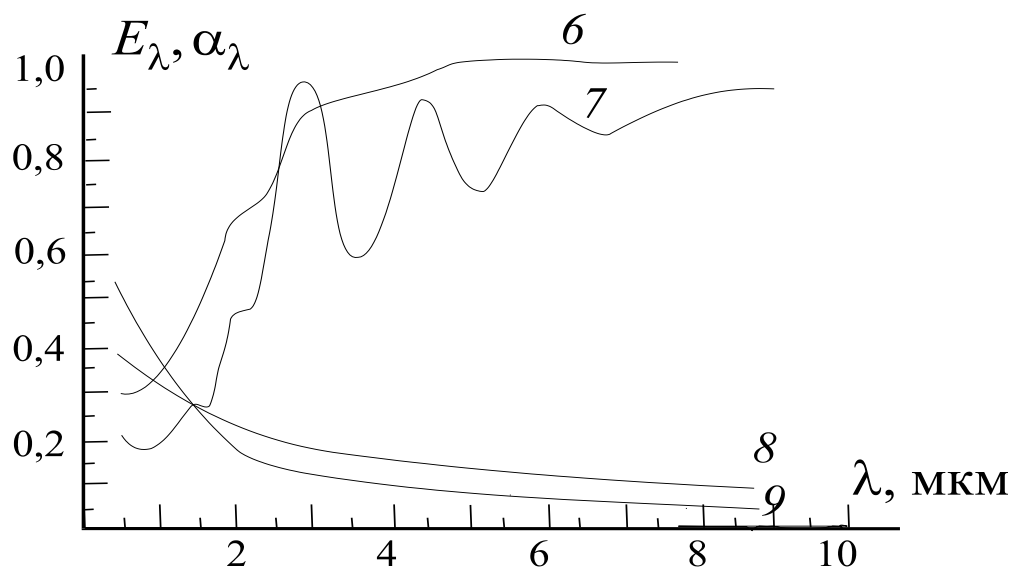


Рисунок П2 — 6 — белая эмаль, 7 — гипс, 8 — молибден, 8 — штукатурка

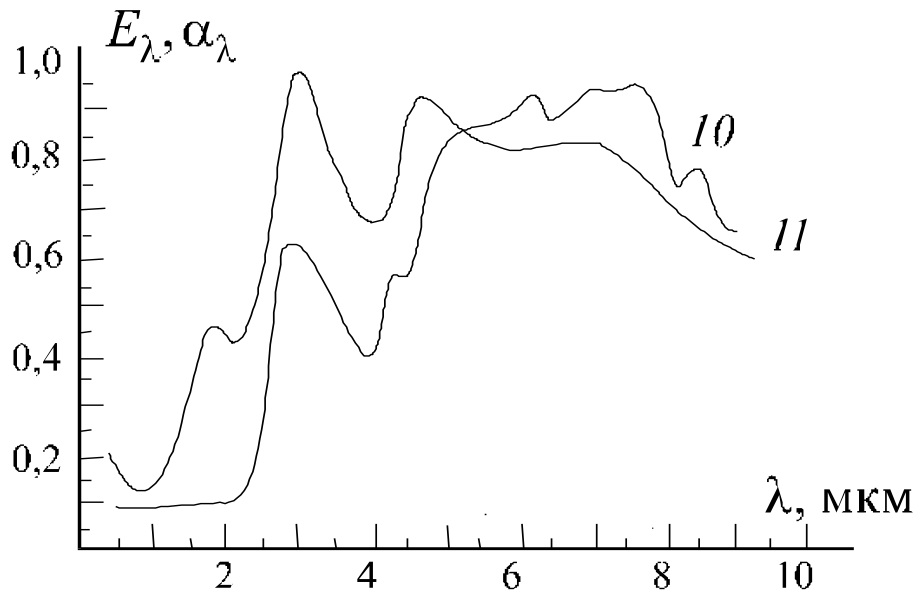


Рисунок ПЗ — 10 — шамот (глина), 11 —штукатурка