ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

7 • 2005

ФІЗИКА

УДК 658.51.012



В. П. Демуцкий, В. С. Пигнастая, О. М. Пигнастый

# Стохастическое описание экономико-производственных систем с массовым выпуском продукции

*(Представлено академиком НАН Украины С. В. Пелетминским)*

*A mathematical model of the mass production dynamics in engineering is constructed. The state of a production system at any moment is given by a point in the two-dimensional phase space. The distribution function for a base product is introduced, and the equation for this function as an analog of a kinetic equation in physics is written. The engineering-production and generative functions are defined.*

Моделирование сложных экономических систем является эффективным методом их исследования [1]. Один из распространенных классов образуют системы, в которых детерминированный характер наблюдаемых процессов сочетается с их стохастической природой. Закономерности, присущие равновесным состояниям в системах экономического обмена, во многом аналогичны тем, которые имеют место в физических (термодинамических) системах. Они оказались столь глубокими и полезными, что провозглашены для термодинамических систем и систем экономического обмена в качестве неких общих принципов: Ле Шателье-Самуэльсона, Карно-Хикса и др. [2].

На основании данных принципов функционирование современного массового производства может быть представлено в виде стохастического процесса, в ходе которого производственная система переходит из одного состояния в другое [3]. Состояние системы можно определить как состояние общего числа $N$ базовых продуктов производственной системы. Под базовым продуктом (или предметом труда) будем понимать элемент производственной системы, на который происходит перенос стоимости живого труда, сырья, материалов и орудий труда в ходе его движения по операционной цепочке технологических карт. В ходе такого движения происходит превращение исходного сырья и материалов в готовый продукт путем целенаправленного воздействия общественно-полезного труда. Поведение базового продукта подчиняется определенным законам в соответствии с установленным на предприятии технологическим процессом, производственным планом, наличием трудовых ресурсов и оборудования. Состояние базового продукта будем описывать микроскопическими величинами $(S_j, \mu_j)$, где $S_j$ (грн) и $\mu_j = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S_j}{\Delta t}$ (грн/ч) — соответственно сумма общих затрат и затрат в единицу времени, перенесенные производственной системой на $j$-й базовый продукт, $0 < j \leqslant N$. Состояние системы в некоторый момент времени будет определено, если определены микроскопические величины $(S_1, \mu_1; \ldots S_N, \mu_N)$, а в любой другой момент времени найдено из уравнений состояния базовых продуктов:

$$\frac{dS_j}{dt} = \mu_j, \qquad \frac{d\mu_j}{dt} = f_j(t, S), \tag{1}$$

где $f_j(t, S)$ — инженерно-производственная функция, характеризующая установленный на предприятии технологический процесс изготовления продукции в соответствии с производственным планом, наличием трудовых ресурсов и оборудования. Однако, если количество базовых продуктов $N$ много больше единицы, то решить систему (1) из $2N$-уравнений практически невозможно. Последнее уточнение требует перехода от микроскопического описания производственной системы к макроскопическому с элементами вероятностной природы. Основная трудность в таком описании состоит в том, чтобы выделить характеристики микросостояний базовых продуктов, которые можно было бы измерить на уровне состояния предприятия. Вместо того, чтобы рассматривать состояние производственной системы с микровеличинами $(S_1, \mu_1; \ldots; S_N, \mu_N)$, введем соответствующим образом нормированную дискретную функцию распределения числа $N$ базовых продуктов в фазовом пространстве $(S, \mu)$. Каждая точка в данном пространстве будет задавать состояние базового продукта. Разумно ожидать, что при больших $N$ эту функцию будет хорошо аппроксимировать непрерывная функция распределения базовых продуктов $\chi(t, S, \mu)$.

Разобьем фазовое пространство на такое число ячеек, чтобы размеры ячейки $\Delta\Omega = \Delta S \Delta\mu$ были много меньше характерных размеров производственной системы и в то же время содержали внутри себя большое число базовых продуктов. Вместо того, чтобы фиксировать точные значения микроскопических величин базового продукта, будем приближенно характеризовать состояние производственной системы числом базовых продуктов в каждой ячейке $\Delta\Omega$. Если размеры ячейки достаточно малы, то приближенное описание будет нести в себе почти столь же подробную информацию, что и точное.

Таким образом, мы приходим к необходимости наряду с основным пределом при $N \to \infty$ рассматривать и предельный случай при стремящихся к нулю размерах ячейки. В силу того, что величина $\chi(t, S, \mu)\, d\Omega$ представляет собой число базовых продуктов в бесконечно малой ячейке $\Delta\Omega$ фазового пространства $(S, \mu)$, мы можем по изменению фазовой координаты $S$ и фазовой скорости $\mu$ базового продукта со временем судить и об изменении самой функции $\chi(t, S, \mu)$ [4]:

$$\frac{\partial\chi}{\partial t} + \frac{\partial\chi}{\partial S}\mu + \frac{\partial\chi}{\partial\mu} f(t, S) = J(t, S, \mu). \tag{2}$$

Скорость изменения затрат $\mu$ базового продукта и функция $f(t, S)$ могут быть найдены из системы уравнений состояния базового продукта (1):

$$\frac{dS}{dt} = \mu; \qquad \frac{d\mu}{dt} = f(t, S), \tag{3}$$

а генераторная функция $J(t, S, \mu)$ определяется плотностью оборудования вдоль технологической цепочки и его техническими характеристиками [4]. Функция $J(t, S, \mu)$ при $t \to \infty$

стремится свести начальное распределение базовых продуктов по скоростям изменения затрат к состоянию с равновесной функцией распределения в соответствии с технологическим процессом. Будем считать функцию $\chi(t, S, \mu)$ нормированной

$$\int_{0}^{\infty} d\mathrm{S} \int_{0}^{\infty} d\mu\chi(t, S, \mu) = N. \tag{4}$$

Условие нормировки (4) представляет собой закон сохранения количества базовых продуктов, находящихся в производственном процессе. Инженерно-производственная функция $f(t, S)$ определяется из документооборота предприятия: таблиц норм расходов сырья (материалов), нормативных цен на сырье (материалы), сменных норм и расценок за выполнение работником технологических операций. Зная стоимость затрат сырья, потребляемого в ходе технологической операции, расценку и время выполнения технологической операции, можно в табличном виде получить зависимость для скорости изменения затрат $\mu_{\kappa} = \mu(t_{\kappa})$ при движении базового продукта вдоль технологической цепочки, откуда $f(t, S) = \lim\limits_{\Delta t_k \to 0} \dfrac{\Delta\mu_k}{\Delta t_k}$. По смыслу инженерно-производственная функция представляет собой некий аналог силы, перемещающий базовый продукт вдоль технологической цепочки производственного процесса. При таком перемещении на базовый продукт оказывается воздействие со стороны орудий труда (оборудования). Таким образом происходит увеличение затрат, перенесенных на базовый продукт при его движении вдоль технологической цепочки производственного процесса. Оборудование воздействует на базовый продукт, изменяя его качественно и количественно. Мы можем говорить только о вероятности того, что после воздействия со стороны технологического оборудования базовый продукт будет находиться в том или ином состоянии.

Процесс воздействия со стороны технологического оборудования на базовый продукт будем обозначать $[\mu \to \widetilde{\mu}]$, где $\mu$ и $\widetilde{\mu}$ — соответственно скорости изменения затрат, которые несет базовый продукт до и после воздействия. Полное же количество базовых продуктов, находящихся в единице объема фазового пространства, испытавших в единицу времени воздействие со стороны технологического оборудования, можно написать в виде произведения потока базовых продуктов $\chi(t, S, \mu)\mu$ на вероятность для каждого из них испытать воздействие $[\mu \to \widetilde{\mu}]$ в некотором малом элементе $d\Omega$ фазового пространства $(S, \mu)$. Что касается вероятности испытания воздействия $[\mu \to \widetilde{\mu}]$, то о ней можно, по крайней мере, утверждать, что она пропорциональна плотности расположения оборудования $\lambda_{\text{оборуд}}$ вдоль технологической цепочки.

Таким образом, число базовых продуктов, испытавших в единицу времени воздействие со стороны технологического оборудования и принявших значения в пределах $(\widetilde{\mu}; \widetilde{\mu} + d\widetilde{\mu})$, можно написать в виде

$$\psi[\mu \to \widetilde{\mu}]\lambda_{\text{оборуд}}\mu\chi(t, S, \mu)\, d\widetilde{\mu}\, dS\, d\mu, \tag{5}$$

где $\psi[\mu \to \widetilde{\mu}]$ — функция, определяемая паспортными данными работы технологического оборудования. Некоторые свойства этой функции могут быть получены из соображений, что полная вероятность перехода в любое состояние равна единице:

$$\int_{0}^{\infty} \psi[\mu \to \widetilde{\mu}]\, d\widetilde{\mu} = 1. \tag{6}$$

Наряду с этим в элемент объема $dS\,d\mu$ поступают базовые продукты из объема $dS\,d\widetilde{\mu}$ посредством обратного перехода $\psi[\widetilde{\mu} \to \mu]$ в количестве

$$\psi[\widetilde{\mu} \to \mu]\lambda_{\text{оборуд}}\widetilde{\mu}\chi(t, S, \widetilde{\mu})\,d\widetilde{\mu}\,dS\,d\mu, \tag{7}$$

а общее число базовых продуктов в элементе объема $d\Omega$ изменяется в единицу времени на величину

$$d\Omega\,J = d\Omega\,\lambda_{\text{оборуд}} \int\limits_0^\infty \{\psi[\widetilde{\mu} \to \mu]\,\widetilde{\mu}\,\chi(t, S, \widetilde{\mu}) - \psi[\mu \to \widetilde{\mu}]\,\mu\,\chi(t, S, \mu)\}\,d\widetilde{\mu}. \tag{8}$$

Принимая во внимание нормировочное свойство (6) функции $\psi[\mu \to \widetilde{\mu}]$, уравнение (2) можно представить в виде

$$\frac{\partial\chi}{\partial t} + \frac{\partial\chi}{\partial S}\,\mu + \frac{\partial\chi}{\partial\mu}\,f(t, S) = \lambda_{\text{оборуд}}\left\{\int\limits_0^\infty [\psi[\widetilde{\mu} \to \mu]\,\widetilde{\mu}\,\chi(t, S, \widetilde{\mu})]\,d\widetilde{\mu} - \mu\,\chi\right\}. \tag{9}$$

В большинстве интересных с практической точки зрения случаях функция $\psi[\widetilde{\mu} \to \mu]$ не зависит от состояния базового продукта до испытания воздействия $\widetilde{\mu}$ со стороны технологического оборудования, что приводит к упрощению интегро-дифференциального уравнения (9)

$$\frac{\partial\chi}{\partial t} + \frac{\partial\chi}{\partial S}\mu + \frac{\partial\chi}{\partial\mu}f(t, S) = \lambda_{\text{оборуд}}\{\psi[\widetilde{\mu} \to \mu][\chi]_1 - \mu\chi\}. \tag{10}$$

Нулевой $\int\limits_0^\infty d\mu\chi(t, S, \mu) = [\chi]_0$ и первый $\int\limits_0^\infty d\mu\mu\chi(t, S, \mu) = [\chi]_1 = \langle\mu\rangle[\chi]_0$ моменты функции распределения имеют простую производственную интерпретацию: заделы базовых продуктов и их темп движения вдоль технологической цепочки. С помощью моментов функции распределения можно записать уравнения для описания макровеличин производственной системы. Умножив уравнение (10) соответственно на 1, $\mu$, $\dfrac{\mu^2}{2}$ и проинтегрировав по всему диапазону $\mu$, получим уравнения балансов [5]

$$\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t} + \frac{\partial(\langle\mu\rangle[\chi]_0)}{\partial S} = \int\limits_0^\infty d\mu J,$$

$$\frac{\partial(\langle\mu\rangle[\chi]_0)}{\partial t} + \frac{\partial(\langle\mu\rangle^2[\chi]_0)}{\partial S} = -\frac{\partial P}{\partial S} + f(t, S)[\chi]_0 + \int\limits_0^\infty d\mu\,\mu J, \tag{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\langle\mu\rangle^2[\chi]_0}{2} + \frac{P}{2}\right\} + \frac{\partial}{\partial S}\left(\langle\mu\rangle\left\{\frac{\langle\mu\rangle^2[\chi]_0}{2} + \frac{3P}{2}\right\} + \Theta\right) = f(t, S)[\chi]_1 + \int\limits_0^\infty d\mu\frac{\mu^2}{2}J,$$

где

$$\int\limits_0^\infty d\mu(\mu - \langle\mu\rangle)^2\chi = P(t, S); \qquad \int\limits_0^\infty d\mu(\mu - \langle\mu\rangle)\frac{(\mu - \langle\mu\rangle)^2}{2}\chi = \Theta(t, S).$$

Уравнения балансов (11), представляющие собой уравнения заделов, темпа и дисперсии базовых продуктов вдоль технологической цепочки, незамкнуты. Возможность получить замкнутую систему уравнений основана на свойствах функции $\psi[\widetilde{\mu} \to \mu]$ и наличии малого параметра $Kv = \dfrac{l_{\text{св}}}{\xi} \ll 1$ [4], представляющего собой отношение длины свободного движения $l_{\text{св}}$ базовых продуктов вдоль технологической цепочки между единицами оборудования к характерному размеру технологической цепочки. В нулевом приближении по малому параметру $Kv \ll 1$

$$J = \sum_{m=0}^{\infty} (Kv)^m J_m; \qquad J_0 = \lambda_{\text{оборуд}}\{\psi[\widetilde{\mu} \to \mu][\chi]_1 - \mu\chi\} = 0; \tag{12}$$

из уравнения балансов (11) следует замкнутая система уравнений для описания производственной системы

$$\begin{gathered}\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t} + \frac{\partial([\chi]_0\langle\mu\rangle)}{\partial S} = 0; \qquad \frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial t} + \langle\mu\rangle\frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial S} = -\frac{1}{[\chi]_0}\frac{\partial P(t,S)}{\partial S} + f(t,S);\\ \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\langle\mu\rangle^2[\chi]_0}{2} + \frac{P}{2}\right\} + \frac{\partial}{\partial S}\left(\langle\mu\rangle\left\{\frac{\langle\mu\rangle^2[\chi]_0}{2} + \frac{3P}{2}\right\} + \Theta\right) = f(t,S)\langle\mu\rangle[\chi]_0,\end{gathered} \tag{13}$$

где

$$\Theta = \langle\mu\rangle\left\{\frac{[\chi]_0\sigma_\psi^2 - P}{2} + \frac{[\chi]_0(\mu_\psi - \langle\mu\rangle)^2}{2}\right\},$$

а $\mu_\psi$ и $\sigma_\psi^2$ определены как

$$\int_0^\infty \mu\psi[\mu \to \widetilde{\mu}]d\widetilde{\mu} = \mu_\psi; \qquad \int_0^\infty (\mu - \mu_\psi)^2\psi[\mu \to \widetilde{\mu}]d\widetilde{\mu} = \sigma_\psi^2 \tag{14}$$

и задаются паспортными данными оборудования. Если положить заданным темп базовых продуктов $[\chi]_1(t, S)$ вдоль технологической цепочки, то в качестве частного случая из системы уравнений (13) получаем известное в кибернетической экономике уравнение уровня Форрестера [6], которое в настоящее время является основным уравнением для описания функционирования производственно-сбытовых систем.

Таким образом, в нулевом приближении по малому параметру $Kv$ форма функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\chi(t, S, \mu)$ для описания функционирования производственной системы определяется уравнением (10). Моменты функции распределения $\chi(t, S, \mu)$ удовлетворяют замкнутой системе уравнений (13), которая служит для описания поведения макроскопических параметров идеальной производственной системы. Идеальность производственной системы заключается в отсутствии для замкнутой системы уравнений (13) в нулевом приближении по малому параметру $Kv$ членов, описывающих диссипативные производственные процессы.

*Авторы искренне благодарны академику НАН Украины С. В. Пелетминскому и профессору Харьк. нац. ун-та В. Д. Ходусову за ценные дискуссии при подготовке материалов работы.*

1. *Рушицький Я. Я., Мілованов Т. С.* Модифікована модель Філіпса-Лоренца для економічної системи (корпорації фірм) із стабільним капіталом // Доп. НАН України. – 1997. – № 12. – С. 36–40.

2. *Энтропийные* методы моделирования сложных систем: Пер. с англ. – Москва: Наука, 1978. – 248 с.
3. *Прыткин Б. В.* Технико-экономический анализ производства. – Мосвка: ЮНИТИ-ДАНА, 2000. – 399 с.
4. *Демуцкий В. П., Пигнастая В. С., Пигнастый О. М.* Теория предприятия: Устойчивость функционирования массового производства и продвижения продукции на рынок. – Харьков: Изд. Харьк. нац. ун-та, 2003. – 272 с.
5. *Климонтович Ю. Л.* Статистическая физика. – Москва: Наука, 1982. – 608 с.
6. *Форрестер Дж.* Основы кибернетики предприятия. – Москва: Прогресс, 1961. – 341 с.

*Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина*

*Поступило в редакцию 08.11.2004*

УДК 669.23/29:539.89:539.219.3



**В. Ф. Мазанко, Г. И. Прокопенко, Д. С. Герцрикен, А. В. Филатов, А. М. Безуглый, Т. В. Миронова**

# Особенности фазообразования в железе и стали в условиях ультразвуковой ударной обработки

*(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Ю. Н. Ковалем)*

*Differences of the phase compositions and distributions of atoms in iron and steel subjected to the operating insonification and the ultrasonic percussion treating are learnt by the methods of radioactive tracers, X-ray diffraction and X-ray spectrum analyses. The regularities of the formation of carbides and solid solutions of intrusion and displacement are detected at treating without heating and at high temperatures.*

Известно, что импульсное воздействие со скоростями деформации от 1 до $10^5$ $c^{-1}$, осуществляемое различными способами, приводит к аномально высокой диффузионной подвижности атомов [1]. Такие скорости миграции атомов, в свою очередь, способствуют изменению фазового состава деформируемого металла, причем образующиеся фазы могут не соответствовать диаграммам состояний [2]. Ультразвуковая обработка, особенно при одновременном действии высокочастотных колебаний и импульсной пластической деформации со скоростями до 1 $c^{-1}$, также стимулирует ускоренное проникновение атомов в озвучиваемый металл, что, несомненно, приводит к образованию в диффузионной зоне различных фаз [3–5]. В этой связи представляет интерес изучение фазового состава приповерхностных слоев обрабатываемого металла при ультразвуковой ударной обработке и озвучивании без пластической деформации, а также выделение вклада в фазообразование ультразвуковых колебаний и импульсной пластической деформации.

**Материалы и методики экспериментов.** Особенности миграции атомов различных элементов при ультразвуковой ударной обработке (УЗУО) изучали на железе и стали Ст.45, в том числе и стали, содержащей введенный в плавке изотоп углерода $^{14}C$. Нагружение производилось по методике [6] следующим образом. В отверстие в массивной наковальне вставляли цилиндрический образец диаметром и высотой 10 мм с исследуемым веществом на верхнем торце. В волноводе возбуждались колебания с частотой 30 кГц амплитудой