К 200-летию Харьковского национального университета им В.Н. Каразина

ТЕОРИЯ ПРЕДПРИЯТИЯ:

УСТОЙЧИВОСТЬ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ МАССОВОГО ПРОИЗВОДСТВА И ПРОДВИЖЕНИЯ ПРОДУКЦИИ НА РЫНОК

В.П. Демуцкий, В.С. Пигнастая, О.М. Пигнастый

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина

Харьков, 2003

УДК 658.51.012

Демуцкий В.П., Пигнастая В.С., Пигнастый О.М. Теория предприятия: Устойчивость функционирования массового производства и продвижения продукции на рынок. – Харьков, 2003. – 272 с.

Изложен современный научно-теоретический подход к описанию процессов жизнедеятельности предприятия. На основе вероятностных методов рассмотрена модель функционирования массового производства и продвижения продукции на рынок, исследована устойчивость протекания организационных процессов внутри предприятия при наличии возмущающих факторов внешней и внутренней сред, получена оптимальная функция управления. Предложены механизмы управления протекающими на предприятии процессами и методика построения систем управления производством и продвижения продукции на рынок. Краткость описания достигнута за счет того, что авторы ограничились рассмотрением нетрудоемких, но характерных задач, которые являются моделью более сложных.

Для специалистов промышленных предприятий, научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов технических и экономических специальностей ВУЗов.

Рецензенты:

Главный технолог Харьковского Государственного Авиационного Производственного Предприятия (ХГАПП) *Лысых Н.А.*

Заместитель председателя правления ЗАО «Корпорация ФЭД» *Яснолобов В.П.*

Доктор физико-математических наук, профессор Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина *Куклин В.М.*

Доктор физико-математических наук, профессор Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина *Ходусов В.Д.*

Утверждено Ученым советом Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина протокол №14 от 26.12.2003 г.

ISBN 966-623-296-0

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория должна удовлетворять двум несовместимым требованиям:

1) ее результаты должны совпадать с экспериментальными данными;

2) она должна быть понятной.

Зачастую вторым требованием жертвуют ради первого. Однако такая точная, но необозримая, связанная с приближенными вычислениями на ЭВМ, теория описывает только одно частное решение уравнений и притом на конечном интервале времени. Иными словами, она описывает отдельные эксперименты, но не дает толчка для появления принципиально новых идей: неожиданных экспериментов и неожиданных технических приложений. Приближенные методы отказываются служить, когда нужно определить характер решения в течение достаточно большого промежутка времени.

Поэтому в ряде случаев прибегают к другой крайности: заменяют математические выкладки «рассуждениями на пальцах». Однако печальный опыт изобретателей вечного двигателя показывает, что качественные рассуждения должны подкрепляться количественным анализом.

Мы выбираем «золотую середину»: математическое исследование упрощенной модели явлений. Ценность решений, полученных для простых задач, состоит в том, что они служат скелетом для построения приближенных решений более сложных задач.

Цель настоящей книги – ознакомить читателя с принципиально новым подходом при описании функционирования предприятия и его позиционирования на рынке. Этой целью определяются отбор материала и характер изложения. Мы ограничились сравнительно небольшим числом нетрудоемких узлов вопросов, но разобрали их подробно, с обоснованием сделанных допущений и принятых методов исследования, подробными выкладками и анализом результатов. Лишь в отдельных случаях ради полноты освещения важных вопросов рассмотрены задачи, требующие громоздкого решения. В этих случаях читатель отсылается к соответствующей литературе. Ссылки на литературные источники приводятся для того, чтобы помочь читателю найти материал, расширяющий текст книги.

Литература по теории предприятия огромна. Только список журналов, в которых публикуются статьи по теории предприятия, состоит из нескольких сотен названий. Чтобы удержать размер данной книги в разумных пределах, в ряде случаев практикуется неявное цитирование основополагающих работ, а именно даются ссылки на более поздние работы (в основном обзорного характера), в которых цитируются пионерские работы.

Мы просим прощения у авторов, имена которых не были явно упомянуты в данной книге.

Мы старались сделать книгу легко читаемой и доступной для лиц, которые не являются специалистами по теории предприятия. Мы не пожалели места для примера, поясняющего излагающий материал и его значение, в частности для приложений. Пример вынесен в виде отдельной главы. Главное внимание уделяется идейной стороне вопроса, физической картине, не заслоненной деталями, однако разъясняются также различные теоретические тонкости.

Тема книги оказалась на стыке нескольких глубоких и обширных дисциплин – статистической механики, исследовании операций, теории вероятности, теории больших систем, теории прогнозирования, теории управления фирмой, логистики, менеджмента, маркетинга, управление проектами, теории устойчивости, технологии производственных процессов. Это узловое расположение темы определило необходимость включения в текст фрагментов с элементарным изложением ряда основных вопросов. Некоторые из этих фрагментов могут показаться специалистам по данной дисциплине излишними, но они необходимы для понимания сути дела специалистам по другим дисциплинам и студентам.

Мы глубоко признательны профессору Ходусову В.Д., профессору Жихареву В.Я., профессору Федоровичу О.Е., доценту Внукову И.П., доценту Попову В.А. за полезное обсуждение ряда вопросов, возникших при написании книги.

Авторы

РАЗДЕЛ 1. МЕТОДЫ И МОДЕЛИ СИСТЕМ ПРИНЯТИЯ УПРАВЛЕНЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

1.1. Системный подход в управлении предприятием

Процесс неравномерного развития экономики и тем более отдельных ее частей, колебания объемов производства и сбыта, возникновение значительных спадов производства можно охарактеризовать как кризисную ситуацию, которую следует рассматривать не как стечение неблагоприятных обстоятельств, а как общую закономерность, свойственную рыночной экономике. Стабильно развивающееся предприятие может в определенный момент оказаться не способным следовать изменениям рыночной ситуации.

В настоящее время для оценки эффективности производства используются показатели, основанные на действующих ценах, себестоимости, прибыли. Но в прибыли учитывается лишь часть созданной в промышленности продукции и поэтому полная народно-хозяйственная эффективность не проявляется. Выбор прибыли в качестве критерия оценки эффективности производства стимулирует в явной и в не явной форме стремление к изменению заданных пропорций за счет увеличения выгодной с точки зрения предприятия продукции. Это приводит к концентрации усилий руководителя производства не на вопросах снижения издержек, а прежде всего на моментах реализации и распределительных отношений.

Решающие вопросы совершенствования техники, технологии, организационных форм отодвигаются на второй план. В этих условиях становится возможным несовпадение и несогласованность стоимостного и вещественного аспектов воспроизводства. Так, в динамике себестоимости и затрат совокупного рабочего времени наблюдаются диаметрально противоположные тенденции: себестоимость основных видов промышленной продукции повышается, в то время как затраты совокупного живого и овеществленного труда в единицах рабочего времени сокращаются. Поэтому *увеличение затрат – не всегда признак действительного удорожания производства.* В то же время перераспределение прибавочного продукта в пользу оплаты труда приводит к росту себестоимости продукции и снижению эффективности, к ухудшению условий воспроизводства на предприятиях.

Для получения наилучших результатов важно добиться взаимосвязи всех видов анализа систем управления функционирования предприятий, что позволит не только принимать необходимые оперативные решения, но и по истечении того или иного периода видеть конечные результаты работы производственных подразделений и на этой основе разрабатывать необходимые мероприятия, направленные на повышение эффективности производственной деятельности.

При этом одним из направлений совершенствования стратегии управления является широкое применение системного подхода к решению вопросов, обеспечивающих повышение эффективности основных средств производства машиностроительного предприятия.

Необходимость системного подхода к изучению состояния и уровня использования производственных ресурсов предприятия как единого целого хозяйствующего объекта обусловливается характером объективных экономических законов, которые образуют единую взаимосвязанную систему, диктуется быстрым и непрерывным развитием рыночных отношений, усложнением внутриотраслевых и межотраслевых связей, все более полным применением экономико-математических методов и компьютерной техники, проведением принципов оптимальности в практике работы машиностроительных предприятий различных регионов страны [1].

Начало формирования аппарата системных исследований принято относить к 50-м годам XX века и связывать с работами Людвига фон Берталанфи. Впоследствии, благодаря трудам таких ученных, как Н. Винер, У. Эшби, У. Мак-Куллох, Г. Бейтсон, Ст. Бир, Г. Хакен, Р. Акофф, Дж. Форрестер, М. Месарович, С. Никаноров, И. Пригожин, В. Турчин возник целый ряд смежных с общей теорией систем направлений – кибернетика, синергетика, теория самоорганизации, теория хаоса, системотехника. Фундаментальные принципы и инструменты, разработанные в рамках этих направлений, позволяют построить *корректную модель управления предприятием* как сложной открытой организационной системой.

В соответствии с терминологической базой теории систем для описания процесса функционирования предприятия мы будем использовать понятие «состояние системы». *Состояние системы* – это упорядоченная совокупность значений параметров (внутренних и внешних), определяющих ход процессов, происходящих в системе. Множество значений параметров системы в различные моменты времени образует *пространство состояний системы.* Функционирование предприятия, таким образом, описывается как «смещение» в пространстве состояний. Универсальность подобного понятийного аппарата позволяет дать корректные, однозначные определения многим широко распространенным в теории менеджмента терминам. Например, *стратегия* может трактоваться как «невозмущенная траектория движения» предприятия в пространстве его состояний.

Предприятие является сложной системой, в рамках которой реализуется законченное множество динамических процессов. В теории и практике организационного управления для обозначения основного класса этих процессов принято использовать обобщенное понятие «бизнес-процесс», представляющее собой совокупность различных видов деятельности, в рамках которой «на входе» используется один или более видов ресурсов, и в результате этой деятельности «на выходе» создается продукт, представляющий ценность для потребителя (Хаммер, Чампи, 1999). Само по себе предприятие также может рассматриваться как бизнес-процесс самого высокого уровня обобщения. Реализация бизнес-процесса всегда приводит к изменению добавленной стоимости.

Процессный подход позволяет подойти к проблеме проектирования, создания и управления предприятием с «инженерных» позиций. При этом под *организационным* *проектированием* мы понимаем развернутую во времени совокупность процедур, позволяющую сформировать определенную целенаправленную систему деятельности. Каждая такая процедура вмешивается в налаженный или случайный ход событий, увеличивая вероятность возникновения события цели. Иными словами, основной задачей организационного проектирования является получение четкого ответа на вопрос: «Каким должно быть предприятие, чтобы с его помощью можно было реализовать поставленные цели?» Основу процесса организационного проектирования составляет разработка формально-логической модели предприятия, отвечающей целевым установкам основных заинтересованных групп.

Процессно-ориентированные технологии часто соотносят с так называемой «инжиниринговой» («реинжиниринговой») концепцией управления. В связи с этим подчеркнем, что подобный подход в теории и практике организационного развития не является чем-то принципиально новым. Его основы были предложены еще классиками менеджмента Ф. Тейлором, А. Файолем, Г. Эмерсоном. Общее представление об организации как о системе универсальных схем и работ было сформулировано в 20-х годах XX века в трудах А.А. Богданова, обосновавшего необходимость создания всеобщей организационной науки. В работах И.С. Ладенко, посвященных «интеллектуальным системам», был поднят вопрос о деятельности как о схемно-рефлексируемой сущности, рассмотрена общая проблематика взаимосвязи деятельности, мышления, обучения и управления на основе универсальных моделей. Ориентированное на практику модельное описание иерархической организации как совокупности координируемых решений разработано М. Месаровичем (Месарович, Мако, Тахакара, 1973, 1973). С.П. Никаноровым был предложен универсальный метод концептуального проектирования систем организационного управления (Никаноров, 1972, 1989). Новый всплеск интереса к процессно-ориентированным технологиям был вызван появлением в 90-х годах концепции реинжиниринга бизнес-процессов (Ойхман, Попов, 1997; Хаммер, Чампи, 1999 и др.). Возможность использования инженерных методик к социальной материи была доказана в целом ряде методологических работ последних десятилетий (Злотин Б.Н., Зусман А.В., 1989; Радшун Р.В., 1997; Корогодин В.И., Соснин Э.А., Пойзнер Б.Н., 2000). В частности, было показано, что все целенаправленные системы деятельности развиваются по однотипным закономерностям и поэтому опыт совершенствования такой целенаправленной деятельности как создание новых объектов техники может быть (с оговорками) перенесен в сферу социального и организационного конструирования. Во всех этих работах за основу был взят именно процессный (инжиниринговый) подход.

В рамках бизнес-процессов выделяются отдельные операции, соответствующие им ресурсы и исполнители. Выполнение бизнес-процесса инициируется событиями (ситуациями), а сам бизнес-процесс представляет собой одну из форм отклика на изменение параметров внешней или внутренней сред (например, изменение цен, ставок налогов, увольнение сотрудников, поступление товаров на склад, заключение контракта, выставление рекламации, выпуск нового продукта и др.). В частности, используется понятие «сервисного отклика» (service response logistics, SRL), которое определяется как процесс координации операций, необходимых для оказания услуг наиболее эффективным способом с точки зрения затрат и удовлетворения запросов потребителей (Ballou, 1993). Таким образом, предприятие трактуется как многоуровневая *сервисная система*, а управление предприятием – как регулирование параметров бизнес-процессов или параметров логистических цепочек. Подобный подход является основой общепринятых стандартов бизнес-моделирования (например, методологии IDEF) и методологии структурного анализа и проектирования (Structured Analysis and Design Technique, SADT), базой функционально-стоимостного анализа (Activity Based Costing, ABC) и реализуется в целом ряде программных комплексов (ARIS, IDEF/ Design, Rational Rose, SAP R/3, «Галактика», «Парус», «Эталон» и др.).

Предприятие, как открытая система, строит свое функционирование в существенной (хотя и не однозначной) связи с внешней средой. Отсюда одной из центральных задач управления предприятием является задача позиционирования во внешней среде, в частности отыскания оптимального положения в сети ресурсных потоков. Это связано с тем, что часть параметров бизнес-процессов (например, такие экзогенные величины как объем реализации продукции, ставки налогов, тарифы на энергоносители, рыночные цены, курсы валют и др.) формируется во внешней среде предприятия, что может быть интерпретировано как проявление возмущающих или ограничивающих факторов. В то же время, если все бизнес-процессы формализованы и построена корректная параметрическая модель управления предприятием, то природа этих факторов не имеет значения (учитывается только их динамика) (Бир, 1971). Также напомним, что разделение параметров на «внешние» и «внутренние» весьма условно и определяется целями моделирования.

Именно наличие среди параметров бизнес-процессов динамически изменяющихся величин делает процесс функционирования предприятия значительно менее управляемым и предсказуемым. Последнее, в частности, выражается в снижении вероятности достижения поставленных целей. Отсюда задача позиционирования предприятия во внешней среде (в частности, на рынке) является первичной по отношению к задаче внутренней организации бизнес-процессов.

В настоящее время известно несколько инструментов позиционирования: SWOT-матрица, PEST-матрица, SNW-матрица, модель BCG, GE/ McKinsey, ADL-LC, SPACE и др. Большинство из них строится на основе результатов качественного анализа или методов экспертных оценок, что порождает значительное количество проблем, связанных с многочисленными разночтениями при формировании конкретных моделей. В частности, для указанных инструментов не разработаны четкие критерии классификации факторов внешней и внутренней среды, не составлены обоснованные перечни исследуемых параметров и т.д. В связи с этим практическая значимость данных инструментов для целей управления предприятием весьма ограничена (Минберг, Альстрэнд, Лэмпел, 2000).

Как правило, в большинстве случаев *задача позиционирования* во внешней среде сводится к непрерывному поиску оптимального (по заданному критерию) положения предприятия в общеэкономической системе потоков материально-технических, финансовых, информационных и трудовых ресурсов. Такая формулировка является значительно более строгой в сравнении с имеющимися подходами. Тем не менее, математически подобная задача решается с большим трудом, а точнее, сводится к классической задаче оптимального управления абстрактным объектом.

Метафорически процесс позиционирования предприятия может быть представлен следующим образом. Глобальные и макроэкономические ресурсные потоки образуют сложную многомерную сеть, каждый «узел» которой обеспечивает определенный экономический (социальный, административный и пр.) эффект от деятельности в нем. Структура сети непрерывно видоизменяется, что в частности приводит к колебаниям эффективности работы в различных «узлах». Реализация целевых установок предприятия возможна только в том случае, если им будет занят определенный «узел» или совокупность «узлов».

При описании предприятия в терминах состояния, а процесса его функционирования в виде смещения в пространстве состояний, упомянутая сеть будет соответствовать координатным осям n-мерного пространства. Сложность управления предприятием состоит в том, что не только предприятие «движется» к целевому состоянию, но и само пространство, в котором происходит движение, изменяется (т.е. имеет место динамическая система координат). Отсюда необходимость непрерывного мониторинга внешней среды, позволяющего своевременно реагировать на изменение множества экзогенных параметров.

Важно четко различать две точки зрения на процесс позиционирования: 1) позиционирование как моделирование будущего состояния; 2) позиционирование как управленческий процесс. В классической теории оптимального регулирования понятие «состояние» определяется как некоторая характеристика системы, значение которой в настоящий момент времени определяет текущее значение выходной величины и оказывает влияние на ее будущее. Несмотря на определенную расплывчатость данного определения, в нем отмечен важный момент, которому часто не уделяется должного внимания. Распространенная ошибка состоит в том, что позиционирование часто рассматривают как свободное управление «будущим» состоянием. В то же время, исходя из приведенной формулировки, мы можем определить позиционирование только как воздействие на *фактическое* (текущее) состояние предприятия с целью достижения им в будущем *целевого* (заданного, планового) состояния. Иначе говоря, управление в отличие от моделирования всегда имеет отношение только к настоящему времени.

Отдельного рассмотрения требуют вопросы встречного влияния предприятия на параметры внешней среды (этому служат мероприятия Public relations, реклама и прочие методы стимулирования сбыта, лоббирование и др.). В общем случае, потенциал встречного влияния определяется следующими основными характеристиками: 1)масштабы и социально-экономические результаты деятельности предприятия; 2)стратегическая значимость предприятия (принадлежность к структурообразующей отрасли, доля в структурообразующей отрасли); 3)географическая локализация предприятия и подконтрольных ему структур; 4)контроль над средствами массовой информации; 5)развитость институционной (коммерческой и социальной) структуры, в том числе принадлежность к крупным ФПГ; 6)личные качества и достижения (в том числе, социально-политические) руководства или собственников предприятия.

Сочетание процессно-ориентированного и событийного подходов позволяет построить корректную модель управления предприятием. Можно выделить *два принципиальных подхода* к формированию данной модели:

- «сверху-вниз» от интегральной целевой функции развития к частным параметрам оперативной деятельности (по схеме «дерева целей» или точнее по семантическому графу оценочных критериев) для построения параметрической модели предприятия;
- «снизу-вверх» в организационном аспекте с целью построения корректной системы распределения работ и исполнителей в рамках реализуемых бизнес-процессов.

Более подробно остановимся на особенностях первого подхода. Процессно-ориентированные технологии организационного управления базируются на фундаментальных (в частности, кибернетических) принципах управления. По содержанию и механизму действия организационное управление полностью соответствует классической схеме регулирования с обратной связью, что объясняется инвариантностью данной схемы по отношению к различным предметным областям и задаваемым целям функционирования. Например, информационная часть системы бюджетирования полностью поглощается корректно построенной моделью управления, в рамках которой с помощью бюджетов осуществляется регулирование финансово-экономической составляющей деятельности предприятия. Бюджеты при этом трансформируются в элементы стандартной системы управления по отклонениям, манипулирующей плановыми (нормативными) и фактическими показателями.

Именно в связи с инвариантностью и практической значимостью кибернетических алгоритмов одной из важнейших предпосылок является *положение о первичности модели управления* по отношению к другим моделям, отражающим различные аспекты деятельности предприятия (финансовой, производственной, организационной и др.). В частности, строго под алгоритм функционирования системы управления должна формироваться учетная политика (за исключением официальных форм отчетности), собираться маркетинговая информация, проводиться мониторинг внешней и внутренней среды. Имеет место и обратная зависимость – ограничения на методы сбора, обработки и представления информации во многом определяются особенностями функционирования системы управления.

Регулирование параметров бизнес-процессов на предприятии осуществляется *системой организационного управления* (СОУ), т.е. человеко-машинным комплексом, системообразующим фактором которого является управленческое решение (Никаноров, 1989). Отметим, что аппарат управления (менеджмент предприятия, дирекция) является только компонентом СОУ. Другой – автоматизированной – составной частью СОУ выступает система поддержки принятия управленческих решений (СППУР), формирующая проекты управленческих решений. Проект управленческого решения – это оформленный в соответствии с принятыми на предприятии стандартами результат логического вывода лица, принимающего решения (ЛПР).

Подводя итоги, можно отметить следующее. Функционирование предприятия – это уникальный слабопредсказуемый (стохастический) целенаправленный процесс, в ходе которого предприятие переходит из одного состояния в другое («смещается в пространстве состояний»). Проблема управления предприятием состоит в исследовании влияния различных внешних и внутренних событий на параметры бизнес-процессов и в корректном регулировании этих параметров для достижения требуемой эффективности функционирования всей системы. Регулирование (управление) сводится к принятию и реализации управленческих решений [2].

1.2. О выборе модели описания предприятия

В настоящее время требования к оптимальным организационным структурам становятся все более сложными и комплексными, что вызывает появление более совершенных инструментов многоаспектного проектирования и моделирования организаций. Современные средства связи диагностики и проектирования современных организаций подробно описаны в специальной литературе [3].

В самом общем виде под моделированием понимается построение и изучение модели, способной заменить исследуемый объект и дать о нем новую информацию. Необходимость в моделировании возникает тогда, когда непосредственное изучение исследуемого объекта значительно затруднено (а иногда невозможно). Под ***моделью*** принято понимать объект любой природы, который способен замещать исследуемый объект так, что его изучение дает новую информацию об оригинале. Как исследуемый объект, так и его модель могут быть любой природы – материальными или идеальными, искусственными или естественными.

На практике используются модели управления предприятиями трех типов, которые в порядке возрастания сложности условно можно назвать предметными, аналоговыми и символическими.

В предметных (изобразительных) моделях управления предприятием отражают главным образом структуру оригинала. Это статические модели. Данные модели чаще всего используются при проектировании новых структур.

Существенным отличием аналоговых и символических моделей от предметных является их способность воспроизводить скрытые внутренние свойства исследуемых объектов, в результате чего становится возможным не только описывать их строение, но и предсказывать поведение. Аналоговые модели управления предприятия используют подобие некоторых физических процессов, протекающих в оригинале и модели. Символические модели управления предприятием представляют собой описание свойств оригиналов с помощью символов, выражающих математические или логические зависимости. Символические модели могут быть в виде уравнений, графиков и т.д.

Под *математической моделью* управления предприятием подразумевается описание функционирования предприятия на каком-либо формальном языке, позволяющее делать выводы о поведении системы с помощью формальных преобразований, производимых над этим описанием. Другими словами, построение математической модели означает формализацию содержательного описания задачи, полученного в результате ее анализа на предыдущем этапе – этапе постановки задачи.

В процессе принятия решения используются главным образом математические модели. При их построении возникают две противоречивые цели: с одной стороны, нужно разработать модель, на которой проще всего получить решение задачи, с другой – обеспечить максимально возможную точность решения. Следовательно, при построении модели желательно упростить действительность, не утратив существенным образом точности представления.

Модель принципиально не может и не должна быть точной копией некоторой реальной системы по двум причинам. Во-первых, строго говоря, выводы, полученные на такой модели, не имели бы практической ценности, так как были бы пригодны к одной единственной системе – оригиналу. Во-вторых, сложность такой модели была бы эквивалентна сложности реального объекта, и получение на ней количественных оценок было бы не проще, чем на реальном объекте.

С понятием математической модели можно сопоставить понятие закона в науке. Закон в науке имеет характер некоторой абсолютной категории на данном уровне знаний. Он может быть либо безусловно верен, либо безусловно неверен.

Совсем иные требования предъявляются к математической модели, применяемой для описания поведения большой системы. Составление моделей – это попытка понять процесс, поэтому их нельзя считать неизменными. Здесь уже не идет речь об абсолютной категории. Одни и те же аспекты рассматриваемой системы можно описывать различными моделями, одновременно имеющими право на существования. Поэтому основная задача состоит в том, чтобы построить (или выбрать) модель, адекватную поставленной задаче исследования. Конечной же целью разработки математических моделей является прогноз результатов при тех или иных воздействиях на параметры проекта. При этом широкое распространение метода математического моделирования объясняется такими его преимуществами, как относительная простота, наглядность, надежность расчетов. Зачастую этот метод является единственным средством изучения и предсказания поведения реального объекта.

Следующий этап после этапа построения математической модели состоит в получении решения с помощью построенной модели. Элементами, участвующими в решении, являются исходная информация и правила выбора решения. Важность этих элементов невозможно переоценить. Самая совершенная модель бесполезна без достоверной информации. Неудачи, связанные иногда с применением математических методов, вызваны прежде всего несоответствием между требуемой по модели и реально существующей информацией.

Решающее правило дает возможность однозначно выбрать предпочтительное в каком-либо смысле решение. Оно обычно имеет форму алгоритма, т.е. представляет последовательность действий, однозначно ведущую к решению.

Необходимо учитывать также, что исходную задачу управления предприятием не всегда удается представить в виде модели, которой соответствует задача оптимизации с готовым и эффективным аппаратом решения. Иными словами, исходная задача не всегда укладывается в рамки задач математического программирования или теории графов, оптимизации аналитических функций небольшого числа переменных или других частных задач, для которых уже разработаны методы решения. В этом случае очень полезным средством оказываются эвристические методы решения задач, которые не являются строгими и основаны на здравом смысле и имеющемся опыте решения подобных задач в прошлом.

Следует отметить, что при исследовании реальных экономических систем этапы построения модели и ее решения могут повторяться несколько раз, постепенно приближая модель по свойствам к объекту. Дополнительная информация, полученная при этом, может также привести к пересмотру целей и критериев эффективности задачи, т.е. изменить ее постановку.

Самый последний и ответственный этап – осуществление решения. Он выполняется лицами или лицом, ответственным за работу системы. Задача разработчиков на этом этапе в том, чтобы представить свои решения и рекомендации в наглядной, понятной и убедительной форме. От этого может в сильной степени зависеть дальнейшая судьба результатов [4].

Многообразие реальных ситуаций вызвало необходимость в рассмотрении огромного числа вариантов задачи управления предприятием, которые систематизированы лишь частично. Использование богатейшего материала, накопленного теорией Управления запасами (Inventory Control), было бы полезно и при получении классификации управления предприятием, немыслимо без его упорядочения в рамках единой классификации. Попытки такой классификации и введения унифицированных обозначений (по типу известной нотации Кендалла в теории массового обслуживания) предпринимались неоднократно, но оказались малопродуктивными.

В настоящее время классификация моделей проводится по нескольким десяткам элементов. Укрупненно она различает модели по

- числу номенклатур;
- числу источников выдачи продукции;
- способу рассмотрения динамики выпуска или потребления;
- целевой функции, являющейся предметом оптимального управления;
- характеру восполнения ресурсов;
- характеру спроса;
- стратегии выполнения заказов;
- способу контроля уровня запаса;
- задержке поставок.

Дополнительно модель характеризуется ее математической проработкой:

- оптимальное решение не приводится;
- решение дается в замкнутом виде (формула);
- дается соотношение, определяющее итерации;
- описан имитационный алгоритм;
- получено приближенное решение;
- рекомендован другой вычислительный процесс.

Сразу же отметим, что между этими пунктами не всегда удается привести строгое различие, а последний неинформативен.

Приведем известный статистический анализ разработанных моделей в разрезе предложенной классификации:

- 82% моделей однородные, 18% - многономенклатурные;
- только 10% были связаны с конкретным видом продукта;
- 79% работ рассматривают детерминированный спрос;

- 77% работ посвящены статическим моделям (с неизменными параметрами);
- в 60% работ используются непрерывные управляющие переменные;
- в 24% случаев рассматривается бездефицитное снабжение, в 55% - отложенный спрос, в 14% - потерянный;
- вероятностные модели рассмотрены в 51% работ, методы математического анализа использованы в 26% случаев, динамическое программирование в 11%;
- оптимальное решение получено в 30% случаев; в 8% работ предложены итерационные схемы, в 4% - аппроксимации; менее чем в 3% работ для сложных задач приведены детальная схема алгоритма или программа.

Эта статистика чрезвычайно поучительна. Она дает ясную и довольно грустную картину распределения усилий исследователей: преимущественно что полегче, в абстрактной постановке, без серьезной проработки вычислительных аспектов [5]. В связи с этим в настоящей работе предпринята попытка более углубленного рассмотрения вопросов, связанных с:

- проведением анализа существующих подходов и методов обеспечивающих планирование, учет и анализ ресурсов предприятия по освоению, захвату и удержанию рынка при выпуске изделий произвольной номенклатуры;
- разработкой эффективной нелинейной модели функционирования предприятия;

- учетом неопределенности в параметрах модели функционирования предприятия;
- исследованием влияния внешних факторов на условия функционирования модели, представленных в виде мероприятий по продвижению продукции на рынке;
- исследованием на устойчивость бизнес-процессов в рамках функционирования предприятия;
- разработкой методики использования модели управления производством на примере, описывающем работу машиностроительного предприятия.

РАЗДЕЛ 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ МАССОВОГО ПРОИЗВОДСТВА

2.1.Общая постановка задачи построения математической модели управления производством продукции

2.1.1.Базовый продукт в модели описания микросостояния производственного процесса

Производственный процесс предприятия включает в себя выпуск изделий от нескольких единиц до сотен наименований. Число номенклатурных изделий увеличивается за счет различия по весу, цвету, размеру, фасону; имеется различия по номиналу (емкости, мощности, сопротивлению, быстродействию); по виду и кратности упаковки. При большом числе номенклатурных изделий использование сложных методик по управлению производством данных изделий оказывается невозможным, а стоимость информационной системы может превзойти предполагаемую экономию за счет ее внедрения. Поэтому в зависимости от затрат на производство или вида технологического процесса производимые изделия делят на группы (агрегирование), подход к каждой из которых осуществляется дифференцированно. Первым шагом к агрегированию производимых изделий является упорядочивание списка номенклатуры в порядке убывания стоимостного спроса. По мнению специалистов [6], строгая оптимизация должна проводиться лишь по 5-10% номенклатуры, суммарный объем производства по которой в стоимостном исчислении составляет до 65% от общего объема. Для второй группы, составляющей около 25% по составу и 30% по суммарному объему производства в стоимостном выражении, допустимо применять простейшие расчетные методы. Для всех остальных номенклатурных изделий моделирование производства организуется из соображений практического удобства или по стабильным нормам.

Для построения модели производственного процесса введем понятие базовый продукт модели. *Базовый продукт* – это элемент большой системы на который идет перенос стоимости при его движении вдоль технологической цепочки.

Состояние производственной системы будем определять как состояние множества базовых продуктов системы. Параметры и величины, описывающие состояние базового продукта системы, будем называть микроскопическими параметрами и величинами, а подход к описанию производственной системы через микроскопические параметры и величины – микроскопическим описанием.

Исходя из вышесказанного, рассмотрим варианты выбора базового продукта для моделирования различных производственных систем. Так, например, при построении модели производственного процесса для одно-номенклатурного предприятия с массовым выпуском продукции за *базовый продукт* модели может быть взято выпускаемое производством *изделие*. Подобный подход применим и для производственного предприятия, массово выпускающего несколько номенклатур, каждая из которых при построении модели массового производственного процесса характеризуется своими законами продвижения по этапам технологической цепочки производственного процесса. При изготовлении предприятием большого количества изделий разной номенклатуры, сильно отличающихся друг от друга по технологическим признакам, времени и себестоимости изготовления, за *базовый продукт* целесообразно брать понятие *договор*, заключенный на выпуск продукции соответствующего ассортимента по соответствующей цене и в соответствующем количестве. Часто в производственной практике название *договор* заменяется на *заказ*. Позаказная система работы производства позволяет, с одной стороны, отслеживать выполнение заказов, представляющих собой выполнение обязательств по заключенному договору со сторонним предприятием, с другой стороны, минимизировать складские запасы как сырья и материалов, так и готовой продукции. Однако недостаток подобного подхода при построении моделей производственного процесса состоит в том, что каждый заказ имеет присущие только ему параметры: например, срок изготовления продукции по договору T_d и сумма затрат на изготовление продукции по договору S_d, что приводит к большому количеству переменных $[T_{d_j}, S_{d_j}]$ в модели производственного процесса предприятия, природа возникновения которых носит вероятностный характер (j – индекс соответствующего заключенного договора). Если количество договоров за отчетный период небольшое, то обычно с целью повышения эффективности системы управления производственным процессом используется дифференцирование договоров на более мелкие этапы работ (разделение на подзаказы, недельные или декадные задания). Следующий подход заключается в переводе выпускаемой производством номенклатуры к эквивалентному изделию, которое может быть принято за базовый продукт. Для описания состояния эквивалентного изделия введем, например, понятие эквивалентный срок изготовления T_d и понятие эквивалентная себестоимость S_d. В случае одно-продуктового подхода к построению модели производства эквивалентному изделию будет соответствовать реально производимое на производстве изделие с временем изготовления T_d и себестоимостью изготовления S_d.

Количество вариантов выбора базового продукта системы может быть достаточно велико. Окончательный вариант выбора базового продукта системы определяется, с одной стороны, получением наиболее простой с точки зрения описания и решения систем уравнений модели производственного процесса, с другой стороны, наиболее близко описывающей реальный производственный объект. Принимая во внимание рассмотренные выше варианты выбора базового продукта производственного процесса, перейдем к построению модели, описывающей производственный процесс на основании микропараметров производственной системы.

2.1.2.Функция распределения случайной величины – первичное понятие моделирования производственной деятельности предприятия

При построении моделей управления производственными процессами довольно часто используют подход, когда случайные параметры рассматриваются детерминированными или описываются наперед заданной функцией распределения случайной величины. Такой подход нашел широкое применение и в других теориях, например, управлении запасами и управлении ресурсами, когда спрос или потребление, например, задается одним из известных законов, полученных главным образом из статистики поведения подобных систем. Постановка задачи создает впечатление, что удается найти единственное оптимальное решение проблемы. Однако в действительности данный подход несет на себе печать случайности, ибо решение задачи получено на основании исходных данных, выбранных случайным образом из множества возможных. В частности, решение задачи будет определяться выбором функции распределения случайной величины, которая обычно апроксимируется на основании имеющейся статистики для соответствующего продукта (услуги) или заключения экспертов, если такая статистика отсутствует. С другой стороны, каждый новый продукт (услуга) обладает своими присущими только ему, конкретными параметрами, которые в частности и определяют вид функции распределения случайной величины. Таким образом, задача получения реальной функции распределения случайной величины позволяет с наперед заданной точностью осуществить описание фактически действующей производственной системы.

Перейдем теперь непосредственно к описанию состояния производственной системы. Главное в таком описании состоит в том, что состояние производственной системы определяется состоянием множества базовых продуктов системы. Поведение каждого базового продукта подчиняется определенным законам. Эти законы определяются установленными на предприятии технологическими процессами изготовления конкретно взятой продукции, производственным планом, трудовыми ресурсами, наличием количества и состояния оборудования. Состояние производственной системы, состоящей из базовых продуктов, в некоторый момент времени будет задано, если будет задано состояние каждого базового продукта, а состояние производственной системы в любой другой момент времени может быть просто определено из решения уравнений состояния базовых продуктов. Такое описание производственной системы, как уже говорилось ранее, будем называть микроописанием, а величины и параметры, связанные с данным описанием – микровеличинами и микропараметрами. Однако, если количество базовых продуктов N_I много больше единицы, то решить систему из N_I-уравнений состояния базовых продуктов, описывающих состояние производственной системы, практически невозможно. Последнее уточнение требует перехода от микроописания производственной системы к макроописанию, включающему в себя некий элемент вероятностной природы. Речь идет о макро- или сокращенном описании, когда во внимание принимается только частичная информация о данном микросостоянии, меняющемся автономно во времени. Основная трудность в таком описании состоит в том, чтобы выделить те характеристики множества всех микросостояний базовых продуктов (такие характеристики в дальнейшем будем называть макровеличинами или макропараметрами), которые можно было бы измерить макрообразом на уровне состояния предприятия. Тем самым макровеличины посредством точных уравнений связаны с другими макровеличинами через интегральные параметры микрорассмотрения. Таким образом, значения одних лишь макровеличин в настоящем не определяют однозначно их значения в будущем, т.е. макровеличины изменяются во времени не автономно.

Перейдем теперь к построению модели, описывающей поведение производственной системы. Для наглядности рассмотрим одно-номенклатурное предприятие с серийным выпуском продукции. За базовый продукт модели возьмем изделие. Состояние базового продукта в виде изделия будем описывать микровеличинами (S_j, μ_j), где S_j(грн) - сумма общих затрат, понесенных предприятием на изготовление j-го базового продукта на текущий момент времени, выраженных в гривнах ; $\mu_j = \frac{\Delta S_j}{\Delta t}$; $\Delta t \to 0$ (грн/час) - сумма затрат в единицу времени, которые несет предприятие на изготовление j-го базового продукта в текущий момент времени, $0 \le j \le N_1$, N_1- количество базовых продуктов, находящихся в производственном процессе на всей технологической цепочке производства.

Состояние производственной системы в некоторый момент времени будет определено, если определены в некоторый момент микровеличины $(S_1, \mu_1; \ldots\ldots S_{N_1}, \mu_{N_1})$ всех базовых продуктов производственной системы. Положение системы в любой другой момент времени может быть найдено из системы уравнений состояния базовых продуктов:

$$\begin{cases} \dfrac{dS_j}{dt} = \mu_j, \\ \dfrac{d\mu_j}{dt} = f_j(t), \end{cases} \quad j = 1..N_1,$$

где $f_j(t)$ - функция, характеризующая установленные на предприятии технологические процессы изготовления конкретно взятой продукции в соответствии с производственным планом, трудовыми ресурсами и количеством оборудования.

Вместо того, чтобы рассматривать состояние производственной системы с микровеличинами $\left(S_1, \mu_1; \ldots\ldots S_{N_1}, \mu_{N_1}\right)$, введем дискретную функцию распределения числа N_1 базовых продуктов в фазовом пространстве (S, μ). Предполагается при этом, что функция распределения соответствующим образом нормирована.

Разумно ожидать, что при больших N_1 эту функцию распределения будет хорошо аппроксимировать *непрерывная* функция распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\chi(t,S,\mu)$, а изменение затрат, понесенных базовым продуктом в конкретном месте технологической цепочки производственного процесса $\dfrac{d\mu_j}{dt} = f_j(t)$ - непрерывная функция $f(t,S) = \dfrac{d\mu}{dt}$. Смысл функций $\chi(t,S,\mu)$, $f(t,S)$ подробным образом будет описан ниже в отдельных параграфах. Макровеличины производственной системы попытаемся записать в терминах функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат. Если производственная система состоит из нескольких множеств разного вида базовых продуктов, то для описания системы потребуется получить вид функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат для каждого множества конкретного базового продукта.

Идея описания базового продукта производственной системы в фазовом пространстве (S,μ) с помощью непрерывной функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат в какой-то мере парадоксальна. В самом деле, как подсказывает интуиция, при больших N_l такое описание вполне разумно. Однако, с качественной точки зрения оно совершенно неприемлемо, так как при любом конечном N_l истинная функция распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат будет всегда дискретна. Поэтому если мы хотим на основании такого описания сформулировать строгие утверждения, то придется сделать предельный переход при $N_l \to \infty$. Здесь, собственно, и возникает макроописание состояния производственной системы. Его можно представить себе, например, следующим образом. Разобьем фазовое пространство (S,μ) на большое число ячеек и вместо того, чтобы фиксировать точные значения микроскопических величин (S_j,μ_j) каждого базового продукта, будем приближенно характеризовать состояние производственной системы, задавая число базовых продуктов в каждой ячейке (число заполнения). Если ячейки $\Delta S_j \cdot \Delta\mu_j$ достаточно малы (т.е. их размеры таковы, что в них помещается только один базовый продукт), то приближенное описание будет нести в себе почти столь же подробную информацию, что и точное. Рассмотрим теперь другую предельную ситуацию, когда количество базовых продуктов гораздо больше, чем ячеек. Определим макроскопическое описание как исходное разбиение фазового пространства на конечное число ячеек, объявляя при этом соответствующие числа заполнения наблюдаемыми с макроскопической точки зрения. Таким образом, мы приходим к необходимости наряду с основным пределом при $N_l \to \infty$, рассматривать и предельный случай при стремящихся к нулю размерах ячейки.

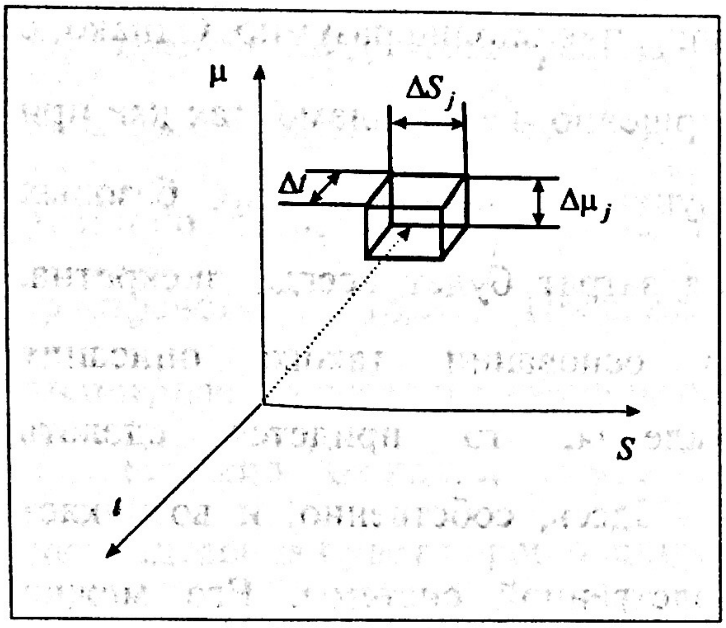

Рис.2.1. Элементарная ячейка фазового пространства

Конечно, в первую очередь следует учитывать предельный переход при $N_l \to \infty$ (или, по крайней мере, требовать, чтобы N_l гораздо быстрее стремилось к бесконечности, чем размеры ячейки к нулю). Интуитивно ясно также, что, с одной стороны, ячейки должны быть выбраны столь малыми, чтобы они удовлетворяли условию *бесконечной малости* с макроскопической точки зрения, а с другой стороны, они должны быть достаточно велики, чтобы каждая из них содержала большое число базовых продуктов (рис.2.1.).

В силу того, что величина $\chi(t,S,\mu)\cdot dS\cdot d\mu$ представляет собой число базовых продуктов в заданной бесконечно малой ячейке фазового пространства (S,μ), мы можем по изменению фазовой координаты S (выраженной в виде стоимости затрат, понесенных на базовый продукт в ходе его продвижения вдоль технологической цепочки) и фазовой скорости изменения затрат μ базового продукта со временем судить и об изменении самой функции $\chi(t,S,\mu)$. Запишем уравнение, описывающее поведение функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\chi(t,S,\mu)$:

$$\frac{d\chi(t,S,\mu)}{dt}=J(t,S,\mu),$$

где $J(t,S,\mu)$- есть некоторая функция, определяющаяся технологическим процессом производства базового продукта, на описании которой остановимся ниже. Данная функция $J(t,S,\mu)$ стремится при $t\to\infty$ свести начальное распределение базовых продуктов, описанное посредством функции распределения $\chi(0,S,\mu)$, к распределению базовых продуктов с функцией распределения $\chi(t,S,\mu)$, определяющейся технологическим процессом производственного подразделения. Запишем полную производную функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат по времени

$$\frac{d\chi}{dt}=\frac{\partial\chi}{\partial t}+\frac{\partial\chi}{\partial S}\cdot\frac{dS}{dt}+\frac{\partial\chi}{\partial\mu}\cdot\frac{d\mu}{dt}=\frac{\partial\chi}{\partial t}+\frac{\partial\chi}{\partial S}\cdot\mu+\frac{\partial\chi}{\partial\mu}\cdot f,$$

в которой μ и f может быть найдено из системы уравнений состояния базового продукта:

$$\begin{cases}\dfrac{dS}{dt}=\mu;\\[2mm] \dfrac{d\mu}{dt}=f(t,S),\end{cases}$$

где $f(t,S)$ - функция, характеризующая установленные на предприятии технологические процессы изготовления конкретно взятой продукции, производственный план, трудовые ресурсы, наличие количества и состояние оборудования. Данную функцию $f(t,S)$ будем называть в дальнейшем инженерно-производственной функцией. Ниже мы подробно остановимся на ее выводе.

Используя подстановку: $\dfrac{dS}{dt}=\mu;\ \dfrac{d\mu}{dt}=f(t,S),$ запишем уравнение, описывающее поведение функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат:

$$\frac{\partial\chi}{\partial t}+\frac{\partial\chi}{\partial S}\cdot\mu+\frac{\partial\chi}{\partial\mu}\cdot f=J.$$

Будем считать функцию распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\chi(t,S,\mu)$ нормированной

$$\int\limits_0^\infty dS\cdot\int\limits_0^\infty d\mu\cdot\chi(t,S,\mu)=N_I,$$

где N_I - количество базовых продуктов, находящихся в производственном процессе на всей технологической цепочке производства. Условие нормировки представляет из себя закон сохранения количества базовых продуктов, находящихся в производственном процессе.

В заключение еще раз напомним, что когда мы рассматриваем бесконечно малый объем $d\Omega=dS\cdot d\mu$, то подразумевается не математически, а виртуально малый объем фазового пространства (S,μ), т.е. участок пространства, размеры которого малы по сравнению с характерными размерами задачи, но в котором содержится большое количество базовых продуктов с характерными временами протекания микропроцессов, много меньшими времени рассмотрения задачи.

2.1.3. Инженерно-производственная функция производственного подразделения машиностроительного предприятия с серийным или массовым выпуском продукции

Выведение инженерно-производственной функции производственного подразделения машиностроительного предприятия из инженерных расчетов, а не из статистического анализа деятельности предприятия, имеет очевидные преимущества. Сфера производственных процессов, к которым может быть применена функция, известна заранее, и результаты изменения технологических параметров могут быть вычислены. Вывод инженерно-производственной функции производственного подразделения машиностроительного предприятия начнем с рассмотрения случая для одно-продуктового предприятия на основе понятия базового продукта, описанного в параграфе 2.1.1. После этого вывод инженерно-производственной функции можно распространить и на другие случаи, используя за основу понятия базовый продукт и эквивалентное изделие. Инженерно-технологический расчет инженерно-производственной функции будем строить на понятиях переменной и постоянной себестоимости базового продукта. Весь производственный процесс изготовления базового продукта (процесс увеличения затрат на единичный базовый продукт по мере продвижения вдоль технологической цепочки) разобьем на элементарные участки dS_j технологической цепочки. Размеры элементов должны удовлетворять требованиям, накладываемым на построение функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат в ходе производственного процесса.

Уравнение состояния базового продукта имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = \mu, \\ \dfrac{d\mu}{dt} = f_\mu(t,S) \end{cases},$$

где $f_\mu(t,S)$ - некая сила, определяющая скорость изменения затрат базового продукта при его движении вдоль технологической цепочки производственного процесса. Под скоростью изменения затрат μ, которые несет базовый продукт, будем подразумевать среднюю скорость изменения затрат за цикл выполнения технологической операции

$$\mu = \frac{1}{T_{баз}} \cdot \int_0^{T_{баз}} \mu^*(t,\tau) \cdot d\tau,$$

где $T_{баз}$ - время цикла на выполнение операции по увеличению стоимости базового продукта в отдельном элементарном участке dS_j технологической цепочки. Время цикла на выполнение операции $T_{баз}$ может быть представлено в виде суммы основного времени $T_{осн}$ цикла на выполнение операции (с учетом подготовительно-заключительного времени, коэффициента выполнения норм, коэффициента параллельности и коэффициента смен в сутках) и межоперационного времени $T_{меж}$, когда базовый продукт дожидается очереди выполнения над ним основной операции [7]:

$$T_{баз} = T_{осн} + T_{меж},$$

μ^{*} - мгновенная скорость изменения стоимости базового продукта в отдельном элементарном участке dS_j технологической цепочки:

$$\mu^{*} = \mu^{*}_{T_{осн}} + \mu^{*}_{T_{меж}}.$$

Будем полагать, что в течение межоперационного времени $T_{меж}$ средняя скорость изменения затрат базового продукта $\mu^{*}_{T_{меж}}$ много меньше средней скорости изменения затрат базового продукта $\mu^{*}_{T_{осн}}$ в течении основного времени цикла на выполнение операции $T_{осн}$ и в основном определяется постоянными затратами производственного процесса, например, на хранение и транспортировку деталей между операциями:

$$\mu^{*}_{T_{меж}} << \mu^{*}_{T_{осн}}.$$

Откуда

$$\mu = \frac{1}{T_{баз}} \cdot \int\limits_{0}^{T_{баз}} \mu^{*}(t,\tau) \cdot d\tau = \frac{1}{T_{баз}} \cdot \left[\int\limits_{0}^{T_{меж}} \mu^{*}(t,\tau) \cdot d\tau + \int\limits_{T_{меж}}^{T_{баз}} \mu^{*}(t,\tau) \cdot d\tau \right] =$$

$$= \left| \int\limits_{0}^{T_{меж}} \mu^{*}(t,\tau) \cdot d\tau << \int\limits_{T_{меж}}^{T_{баз}} \mu^{*}(t,\tau) \cdot d\tau \right| = \frac{1}{T_{баз}} \cdot \int\limits_{T_{меж}}^{T_{баз}} \mu^{*}(t,\tau) \cdot d\tau = \frac{T_{осн} \cdot \mu_0}{T_{баз}},$$

где μ_0 - средняя скорость изменения затрат базового продукта за период выполнения основной операции $T_{баз}$ на единице оборудования

$$\mu_0 = \frac{1}{T_{осн}} \cdot \int\limits_{T_{меж}}^{T_{баз}} \mu^{*}(t,\tau) \cdot d\tau.$$

Другими словами, мы представляем действительную мгновенную скорость изменения затрат базового продукта в виде двух слагаемых:

$$\mu^{*} = \mu_{\alpha} + \delta\mu_{\alpha} = \mu_{\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cdot sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot k}{T_{баз}} \cdot \tau\right) + b_k \cdot cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot k}{T_{баз}} \cdot \tau\right)\right],$$

одно из которых соответствует медленно меняющейся части μ_{α}, другое соответствует быстро меняющейся части

$$\delta\mu_{\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cdot sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot k}{T_{баз}} \cdot \tau\right) + b_k \cdot cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot k}{T_{баз}} \cdot \tau\right)\right].$$

Вторая составляющая скорости как бы осциллирует относительно μ_{α} с амплитудой колебания $\delta\mu_{\alpha\_Max} = Max[\delta\mu_{\alpha}]$, определяемой максимальным значением быстро меняющейся части $\delta\mu_{\alpha}$. Положение μ_{α} является центром колебания для быстро меняющейся части $\delta\mu_{\alpha}$. Поэтому, вместо того, чтобы следить за действительной мгновенной скоростью изменения затрат базового продукта: $\mu^{*} = \mu_{\alpha} + \delta\mu_{\alpha}$, целесообразно следить за медленно меняющейся частью $\delta\mu_{\alpha}$ скорости изменения затрат базового продукта μ^{*}.

В пределах периода выполняется равенство:

$$\int_{0}^{T_{баз}} \mu^{*}(t,\tau) \cdot d\tau = T_{баз} \cdot \mu_{\alpha} + \int_{0}^{T_{баз}} \delta\mu_{\alpha}(t,\tau) \cdot d\tau;$$

$$\int_{0}^{T_{баз}} \delta\mu_{\alpha}(t,\tau) \cdot d\tau = 0.$$

Используя равенство
$$\mu(t)=\frac{1}{T_{баз}}\cdot\int_{0}^{T_{баз}}\mu^{*}(t,\tau)\cdot d\tau$$

и разлагая скорость μ^{*} в окрестности медленноменяющейся части μ_{α}:

$$\mu^{*}=\mu_{\alpha}+\delta\mu_{\alpha}$$

можно записать условия применимости перехода к описанию, когда положение базового продукта в технологической цепочке производственного процесса определяется медленноменяющейся частью μ_{α}:

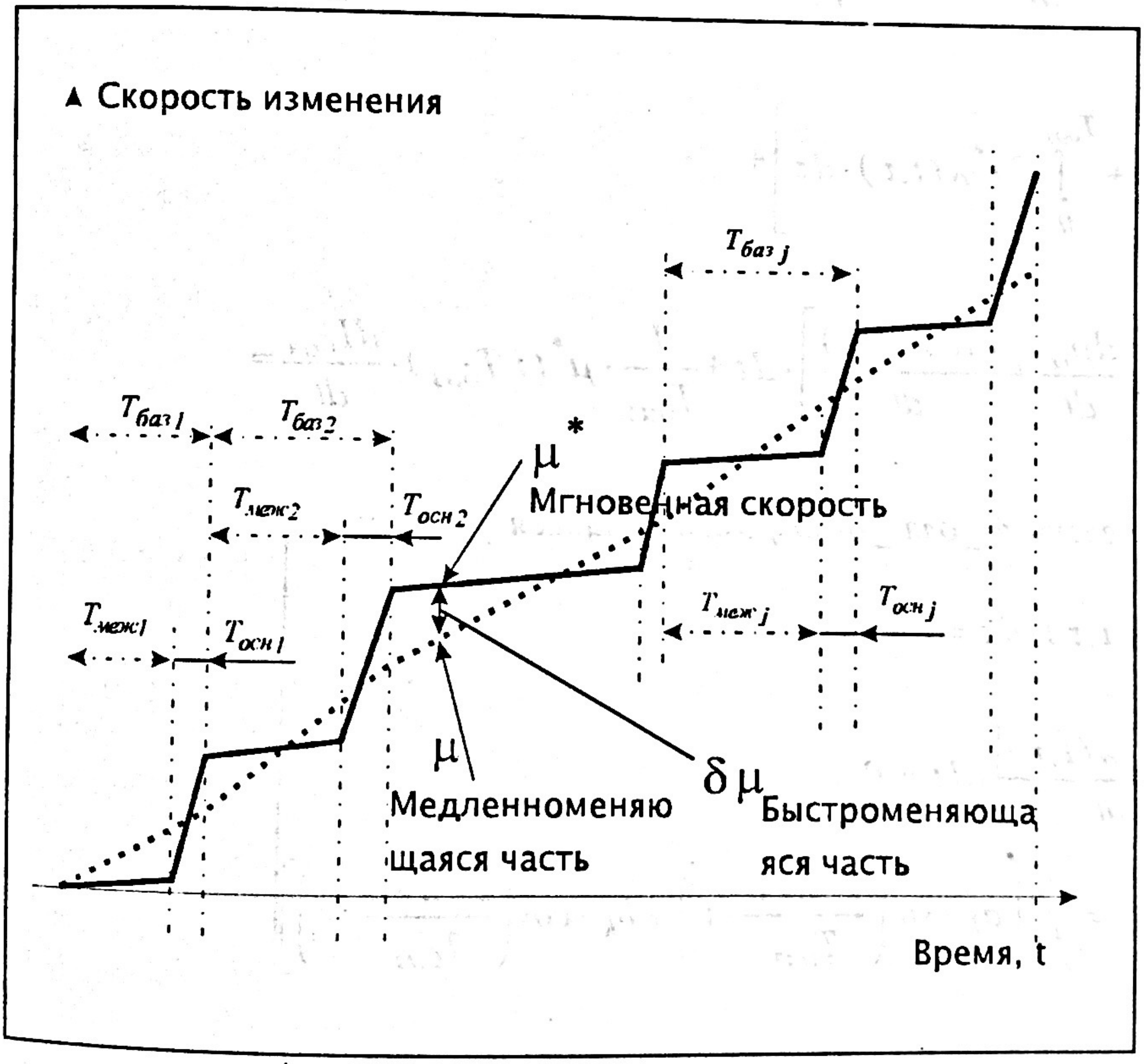

Рис.2.2. Быстро и медленноменяющаяся составляющие скорости изменения затрат базового продукта

$$\frac{d\mu}{dt}=\frac{d\left[\frac{1}{T_{баз}}\cdot\int\limits_0^{T_{баз}}\mu^*(t,\tau)\cdot d\tau\right]}{dt}=\frac{d\left[\frac{1}{T_{баз}}\right]}{dt}\cdot\int\limits_0^{T_{баз}}\mu^*(t,\tau)\cdot d\tau+$$

$$+\frac{1}{T_{баз}}\cdot\frac{d\left[\int\limits_0^{T_{баз}}\mu^*(t,\tau)\cdot d\tau\right]}{dt}=\frac{d\left[\frac{1}{T_{баз}}\right]}{dt}\cdot\int\limits_0^{T_{баз}}\mu^*(t,\tau)\cdot d\tau+$$

$$+\frac{1}{T_{баз}}\cdot\int\limits_0^{T_{баз}}\frac{d\left[\mu^*(t,\tau)\right]}{dt}\cdot d\tau+\frac{1}{T_{баз}}\cdot\mu^*(t,T_{баз})\cdot\frac{dT_{баз}}{dt}=\frac{d\left[\frac{1}{T_{баз}}\right]}{dt}\times$$

$$\times\left[\mu_\alpha\cdot T_{баз}+\int\limits_0^{T_{баз}}\delta\mu^*{}_\alpha(t,\tau)\cdot d\tau\right]+$$

$$+\frac{1}{T_{баз}}\cdot\int\limits_0^{T_{баз}}\left[\frac{d\mu_\alpha}{dt}+\frac{\delta\mu^*{}_\alpha(t,\tau)}{dt}\right]\cdot d\tau+\frac{1}{T_{баз}}\cdot\mu^*(t,T_{баз})\cdot\frac{dT_{баз}}{dt}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}из\_определени\ я\_для\_быстроменя\ ющейся\ \_части\\ \int\limits_0^{T_{баз}}\delta\mu^*{}_\alpha(t,\tau)\cdot d\tau=0;\\ \int\limits_0^{T_{баз}}\frac{d\left[\delta\mu^*{}_\alpha(t,\tau)\right]}{dt}\cdot d\tau=0;\\ где\_\delta\mu_\alpha=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cdot\sin\left(\frac{2\cdot\pi\cdot k}{T_{баз}}\cdot\tau\right)+b_k\cdot\cos\left(\frac{2\cdot\pi\cdot k}{T_{баз}}\cdot\tau\right)\right]\end{array}\right|=$$

$$=\frac{d\left[\frac{1}{T_{баз}}\right]}{dt}\cdot\mu_\alpha\cdot T_{баз}+\frac{1}{T_{баз}}\cdot\frac{d\left[\mu_\alpha\cdot T_{баз}\right]}{dt}+\frac{1}{T_{баз}}\cdot\mu^*(t,T_{баз})\cdot\frac{dT_{баз}}{dt}=$$

$$=\frac{d\left[\frac{1}{T_{баз}}\right]}{dt}\cdot\mu_\alpha\cdot T_{баз}+\frac{1}{T_{баз}}\cdot\frac{dT_{баз}}{dt}\cdot\mu_\alpha+\frac{d\mu_\alpha}{dt}+\frac{1}{T_{баз}}\cdot\mu^*(t,T_{баз})\cdot\frac{dT_{баз}}{dt}=$$

$$=-\frac{1}{T_{баз}}\cdot\frac{dT_{баз}}{dt}\cdot\mu_\alpha+\frac{1}{T_{баз}}\cdot\frac{dT_{баз}}{dt}\cdot\mu_\alpha+\frac{d\mu_\alpha}{dt}+\frac{1}{T_{баз}}\cdot\mu^*(t,T_{баз})\cdot\frac{dT_{баз}}{dt}=$$

$$=\frac{d\mu_\alpha}{dt}+\frac{1}{T_{баз}}\cdot\mu^*(t,T_{баз})\cdot\frac{dT_{баз}}{dt};$$

$$\frac{d\mu_\alpha}{dt}+\frac{1}{T_{баз}}\cdot\mu^*(t,T_{баз})\cdot\frac{dT_{баз}}{dt}=\frac{d\mu}{dt}=f_\mu(t,S)=$$

$$=f_\mu(t,S)\Big|_{\mu_\alpha}+\frac{\partial\left(f_\mu(t,S)\right)}{\partial S}\Bigg|_{\mu_\alpha}\cdot\delta S(\tau)+\ldots\ldots ,$$

где

$$\delta S(\tau)=\int_0^\tau\delta\mu_\alpha(t,\tau)\cdot d\tau=\sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k\cdot\cos\left(\frac{2\cdot\pi\cdot k}{T_{баз}}\cdot\tau\right)+B_k\cdot\sin\left(\frac{2\cdot\pi\cdot k}{T_{баз}}\cdot\tau\right)\right],$$

а знак $\Big|_{\mu_\alpha}$ означает, что разложение в ряд Тейлора идет в окрестности траектории точки, представляющей собой движение, описывающееся медленноменяющейся частью изменения затрат μ_α.

В случае $\frac{d\mu_\alpha}{dt}>>\frac{1}{T_{баз}}\cdot\mu^*(t,T_{баз})\cdot\frac{dT_{баз}}{dt}$ выше изложенное равенство принимает вид

$$\frac{d\mu}{dt}=f_\mu(t,S)=f_\mu(t,S)\Big|_{\mu_\alpha}+\frac{\partial\big(f_\mu(t,S)\big)}{\partial S}\Bigg|_{\mu_\alpha}\cdot\delta S(\tau)+\ldots\ldots=\frac{d\mu_\alpha}{dt},$$

Отсюда следуют условия применимости перехода от описания базового продукта в терминах мгновенной скорости изменения затрат к описанию в терминах средней скорости изменения затрат за период $T_{баз}$:

1) первое условие малого изменения периода цикла основной операции

$$\frac{d\mu_\alpha}{dt}>>\frac{1}{T_{баз}}\cdot\frac{dT_{баз}}{dt}\cdot\mu_\alpha;$$

которое требует, чтобы за период $T_{баз}$ выполнялось условие $\frac{\delta t}{T_{баз}}\cdot\frac{dT_{баз}}{dt}\to 0$ (изменение периода цикла должно быть мало по сравнению с самим периодом $T_{баз}$).

$$2)\ f_\mu(t,S)\Big|_{\mu_\alpha}>>\frac{\partial\big(f_\mu(t,S)\big)}{\partial S}\Bigg|_{\mu_\alpha}\cdot\delta S(T_{баз})$$

Это условие медленности изменения функции $f_\mu(t)$ для уравнения состояния базового продукта за цикл выполнения технологической операции $T_{баз}$. Данное условие требует, чтобы на отрезке $\delta S(T_{баз})$ функция $f_\mu(t)$ медленно менялась, то есть выполнялось условие медленности изменения (условие адиабатичности):

$$\frac{f_\mu(t,S)\Big|_{\mu_\alpha}}{\delta S(T_{баз})}>>\frac{\partial\big(f_\mu(t,S)\big)}{\partial S}\Bigg|_{\mu_\alpha}$$

На практике как правило производство описывается медленно меняющейся функцией состояния базового продукта $f_\mu(t)$ или может быть приведено к таковой за счет соответствующего построения этапов списания сырья и материалов, начисления фонда заработанной платы и т.п.

Это условие требует, чтобы за время цикла основной операции выполнялось условие медленного изменения функции состояния базового продукта $f_\mu(t)$.

Получим теперь выражение для инженерно-производственной функции. Пусть $\lambda_{оборуд}(t,S)\left[\frac{штук}{грв}\right]$ - есть плотность расположения оборудования вдоль технологической цепочки увеличения стоимости базового продукта. Тогда количество базовых продуктов, ожидающих свою очередь обработки на межоперационной стадии основной операции, есть

$$N_{базов\_опер} = \int\limits_{\left[S-\frac{1}{\lambda_{оборуд}}\right]}^{S} dS \cdot [\chi]_0(t,S),$$

где $\int\limits_0^\infty d\mu \cdot \chi(t,S,\mu) = [\chi]_0$, $\frac{1}{\lambda_{оборуд}}\left[\frac{грв}{штук}\right]$- величина, обратная плотности расположения оборудования вдоль технологической цепочки увеличения стоимости базового продукта (есть не что иное как затраты, отнесенные к базовому продукту, полученные между соседними основними операциями).

Так как $\lambda_{оборуд} \cdot S_d >> 1$, можем записать

$$\int\limits_{\left[S-\frac{1}{\lambda_{оборуд}}\right]}^{S} dS \cdot [\chi]_0(t,S) = \frac{1}{\lambda_{оборуд(t,S)}} \cdot [\chi]_0(t,S) >> 1,$$

S_d - конечная себестоимость базового продукта.

Имея условие применимости перехода

$$\frac{T_{осн}}{T_{баз}} = \frac{1}{\left[\frac{1}{\lambda_{оборуд(t,S)}} \cdot [\chi]_0(t,S)\right]} = \frac{[количество\_базовых\_элементов\_в\_обработк}{\left[\begin{array}{l} количество\_базовых\_элементов,\_ \\ наход.\_в\_межоперационной\_стадии \end{array}\right]}$$

и равенство

$$\mu_\alpha = \frac{T_{осн} \cdot \mu_0}{T_{баз}},$$

можно записать $$\mu_\alpha \cdot \frac{1}{\lambda_{оборуд(t,S)}} \cdot [\chi]_0(t,S) = \mu_0;$$

Продифференцируем левую и правую часть полученного равенства по времени:

$$\frac{d\left[\mu_\alpha \cdot [\chi]_0\right]}{dt} = \frac{d\left[\mu_0 \cdot \lambda_{оборуд}\right]}{dt}.$$

Дифференцируем по частям

$$\frac{d\left[\mu_\alpha \cdot [\chi]_0\right]}{dt} = [\chi]_0 \cdot \frac{d\mu_\alpha}{dt} + \mu_\alpha \cdot \left[\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t} + \frac{\partial[\chi]_0}{\partial S} \cdot \mu_\alpha\right],$$

Так как медленно меняющаяся часть скорости изменения затрат μ_α не зависит от переменной S, то ее можно внести под знак производной

$$\left[\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t}+\frac{\partial[\chi]_0}{\partial S}\cdot\mu_\alpha\right]=\left[\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t}+\frac{\partial([\chi]_0\cdot\mu_\alpha)}{\partial S}\right].$$

Ниже показано, что

$$\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t}+\frac{\partial([\chi]_0\cdot\langle\mu\rangle)}{\partial S}=\Delta(t,S)\qquad \Delta(t,S)\to 0,$$

где $\langle\mu\rangle$- средняя скорость потока базовых продуктов вдоль технологической цепочки. Величина $\Delta(t,S)\to 0$ отражает выход базовых продуктов из технологической цепочки, например, за счет брака или работы с подрядными организациями.

$$\frac{d\lfloor\mu_0\cdot\lambda_{оборуд}\rfloor}{dt}=\frac{\partial\lfloor\mu_0\cdot\lambda_{оборуд}\rfloor}{\partial t}+\frac{\partial\lfloor\mu_0\cdot\lambda_{оборуд}\rfloor}{\partial S}\cdot\mu_\alpha.$$

Отсюда полагая $\Delta(t,S)=0$, запишем

$$[\chi]_0\cdot\frac{d\mu_\alpha}{dt}=\frac{\partial\lfloor\mu_0\cdot\lambda_{оборуд}\rfloor}{\partial t}+\frac{\partial\lfloor\mu_0\cdot\lambda_{оборуд}\rfloor}{\partial S}\cdot\mu_\alpha,$$

$$\mu_\alpha\cdot\frac{1}{\lambda_{оборуд}(t,S)}\cdot[\chi]_0(t,S)=\mu_0.$$

и окончательно

$$\frac{d\mu_\alpha}{dt}=\frac{1}{[\chi]_0}\cdot\frac{\partial\lfloor\mu_0\cdot\lambda_{оборуд}\rfloor}{\partial t}+\frac{1}{[\chi]_0}\cdot\frac{\partial\lfloor\mu_0\cdot\lambda_{оборуд}\rfloor}{\partial S}\cdot\frac{\mu_0\cdot\lambda_{оборуд}}{[\chi]_0(t,S)}$$

или

$$\frac{d\mu_\alpha}{dt}=\frac{1}{[\chi]_0}\cdot\frac{\partial\lfloor\mu_0\cdot\lambda_{оборуд}\rfloor}{\partial t}+\frac{1}{[\chi]_0^{\,2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial\lfloor\mu_0\cdot\lambda_{оборуд}\rfloor^2}{\partial S}.$$

Исходными данными, определяющими технологический процесс, являются:

$$\frac{\partial\left[\mu_0 \cdot \lambda_{оборуд}\right]}{\partial t} = f_1(t,S) \qquad \text{и} \qquad \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial\left[\mu_0 \cdot \lambda_{оборуд}\right]^2}{\partial S} = f_2(t,S).$$

Здесь первая функция определяется стратегическим развитием и изменением технологического процесса производства, вторая функция - наличием людских ресурсов и количества смен в сутках.

Таким образом

$$\frac{d\mu_\alpha}{dt} = \frac{1}{[\chi]_0}\cdot f_1(t,S) + \frac{1}{[\chi]_0^{\,2}}\cdot f_2(t,S).$$

Функция $\frac{\partial\left[\mu_0 \cdot \lambda_{оборуд}\right]}{\partial t} = f_1(t,S)$ определяется перспективным капитальным планом введения в строй основных средств и технического переоснащения производственного процесса. Порядок построения функции $\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial\left[\mu_0 \cdot \lambda_{оборуд}\right]^2}{\partial S} = f_2(t,S)$ следующий: на основании норм расхода и расценок за выполненную работу, утвержденных на предприятии, строятся заданные таблично зависимости

$$\sum_{k=1}^{j}\left[\Delta S_{CuM\_k} + \Delta S_{ФОТ\_k}\right] \quad \text{от} \quad \sum_{k=1}^{j} T_{осн\_k} \quad \text{при } j=1..J.$$

Используя эти зависимости, получаем посредством предельного перехода

$$\left[\Delta S_{CuM\_j} + \Delta S_{ФОТ\_j}\right] \to 0$$

$$T_{осн\_j} \to 0$$

выражения, используемые для построения функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\chi(t,S,\mu)$:

$$\mu_0 = \lim_{T_{осн\_j} \to 0} \frac{\left[\Delta S_{СиМ\_j} + \Delta S_{ФОТ\_j}\right]}{T_{осн\_j}};$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial\left[\mu_0 \cdot \lambda_{оборуд}\right]^2}{\partial S} = f_2(t,S) =$$

Таблица 2.1.

Зависимости общих переменных затрат на основании норм расхода и расценок за выполненную работу

Номер технологической операции	$T_{осн}$ основное время, требуемое на выполнение операции (с учетом подготовительно-заключительного времени, коэффициента выполнения норм, коэффициента параллельности и коэффициента смен в сутках), час	Сумма затрат на сырье и материалы, использовавшиеся на данной технологической операции, грн	Сумма затрат на фонд оплаты труда персонала, задействованного на данной технологической операции, грн	Общее основное время, затраченное на изготовление базового продукта, час	Общая сумма переменных затрат, перенесенных на изготовление базового продукта за общее основное время, грн
j=1	$T_{осн\_1}$	$\Delta S_{СиМ\_1}$	$\Delta S_{ФОТ\_1}$	$\sum_{k=1}^{1} T_{осн\_k}$	$\sum_{k=1}^{1}\left[\Delta S_{СиМ\_k} + \Delta S_{ФОТ\_k}\right]$
j=2	$T_{осн\_2}$	$\Delta S_{СиМ\_2}$	$\Delta S_{ФОТ\_2}$	$\sum_{k=1}^{2} T_{осн\_k}$	$\sum^{2}\left[\Delta S_{СиМ\_k} + \Delta S_{ФОТ\_k}\right]$
…	…	…	…	…	…
j	$T_{осн\_j}$	$\Delta S_{СиМ\_j}$	$\Delta S_{ФОТ\_j}$	$\sum_{k=1}^{j} T_{осн\_k}$	$\sum^{j}\left[\Delta S_{СиМ\_k} + \Delta S_{ФОТ\_k}\right]$
…	…	…	…	…	…
j=J	$T_{осн\_J}$	$\Delta S_{СиМ\_J}$	$\Delta S_{ФОТ\_J}$	$\sum_{k=1}^{J} T_{осн\_k}$	$\sum^{J}\left[\Delta S_{СиМ\_k} + \Delta S_{ФОТ\_k}\right]$

Построение инженерно-производственной функции $\frac{d\mu}{dt} \approx \frac{d\mu_\alpha}{dt} = \frac{1}{[\chi]_0} \cdot \frac{\partial[\mu_0 \cdot \lambda_{оборуд}]}{\partial t} + \frac{1}{[\chi]_0^2} \cdot f_2(t,S)$ рассмотрено на основании изменения переменной себестоимости изготовления базового продукта. Часть постоянной себестоимости изготовления базового продукта может быть учтена посредством разнесения постоянных накладных расходов на изделия.

Период изготовления базового продукта бесконечно мал по сравнению с временем изменения технологии (например, расценок на операцию и норм расхода сырья и материалов – параметр μ_0) и периодом закупки дополнительного оборудования (параметр $\lambda_{оборуд}$). Таким образом, с достаточной степенью точности первым слагаемым $\frac{1}{[\chi]_0} \cdot \frac{\partial[\mu_0 \cdot \lambda_{оборуд}]}{\partial t}$ можно пренебречь по сравнению со вторым $\frac{1}{[\chi]_0^2} \cdot f_2(t,S)$ и инженерно-производственная функция примет более простой вид

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{1}{[\chi]_0^2} \cdot f_2(t,S),$$

в котором ее следует использовать при решении интегро-дифференциального уравнения, описывающего поведение функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат

$$\frac{\partial\chi}{\partial t} + \frac{\partial\chi}{\partial S} \cdot \mu + \frac{\partial\chi}{\partial\mu} \cdot f = J.$$

2.1.4. Генераторная функция работы технологического оборудования

При перемещении заготовки вдоль технологической цепочки производственного процесса на заготовку оказывается воздействие со стороны орудий труда. Таким образом происходит увеличение затрат, перенесенных на базовый продукт при его движении вдоль технологической цепочки производственного процесса. Оборудование, находящееся в технологической цепочке, как бы воздействует на базовый продукт, изменяя его качественно и количественно. Рассмотрим процесс оказания воздействия со стороны технологического оборудования на базовый продукт производственной системы со скоростью изменения затрат μ, находящейся в интервале между μ и $(\mu+d\mu)$. Если бы координаты базового продукта в фазовом пространстве (S,μ) определялись точно, то при воздействии технологического оборудования, работающего с определенной закономерностью, на базовый продукт с целью изменения его стоимости, результат воздействия был бы тоже определенным. Если же речь идет о воздействии со стороны технологического оборудования на базовый продукт, находящийся в некотором малом элементе $d\Omega=dS\cdot d\mu$ фазового пространства (S,μ), то ввиду неопределенности точного расположения базового продукта результат воздействии со стороны технологического оборудования на базовый продукт тоже будет неопределенным. Мы можем говорить только о вероятности того или иного исхода, а если быть точным, то о вероятности того, что после воздействия со стороны технологического оборудования базовый продукт будет находиться в том или ином состоянии. Процесс воздействия со стороны технологического оборудования на базовый продукт будем обозначать $[\mu \to \tilde{\mu}]$, где $\tilde{\mu} = \mu + \Delta\mu$, $\Delta\mu$ - отклонение скорости изменения затрат, которые несет базовый продукт из-за воздействия со стороны технологического оборудования, μ - скорость изменение затрат, которые несет базовый продукт до воздействия технологического оборудования, $\tilde{\mu} = \mu + \Delta\mu$ - скорость изменение затрат, которые несет базовый продукт после воздействия технологического оборудования. Полное же количество базовых продуктов, находящихся в единице объема фазового пространства, испытавших в единицу времени воздействие со стороны технологического оборудования, можно написать в виде произведения потока базовых продуктов $\chi(t,S,\mu)\cdot\mu$ на вероятность для каждого из них испытать воздействие $[\mu \to \tilde{\mu}]$ в некотором малом элементе $d\Omega = dS \cdot d\mu$ фазового пространства (S,μ). Что касается вероятности испытания воздействия $[\mu \to \tilde{\mu}]$, то о ней можно, по крайней мере, утверждать, что вероятность пропорциональна плотности расположения оборудования $\lambda_{оборуд}$ вдоль технологической цепочки. Таким образом, число базовых продуктов, испытавших в единицу времени воздействие со стороны технологического оборудования и принявшие значения μ в пределах $(\tilde{\mu};\tilde{\mu} + d\tilde{\mu})$, можно написать в виде

$$\psi[\mu \to \tilde{\mu}] \cdot \lambda_{оборуд} \cdot \mu \cdot \chi(t,S,\mu) \cdot d\tilde{\mu} \cdot dS \cdot d\mu,$$

где $\psi[\mu \to \tilde{\mu}]$ - есть некая функция, зависящая от параметров базового продукта до и после воздействие со стороны технологического оборудования. Эта функция может быть определена посредством решения задачи о воздействии технологического оборудования, работающего по строго определенному закону, на базовый продукт. Фактически это возможно сделать в аналитическом виде при самых простых предположениях о законе воздействия на базовый продукт. Однако, некоторые свойства этой функции могут быть получены из весьма общих соображений. Если представить вероятности перехода $\psi[\mu \to \tilde{\mu}]$ из одного состояния базового продукта со значением скорости изменения затрат μ в другое состояние со значением скорости изменения затрат μ в пределах $(\tilde{\mu};\tilde{\mu}+d\tilde{\mu})$ как

$$\psi[\mu \to \tilde{\mu}]\cdot d\tilde{\mu}, \qquad \text{где } \tilde{\mu} \in [0;\infty[,$$

то полная вероятность перехода в любое состояние равна единице и может быть записана

$$\int_0^\infty \psi[\mu \to \tilde{\mu}]\cdot d\tilde{\mu} = 1.$$

Так, например, для случая, когда μ и $\tilde{\mu}$ не связаны между собой, функцию перехода $\psi[\mu \to \tilde{\mu}]$, описывающую процесс воздействия оборудования на базовый продукт, можно записать в виде нормального закона распределения случайной величины $\tilde{\mu}$

$$\psi[\mu \to \tilde{\mu}] = A_\psi \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{\left(\tilde{\mu} - \frac{\lambda_{оборуд}}{[\chi]_0}\mu_0\right)^2}{\sigma^2}},$$

где $\sigma^2(t,S)$ - заданная функция параметров (t,S), характеризующая дисперсию затрат работы оборудования и потребления сырьевых и трудовых ресурсов на участке повышения стоимости базового продукта, A_ψ -постоянная интегрирования, определяемая из равенства:

$$\int\limits_0^\infty \psi[\mu \to \tilde{\mu}] \cdot d\tilde{\mu} = \int\limits_0^\infty A_\psi \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{\left(\tilde{\mu}-\frac{\lambda_{\text{оборуд}}}{[\chi]_0}\mu_0\right)^2}{\sigma^2}} \cdot d\tilde{\mu} = 1$$

Представленный вид функции перехода $\psi[\mu \to \tilde{\mu}]$, описывающей процесс воздействия оборудования на базовый продукт, может быть использован для описания работы большинства категорий оборудования, использующегося в технологической цепочке изготовления серийной продукции.

Перейдем теперь к выводу уравнения, описывающее поведение функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial \chi}{\partial S} \cdot \mu + \frac{\partial \chi}{\partial \mu} \cdot f = J.$$

Количество базовых продуктов, испытавших воздействие со стороны технологического оборудования $\psi[\mu \to \tilde{\mu}]$ в элементе объема $d\Omega = dS \cdot d\mu$ и принявшие значения μ в пределах $(\tilde{\mu}; \tilde{\mu} + d\tilde{\mu})$, можно написать в виде

$$\psi[\mu \to \tilde{\mu}] \cdot \lambda_{\text{оборуд}} \cdot \mu \cdot \chi(t, S, \mu) \cdot d\tilde{\mu} \cdot dS \cdot d\mu,$$

что характеризует выбывание базовых продуктов с объема $d\Omega = dS \cdot d\mu$ в объем $d\Omega = dS \cdot d\tilde{\mu}$. Наряду с этим в элемент объема $d\Omega = dS \cdot d\mu$ поступают базовые продукта с объема $d\Omega = dS \cdot d\tilde{\mu}$ посредством обратного перехода $\psi[\tilde{\mu} \to \mu]$ в количестве:

$$\psi[\mu \to \tilde{\mu}] \cdot \lambda_{\text{оборуд}} \cdot \tilde{\mu} \cdot \chi(t, S, \tilde{\mu}) \cdot d\tilde{\mu} \cdot dS \cdot d\mu .$$

Таким образом, в результате воздействия со стороны технологического оборудования рассматриваемое число базовых продуктов увеличивается в единицу времени на величину

$$dS \cdot d\mu \cdot \lambda_{\text{оборуд}} \cdot \int_0^\infty \{\psi[\tilde{\mu} \to \mu] \cdot \tilde{\mu} \cdot \chi(t,S,\tilde{\mu}) - \psi[\mu \to \tilde{\mu}] \cdot \mu \cdot \chi(t,S,\mu)\} \cdot d\tilde{\mu}$$

$=$

$$= d\Omega \cdot \lambda_{\text{оборуд}} \cdot \int_0^\infty \{\psi[\tilde{\mu} \to \mu] \cdot \tilde{\mu} \cdot \chi(t,S,\tilde{\mu}) - \psi[\mu \to \tilde{\mu}] \cdot \mu \cdot \chi(t,S,\mu)\} d\tilde{\mu}$$

Отсюда J может быть записана

$$J = \lambda_{\text{оборуд}} \cdot \int_0^\infty \{\psi[\tilde{\mu} \to \mu] \cdot \tilde{\mu} \cdot \chi(t,S,\tilde{\mu}) - \psi[\mu \to \tilde{\mu}] \cdot \mu \cdot \chi(t,S,\mu)\} \cdot d\tilde{\mu},$$

где функция $\psi[\mu \to \tilde{\mu}]$ является заданной и определяется параметрами технологического процесса.

Воспользуемся нормировочным свойством функции $\psi[\mu \to \tilde{\mu}]$:

$$\int_0^\infty \psi[\mu \to \tilde{\mu}] \cdot d\tilde{\mu} = 1 \text{ и}$$

вычислим интегралы

$$\int_0^\infty [\psi[\tilde{\mu} \to \mu] \cdot \tilde{\mu} \cdot \chi(t,S,\tilde{\mu})] \cdot d\tilde{\mu} = \psi[\tilde{\mu} \to \mu] \cdot [\chi]_1;$$

$$\int_0^\infty [\psi[\mu \to \tilde{\mu}] \cdot \mu \cdot \chi(t,S,\mu)] \cdot d\tilde{\mu} = \mu \cdot \chi(t,S,\mu),$$

где $\int\limits_0^\infty d\mu\cdot\mu\cdot\chi(t,S,\mu)=[\chi]_l$.

С учетом последнего получаем интегро-дифференциальное уравнение, описывающее поведение функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат

$$\frac{\partial\chi}{\partial t}+\frac{\partial\chi}{\partial S}\cdot\mu+\frac{\partial\chi}{\partial\mu}\cdot f=\lambda_{оборуд}\cdot\{\psi[\tilde{\mu}\to\mu]\cdot[\chi]_l-\mu\cdot\chi\}.$$

В состоянии статистического равновесия, когда на каждом этапе технологической цепочки образовался стационарный режим обработки базового продукта, функция J должна обращаться в ноль, поскольку

$$\lambda_{оборуд}\cdot\{\psi[\tilde{\mu}\to\mu]\cdot[\chi]_l-\mu\cdot\chi\}\to 0$$

при поступающем потоке $\psi[\tilde{\mu}\to\mu]\cdot[\chi]_1$, так как по определению вероятность перехода $\psi[\mu\to\tilde{\mu}]$ есть предельное отношение монохромного потока $\mu\cdot\chi$ к общему потоку $\int\limits_0^\infty d\mu\cdot\mu\cdot\chi(t,S,\mu)=[\chi]_l$:

$$\psi[\tilde{\mu}\to\mu]\to\frac{\mu\cdot\chi}{[\chi]_1}.$$

В частности, в предельном случае монохроматичного потока базовых продуктов

$$\tilde{\mu}=\frac{\lambda_{оборуд}}{[\chi]_0}\mu_0$$

имеем тождество

$$\lambda_{оборуд}\cdot\{\psi[\tilde{\mu}\to\mu]\cdot[\chi]_l-\mu\cdot\chi\}=0.$$

Итак, для уравнения, описывающего поведение функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат

$$\frac{\partial\chi}{\partial t}+\frac{\partial\chi}{\partial S}\cdot\mu+\frac{\partial\chi}{\partial\mu}\cdot f=J$$

представлен механизм нахождения генераторной и инженерно-производственной функции. Последнее позволяет найти решение уравнения, описывающего поведение функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат для конкретного производственного процесса. Как известно, работа большинства типов оборудования подчиняется нормальному закону распределения, что позволяет представить уравнение, описывающее поведение функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат в виде

$$\frac{\partial\chi}{\partial t}+\frac{\partial\chi}{\partial S}\cdot\mu+\frac{\partial\chi}{\partial\mu}\cdot f=\lambda_{оборуд}\cdot\{\psi[\tilde{\mu}\to\mu]\cdot[\chi]_1-\mu\cdot\chi\}.$$

и более подробно его исследовать в ряде предельных случаев, представляющих практический интерес.

2.1.5 Макропараметры производственной системы и уравнения, связывающие их между собой

Рассмотрим моменты функции распределения базовых продуктов $\chi(t,S,\mu)$ по скоростям изменения затрат, которые являются макропараметрами производственной системы и имеют вполне определенный производственный и экономический смысл.

- Нулевой момент функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат

$$\int_0^\infty d\mu\cdot\chi(t,S,\mu)=[\chi]_0$$

представляет собой интеграл функции распределения базовых продуктов по всем скоростям затрат μ, т.е. не что иное, как полную концентрацию базовых продуктов на элементарном участке себестоимости S базового продукта в любой момент времени t. Концентрация базовых продуктов на элементарном участке есть производственный задел перед конкретной технологической операцией и связана с общим количество базовых продуктов N_1, находящихся в производственном процессе

$$\int_0^\infty dS \cdot [\chi]_0 = N_1.$$

- Первый момент функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат

$$\int_0^\infty d\mu \cdot \mu \cdot \chi(t, S, \mu) = [\chi]_1$$

представляет собой интеграл функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат, умноженной на скорость изменения затрат μ базового продукта, по всем скоростям затрат μ. Это есть не что иное, как поток базовых продуктов в сторону увеличения стоимости затрат на их изготовление, или, другими словами, темпом поточной линии при движении базовых продуктов от одной технологической операции к другой. Первый момент функции распределения связан с нулевым моментом через среднюю скорость затрат, отнесенную на единичный базовый продукт

$$\int_0^\infty d\mu \cdot \mu \cdot \chi(t,S,\mu) = \langle \mu \rangle \cdot \int_0^\infty d\mu \cdot \chi(t,S,\mu);$$

$$[\chi]_1 = \langle \mu \rangle \cdot [\chi]_0,$$

где $\langle \mu \rangle = \dfrac{[\chi]_1}{[\chi]_0}$ средняя скорость отнесения затрат на базовый продукт в ходе технологического процесса. Таким образом, заделы $\int_0^\infty d\mu \cdot \chi(t,S,\mu) = [\chi]_0$ на конкретных технологических операциях связаны с темпом поточной линии $\int_0^\infty d\mu \cdot \mu \cdot \chi(t,S,\mu) = [\chi]_1$ через средняя скорость отнесения затрат на базовый продукт в ходе технологического процесса $\langle \mu \rangle = \dfrac{[\chi]_1}{[\chi]_0}$, которая определяется инженерно-производственной функцией производственного процесса.

- Второй момент функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат.

Рассмотрим уравнение, описывающее состояние базового продукта

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = \mu, \\ \dfrac{d\mu}{dt} = f(t,S) \end{cases},$$

где $f(t,S)$ - функция, характеризующая установленные на предприятии технологические процессы изготовления конкретно взятой продукции в соответствии с производственным планом, трудовыми ресурсами и количеством оборудования. Другими словами, это функция, определяющая воздействие со стороны технологии изготовления на базовый продукт с целью переноса ресурсов производственного процесса, представленного в денежном выражении. Это воздействие приводит к изменению как текущих затрат, перенесенных на базовый продукт, так и самой скорости переноса данных затрат.

Умножим левую и правую часть уравнения, описывающего состояние базового продукта на μ:

$$\mu \cdot \frac{d\mu}{dt} = f(t,S) \cdot \mu .$$

Внесем μ в левой части под знак дифференциала, в правой введем замену $\frac{dS}{dt} = \mu$.

Время, за которое функция $f(t,S)$ заметно меняется, много больше времени, в течение которого происходит воздействие на базовый продукт в ходе технологического процесса, т.е. функцию $f(t,S)$ можно считать практически независимой от времени, $f(t,S) \equiv f(S)$.

Практически средняя скорость переноса затрат $\langle \mu \rangle = \frac{[\chi]_1}{[\chi]_0}$ является медленно меняющейся во времени функцией. Отсюда мы можем записать

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d\left[\mu^2\right]}{dt} = f(S) \cdot \frac{dS}{dt} \quad \text{или} \quad \frac{1}{2} \cdot d\left[\mu^2\right] = f(S) \cdot dS .$$

Интегрируя обе части, получаем

$$\frac{\mu^2}{2} - \frac{\mu_{нач}{}^2}{2} = \int\limits_0^S f(\breve{S}) \cdot d\breve{S},$$

где $\mu_{нач}$ - соответствует скорости вложения затрат в начальной точке технологического процесса при $f(S) = f(0)$ и равна нулю. Данное значение $\mu_{нач}$ может быть отлично от нуля при условии, что перед технологическим процессом есть ряд операций, требующие затрат для начала технологического процесса над базовым продуктом. Данными затратами для большинства практически интересных случаев можно пренебречь. Отсюда получается компактная запись

$$\frac{\mu^2}{2} - \int\limits_0^S f(\breve{S}) \cdot d\breve{S} = 0,$$

представляющая собой для консервативной системы закон сохранения квадрата скорости изменения затрат $\frac{\mu^2}{2}$ для базового продукта.

Рассмотрим теперь физический смысл второго момента функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат

$$\int\limits_0^\infty d\mu \cdot \mu^2 \cdot \chi(t,S,\mu) = [\chi]_2;$$

$$[\chi]_2 = \int\limits_0^\infty d\mu \cdot \mu^2 \cdot \chi(t,S,\mu) =$$

$$= \int\limits_0^\infty d\mu \cdot [\mu - \langle\mu\rangle]^2 \cdot \chi(t,S,\mu) + \int\limits_0^\infty d\mu \cdot 2 \cdot \mu \cdot \langle\mu\rangle \cdot \chi(t,S,\mu) -$$

$$- \int\limits_0^\infty d\mu \cdot [\langle\mu\rangle]^2 \cdot \chi(t,S,\mu) =$$

$$= \int_0^\infty d\mu \cdot [\mu - \langle\mu\rangle]^2 \cdot \chi(t,S,\mu) + 2 \cdot \langle\mu\rangle \cdot \int_0^\infty d\mu \cdot \mu \cdot \chi(t,S,\mu) -$$

$$- [\langle\mu\rangle]^2 \cdot \int_0^\infty d\mu \cdot \chi(t,S,\mu) =$$

$$= \int_0^\infty d\mu \cdot [\mu - \langle\mu\rangle]^2 \cdot \chi(t,S,\mu) + [\langle\mu\rangle]^2 \cdot \int_0^\infty d\mu \cdot \chi(t,S,\mu)$$

или окончательно

$$[\chi]_2 = \int_0^\infty d\mu \cdot [\mu - \langle\mu\rangle]^2 \cdot \chi(t,S,\mu) + [\langle\mu\rangle]^2 \cdot [\chi]_0 = \left\langle \mu^2 \right\rangle \cdot [\chi]_0;$$

$$[\chi]_2 = \int_0^\infty d\mu \cdot [\mu - \langle\mu\rangle]^2 \cdot \chi(t,S,\mu) + \frac{[\chi]_1{}^2}{[\chi]_0} = \left\langle \mu^2 \right\rangle \cdot [\chi]_0;$$

$$\left\langle \mu^2 \right\rangle = \frac{[\chi]_2}{[\chi]_0}.$$

Введем обозначение

$$\int_0^\infty d\mu \cdot [\mu - \langle\mu\rangle]^2 \cdot \chi(t,S,\mu) = P(t,S) = \sigma^2(t,S) \cdot [\chi]_0.$$

Второй момент характеризует дисперсию случайной величины μ:

$$\int_0^\infty d\mu \cdot [\mu - \langle\mu\rangle]^2 \cdot \chi(t,S,\mu) = [\chi]_2 - [\langle\mu\rangle]^2 \cdot [\chi]_0;$$

$$\int_0^\infty d\mu \cdot [\mu - \langle\mu\rangle]^2 \cdot \chi(t,S,\mu) = \frac{1}{[\chi]_0} \cdot \left\{ \left\langle \mu^2 \right\rangle \cdot [\chi]_0{}^2 - [\chi]_1{}^2 \right\};$$

- Уравнение непрерывности потока базовых продуктов вдоль технологической цепочки (уравнение заделов базовых продуктов вдоль технологической цепочки)

С помощью моментов функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат можно получить уравнения законов сохранения для макровеличин при перемещении базовых продуктов вдоль технологической цепочки. Возьмем интегро-дифференциальное уравнение, описывающее поведение функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат:

$$\frac{\partial\chi}{\partial t}+\frac{\partial\chi}{\partial S}\cdot\mu+\frac{\partial\chi}{\partial\mu}\cdot f=\lambda_{оборуд}\cdot\{\psi[\tilde{\mu}\to\mu]\cdot[\chi]_1-\mu\cdot\chi\}$$

для случая работы технологического оборудования (переноса затрат на базовый продукт) по нормальному закону распределения

$$\psi[\mu\to\tilde{\mu}]=\mathrm{A}_{\Psi}\cdot\frac{1}{\sigma}\cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{\left(\tilde{\mu}-\frac{\lambda_{оборуд}}{[\chi]_0}\mu_0\right)^2}{\sigma^2}},\qquad\int_0^\infty\psi[\mu\to\tilde{\mu}]\cdot d\tilde{\mu}=1$$

и проинтегрируем его по всему диапазону случайной величины μ:

$$\int_0^\infty d\mu\cdot\frac{\partial\chi(t,S,\mu)}{\partial t}+\int_0^\infty d\mu\cdot\mu\cdot\frac{\partial\chi(t,S,\mu)}{\partial S}+\int_0^\infty d\mu\cdot f\cdot\frac{\partial\chi(t,S,\mu)}{\partial\mu}=\int_0^\infty d\mu\cdot J;$$

$$J=\lambda_{оборуд}\cdot\{\psi[\tilde{\mu}\to\mu]\cdot[\chi]_1-\mu\cdot\chi\}.$$

Вычислим интегралы по отдельности

$$\int_0^\infty d\mu\cdot\frac{\partial\chi(t,S,\mu)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty d\mu\cdot\chi(t,S,\mu)=\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t},$$

случайной величины по нормальному закону распределения

$$\psi[\mu \to \tilde{\mu}] = A_{\psi} \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{\left(\tilde{\mu}-\frac{\lambda_{оборуд}}{[\chi]_0}\mu_0\right)^2}{\sigma^2}}$$

имеем $\Delta(t,S) \equiv 0$

Следовательно, можно полагать для большинства случаев $\Delta(t,S) \to 0$.

Соединяя вместе вычисленные интегралы, получим уравнение непрерывности потока базовых продуктов вдоль технологической цепочки:

$$\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t} + \frac{\partial([\chi]_0 \cdot \langle\mu\rangle)}{\partial S} = \Delta(t,S), \quad \Delta(t,S) \to 0,$$

которое является законом сохранения базовых продуктов для технологического процесса при $\Delta(t,S) \equiv 0$. Член $\Delta(t,S) \to 0$ характеризует дополнительный отток или приток базовых продуктов в ходе прохождения их по этапам технологического процесса.

- Уравнение движения базовых продуктов вдоль технологической цепочки (уравнение темпа базовых продуктов вдоль технологической цепочки)

Возьмем интегро-дифференциальное уравнение, описывающее поведение функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат:

$$\frac{\partial\chi}{\partial t} + \frac{\partial\chi}{\partial S} \cdot \mu + \frac{\partial\chi}{\partial\mu} \cdot f = \lambda_{оборуд} \cdot \{\psi[\tilde{\mu} \to \mu] \cdot [\chi]_1 - \mu \cdot \chi\}$$

для случая работы технологического оборудования (переноса затрат на базовый продукт) по нормальному закону распределения где $$\int_0^\infty d\mu \cdot \chi(t,S,\mu) = [\chi]_0;$$

$$\int_0^\infty d\mu \cdot \mu \cdot \frac{\partial \chi(t,S,\mu)}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial S}\int_0^\infty d\mu \cdot \mu \cdot \chi(t,S,\mu) = \frac{\partial [\chi]_1}{\partial S} = \frac{\partial([\chi]_0 \cdot \langle\mu\rangle)}{\partial S},$$

где $\int_0^\infty d\mu \cdot \mu \cdot \chi(t,S,\mu) = [\chi]_1;\quad [\chi]_1 = \langle\mu\rangle \cdot [\chi]_0;$

$$\int_0^\infty d\mu \cdot f(t,S) \cdot \frac{\partial \chi(t,S,\mu)}{\partial \mu} = f(t,S) \cdot \int_0^\infty d\chi(t,S,\mu) = \left| \begin{array}{l} из\_свойств\_функции \\ \chi(t,S,\mu)\_получаем: \\ \chi(t,S,\mu)\big|_{\mu=0} = 0 \\ \chi(t,S,\mu)\big|_{\mu=\infty} = 0 \end{array} \right| = 0;$$

$$\int_0^\infty d\mu \cdot J = \Delta(t,S).$$

Для того, чтобы оценить член $\int_0^\infty d\mu \cdot J = \Delta(t,S)$, мы должны знать закономерности работы технологического оборудования, что определяется конкретно взятым случаем. Для простоты мы не будем рассматривать случаи, в которых базовые продукты появляются и исчезают посредством каких-то источников, например в результате брака или приходят с другого предприятия, пройдя частично технологический процесс на другом предприятии (т.е. предполагается наличие стока и истока базовых продуктов). Для случая распределения

$$\psi[\mu \to \tilde{\mu}] = \mathrm{A}_{\psi} \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot e^{\frac{1}{2}\frac{\left(\tilde{\mu} - \frac{\lambda_{оборуд}}{[\chi]_0}\mu_0\right)^2}{\sigma^2}}, \qquad \int_0^{\infty} \psi[\mu \to \tilde{\mu}] \cdot d\tilde{\mu} = 1,$$

умножим его на случайную величину μ и проинтегрируем его по всему диапазону случайной величины μ:

$$\int_0^{\infty} d\mu \cdot \mu \cdot \frac{\partial \chi(t,S,\mu)}{\partial t} + \int_0^{\infty} d\mu \cdot \mu^2 \cdot \frac{\partial \chi(t,S,\mu)}{\partial S} + \int_0^{\infty} d\mu \cdot \mu \cdot f \cdot \frac{\partial \chi(t,S,\mu)}{\partial \mu} =$$

$$\int_0^{\infty} d\mu \cdot \mu \cdot J;$$

$$J = \lambda_{оборуд} \cdot \{\psi[\tilde{\mu} \to \mu] \cdot [\chi]_1 - \mu \cdot \chi\}.$$

Вычислим интегралы по отдельности

- $$\int_0^{\infty} d\mu \cdot \mu \cdot \frac{\partial \chi(t,S,\mu)}{\partial t} =$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{под\_знаком\_интеграла\_находится\_частная\_производная\_по} \\ \text{переменной\_}t\text{,\_при\_этом\_считаем,\_что\_остальные\_переменные:} \\ S,\mu\text{\_являются\_постоянными\_и\_могут\_быть\_внесены\_под\_знак} \\ \text{частной\_производной: } \dfrac{\partial}{\partial t} \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{\infty} d\mu \cdot \left[\frac{\partial[\mu \cdot \chi(t,S,\mu)]}{\partial t} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} d\mu \cdot \mu \cdot \chi(t,S,\mu) = \frac{\partial [\chi]_1}{\partial t},$$

где $$\int_0^{\infty} d\mu \cdot \mu \cdot \chi(t,S,\mu) = [\chi]_1;$$

- $$\int_0^{\infty} d\mu \cdot \mu^2 \cdot \frac{\partial \chi(t,S,\mu)}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial S} \int_0^{\infty} d\mu \cdot \mu^2 \cdot \chi(t,S,\mu) = \frac{\partial [\chi]_2}{\partial S},$$

где $\int_0^\infty d\mu\cdot\mu^2\cdot\chi(t,S,\mu)=[\chi]_2$;

$$[\chi]_2=\int_0^\infty d\mu\cdot[\mu-\langle\mu\rangle]^2\cdot\chi(t,S,\mu)+[\langle\mu\rangle]^2\cdot[\chi]_0=\left\langle\mu^2\right\rangle\cdot[\chi]_0;$$

$$\int_0^\infty d\mu\cdot[\mu-\langle\mu\rangle]^2\cdot\chi(t,S,\mu)=P(t,S)=\sigma^2(t,S)\cdot[\chi]_0.$$

- Перейдем к интегрированию следующего произведения

$$\int_0^\infty d\mu\cdot\mu\cdot f(t,S)\cdot\frac{\partial\chi(t,S,\mu)}{\partial\mu}=f(t,S)\cdot\int_0^\infty d\mu\cdot\mu\cdot\frac{\partial\chi(t,S,\mu)}{\partial\mu}=$$

$$=f(t,S)\cdot\int_0^\infty d\mu\cdot\left[\frac{\partial[\mu\cdot\chi(t,S,\mu)]}{\partial\mu}-\chi(t,S,\mu)\right]=$$

$$=f(t,S)\cdot\int_0^\infty d\mu\cdot\left[\frac{\partial[\mu\cdot\chi(t,S,\mu)]}{\partial\mu}\right]-f(t,S)\cdot\int_0^\infty d\mu\cdot\chi(t,S,\mu)=$$

$$f(t,S)\cdot\int_0^\infty d[\mu\cdot\chi(t,S,\mu)]--f(t,S)\cdot[\chi]_0=-f(t,S)\cdot[\chi]_0,$$

где $f(t,S)\cdot\int_0^\infty d[\mu\cdot\chi(t,S,\mu)]\equiv 0$, так как функция $\chi(t,S,\mu)$ имеет следующее поведение при $\mu\to 0$ и $\mu\to\infty$:

поведение при $\mu \to 0$	**поведение при $\mu \to \infty$**
$\lim\limits_{\mu \to 0} [\chi(t,S,\mu) \cdot \mu] \to 0$, так как поведение произведения $[\chi(t,S,\mu) \cdot \mu]$ при $\mu \to 0$ определяется поведением скорости изменения затрат μ.	$\lim\limits_{\mu \to \infty} [\chi(t,S,\mu) \cdot \mu] \to 0$, так как поведение произведения $[\chi(t,S,\mu) \cdot \mu]$ при $\mu \to \infty$ определяется поведением функции распределения базовых продуктов $\chi(t,S,\mu)$ по скорости изменения затрат μ: $\chi(t,S,\mu) \approx e^{-\mu^2}$

- И последняя операция интегрирования

$$\int_0^\infty d\mu \cdot \mu \cdot J = \eta(t,S).$$

Для того, чтобы оценить член $\int_0^\infty d\mu \cdot \mu \cdot J = \eta(t,S)$, мы должны знать конкретный вид функции J.

Для случая работы технологического оборудования (переноса затрат на базовый продукт) по нормальному закону распределения

$$\psi[\mu \to \tilde{\mu}] = A_\Psi \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{\left(\tilde{\mu} - \frac{\lambda_{\text{оборуд}}}{[\chi]_0}\mu_0\right)^2}{\sigma^2}}, \qquad \int_0^\infty \psi[\mu \to \tilde{\mu}] \cdot d\tilde{\mu} = 1 .$$

можем записать генераторную функцию

$$J = \lambda_{оборуд} \cdot \{\psi[\tilde{\mu} \to \mu] \cdot [\chi]_1 - \mu \cdot \chi\},$$

определяющую закономерности работы технологического оборудования.

Соединяя вместе вычисленные интегралы, получим уравнение движения базовых продуктов вдоль технологической цепочки:

$$\frac{\partial[\chi]_1}{\partial t}+\frac{\partial[\chi]_2}{\partial S}-f(t,S)\cdot[\chi]_0=\eta(t,S).$$

Используя соотношения

$$[\chi]_1=\langle\mu\rangle\cdot[\chi]_0;$$

$$[\chi]_2-[\langle\mu\rangle]^2\cdot[\chi]_0=P(t,S)=\sigma^2(t,S)\cdot[\chi]_0;$$

получаем

$$\left\{\langle\mu\rangle\cdot\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t}+[\chi]_0\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial t}\right\}+\frac{\partial\left\{[\langle\mu\rangle]^2\cdot[\chi]_0+P(t,S)\right\}}{\partial S}-f(t,S)\cdot[\chi]_0=\eta(t,S).$$

Откуда, производя дифференцирование второго слагаемого, имеем

$$\langle\mu\rangle\cdot\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t}+[\chi]_0\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial t}+[\langle\mu\rangle]^2\cdot\frac{\partial[\chi]_0}{\partial S}+$$

$$+[\chi]_0\cdot2\cdot\langle\mu\rangle\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial S}+\frac{\partial P(t,S)}{\partial S}-f(t,S)\cdot[\chi]_0=\eta(t,S).$$

Используя уравнение непрерывности потока базовых продуктов вдоль технологической цепочки (уравнение заделов базовых продуктов вдоль технологической цепочки)

$$\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t}+\frac{\partial([\chi]_0\cdot\langle\mu\rangle)}{\partial S}=\Delta(t,S); \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial[\chi]_0}{\partial t}=\Delta(t,S)-\frac{\partial([\chi]_0\cdot\langle\mu\rangle)}{\partial S}$$

получаем

$$\langle\mu\rangle\cdot\Delta(t,S)-\langle\mu\rangle\cdot\frac{\partial([\chi]_0\cdot\langle\mu\rangle)}{\partial S}+[\chi]_0\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial t}+[\langle\mu\rangle]^2\cdot\frac{\partial[\chi]_0}{\partial S}+$$

$$+[\chi]_0\cdot 2\cdot\langle\mu\rangle\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial S}+\frac{\partial P(t,S)}{\partial S}-f(t,S)\cdot[\chi]_0=\eta(t,S).$$

Используя равенство

$$\langle\mu\rangle\cdot\frac{\partial([\chi]_0\cdot\langle\mu\rangle)}{\partial S}=[\langle\mu\rangle]^2\cdot\frac{\partial[\chi]_0}{\partial S}+[\chi]_0\cdot\langle\mu\rangle\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial S}$$

можем записать

$$\langle\mu\rangle\cdot\Delta(t,S)-[\langle\mu\rangle]^2\cdot\frac{\partial[\chi]_0}{\partial S}-[\chi]_0\cdot\langle\mu\rangle\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial S}+[\chi]_0\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial t}+[\langle\mu\rangle]^2\cdot\frac{\partial[\chi]_0}{\partial S}+$$

$$+[\chi]_0\cdot 2\cdot\langle\mu\rangle\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial S}+\frac{\partial P(t,S)}{\partial S}-f(t,S)\cdot[\chi]_0=\eta(t,S).$$

И окончательно

$$[\chi]_0\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial t}+[\chi]_0\cdot\langle\mu\rangle\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial S}+\frac{\partial P(t,S)}{\partial S}-f(t,S)\cdot[\chi]_0=\eta(t,S)-\langle\mu\rangle\cdot\Delta(t,S).$$

Введя обозначение

$$\eta(t,S)-\langle\mu\rangle\cdot\Delta(t,S)=\Gamma(t,S),$$

получим уравнение движения базовых продуктов вдоль технологической цепочки (уравнение темпа базовых продуктов вдоль технологической цепочки) в общем случае

$$\frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial t}+\langle\mu\rangle\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial S}=-\frac{1}{[\chi]_0}\cdot\frac{\partial P(t,S)}{\partial S}+f(t,S)+\frac{1}{[\chi]_0}\cdot\Gamma(t,S),$$

где f - инженерно-производственная функция – виртуальная сила, заставляющая перемещаться базовый продукт вдоль технологической цепочки, определяющаяся планом производства и технологическим процессом;

$-\frac{1}{[\chi]_0}\cdot\frac{\partial P(t,S)}{\partial S}$ - сила, представляющая собой давление на базовый продукт между технологическими операциями и определяющаяся дисперсией случайной величины μ;

$\frac{1}{[\chi]_0}\cdot\Gamma(t,S)$- сила, представляющая потери или поступления базовых продуктов посредством не технологических операций.

Как правило

$$\frac{1}{[\chi]_0}\cdot\Gamma(t,S)\to 0 \text{ и } \frac{1}{[\chi]_0}\cdot\frac{\partial P(t,S)}{\partial S}>>\frac{1}{[\chi]_0}\cdot\Gamma(t,S),$$

$$f(t,S)>>\frac{1}{[\chi]_0}\cdot\Gamma(t,S).$$

В частности для случая работы технологического оборудования (переноса затрат на базовый продукт) по нормальному закону распределения

$$\psi[\mu\to\tilde{\mu}]=\mathrm{A}_\psi\cdot\frac{1}{\sigma}\cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{\left(\tilde{\mu}-\frac{\lambda_{\text{оборуд}}}{[\chi]_0}\mu_0\right)^2}{\sigma^2}}, \qquad \int_0^\infty\psi[\mu\to\tilde{\mu}]\cdot d\tilde{\mu}=1,$$

$$\psi[\tilde{\mu}\to\mu]=\mathrm{A}_\psi\cdot\frac{1}{\sigma}\cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{\left(\mu-\frac{\lambda_{\text{оборуд}}}{[\chi]_0}\mu_0\right)^2}{\sigma^2}}, \qquad \int_0^\infty\psi[\tilde{\mu}\to\mu]\cdot d\mu=1$$

имеем

$$J=\lambda_{\text{оборуд}}\cdot\{\psi[\tilde{\mu}\to\mu]\cdot[\chi]_1-\mu\cdot\chi\}; \qquad \Delta(t,S)\equiv 0$$

и отсюда

$$\int_0^\infty d\mu\cdot\mu\cdot J=\eta(t,S)=\int_0^\infty d\mu\cdot\mu\cdot\lambda_{оборуд}\cdot\{\psi[\tilde{\mu}\to\mu]\cdot[\chi]_1-\mu\cdot\chi\}=$$

$$=\int_0^\infty d\mu\cdot\left\{\mu\cdot\lambda_{оборуд}\cdot A_\psi\cdot\frac{1}{\sigma}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\mu-\frac{\lambda_{оборуд}}{[\chi]_0}\mu_0\right)^2}{\sigma^2}}\cdot[\chi]_1\right\}-\int_0^\infty d\mu\cdot\mu\cdot\lambda_{оборуд}\cdot\mu\cdot\chi=$$

$$=[\chi]_1\cdot\lambda_{оборуд}\int_0^\infty d\mu\cdot\left\{\mu\cdot A_\psi\cdot\frac{1}{\sigma}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\mu-\frac{\lambda_{оборуд}}{[\chi]_0}\mu_0\right)^2}{\sigma^2}}\right\}-\int_0^\infty d\mu\cdot\mu\cdot\lambda_{оборуд}\cdot\mu\cdot\chi=$$

$$=\left|\begin{array}{l}мат.ожидание\_случайной\_величины\_\mu\_есть\\ \int_0^\infty\psi[\mu\to\tilde{\mu}]\cdot\mu\cdot d\tilde{\mu}=\int_0^\infty d\mu\cdot\left\{\mu\cdot A_\psi\cdot\frac{1}{\sigma}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\mu-\frac{\lambda_{оборуд}}{[\chi]_0}\mu_0\right)^2}{\sigma^2}}\right\}=\frac{\lambda_{оборуд}}{[\chi]_0}\mu_0\\ в\_силу\_условия\_для\_функции\_\psi[\mu\to\tilde{\mu}]:\\ \int_0^\infty\psi[\mu\to\tilde{\mu}]\cdot d\tilde{\mu}=\int_0^\infty d\mu\cdot\left\{A_\psi\cdot\frac{1}{\sigma}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\mu-\frac{\lambda_{оборуд}}{[\chi]_0}\mu_0\right)^2}{\sigma^2}}\right\}=1\end{array}\right|=$$

$$=\left(\frac{\lambda_{оборуд}}{[\chi]_0}\mu_0\right)\cdot\lambda_{оборуд}\cdot[\chi]_1-\lambda_{оборуд}\cdot[\chi]_2.$$

Таким образом, производственная система может быть представлена с макроскопической точки зрения как система базовых продуктов, для которой необходимо знать макроскопические величины функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат:

1. $\int\limits_0^\infty d\mu\cdot\chi(t,S,\mu)=[\chi]_0$ - заделы базовых продуктов вдоль технологической цепочки;

2. $\int\limits_0^\infty d\mu\cdot\mu\cdot\chi(t,S,\mu)=[\chi]_1$ - темп перемещения базовых продуктов вдоль технологической цепочки, $[\chi]_1=\langle\mu\rangle\cdot[\chi]_0$;

3. $[\chi]_2=\int\limits_0^\infty d\mu\cdot[\mu-\langle\mu\rangle]^2\cdot\chi(t,S,\mu)+\dfrac{[\chi]_1^{\,2}}{[\chi]_0}=\left\langle\mu^2\right\rangle\cdot[\chi]_0$;

$$\left\langle\mu^2\right\rangle=\frac{[\chi]_2}{[\chi]_0},$$

$$\int\limits_0^\infty d\mu\cdot[\mu-\langle\mu\rangle]^2\cdot\chi(t,S,\mu)=P(t,S)=\sigma^2(t,S)\cdot[\chi]_0.$$

$\sigma^2(t,S)$- среднеквадратичное отклонение случайной величины

и уравнения, связывающие макроскопические величины между собой:

1. $\dfrac{\partial[\chi]_0}{\partial t}+\dfrac{\partial([\chi]_0\cdot\langle\mu\rangle)}{\partial S}=\Delta(t,S)$ - уравнение непрерывности потока базовых продуктов вдоль технологической цепочки (уравнение заделов базовых продуктов вдоль технологической цепочки)

2. $\frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial t}+\langle\mu\rangle\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial S}=-\frac{1}{[\chi]_0}\cdot\frac{\partial P(t,S)}{\partial S}+f(t,S)+\frac{1}{[\chi]_0}\cdot\Gamma(t,S)$ -

уравнение движения базовых продуктов вдоль технологической цепочки (уравнение темпа базовых продуктов вдоль технологической цепочки), которые получены на основании свойств базовых продуктов (вероятностного состояния базовых продуктов) и могут быть использованы для получения закономерностей работы производства.

2.2. Общая система уравнений математической модели управления производством продукции для однопродуктового предприятия

Уравнение для функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\chi(t,S,\mu)$ в фазовом пространстве (S,μ) для момента времени t представляет собой интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial\chi}{\partial t}+\frac{\partial\chi}{\partial S}\cdot\mu+\frac{\partial\chi}{\partial\mu}\cdot f=$$

$$=\lambda_{оборуд}\cdot\int_0^{\infty}\left[\psi[\tilde{\mu}\to\mu]\cdot\tilde{\mu}\cdot\chi(t,S,\tilde{\mu})-\psi[\mu\to\tilde{\mu}]\cdot\mu\cdot\chi(t,S,\mu)\right]\cdot d\tilde{\mu},$$

где

- функция $\psi[\mu\to\tilde{\mu}]$ является заданной и определяется параметрами технологического процесса, представляет собой функцию перехода, описывающую процесс воздействия оборудования на базовый продукт;

- инженерно-производственная функция $f(t,S)$ - есть, действующая на базовый продукт внешняя сила, характеризующаяся установленными на предприятии технологическими процессами изготовления конкретно взятой продукции, производственным планом, трудовыми ресурсами, наличием количества и состояния оборудования, называемая производственной функцией предприятия:

$$f = \frac{d\mu}{dt} = \frac{1}{[\chi]_0} \cdot \frac{\partial[\mu_0 \cdot \lambda_{оборуд}]}{\partial t} + \frac{1}{[\chi]_0{}^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial[\mu_0 \cdot \lambda_{оборуд}]^2}{\partial S}.$$

Время цикла на выполнение операции $T_{баз}$, как было введено ранее, представлено в виде суммы основного времени $T_{осн}$ цикла на выполнение операции (с учетом подготовительно-заключительного времени, коэффициента выполнения норм, коэффициента параллельности и коэффициента смен в сутках) и межоперационного времени $T_{меж}$, когда базовый продукт дожидается очереди выполнения над ним основной операции: $T_{баз} = T_{осн} + T_{меж}$.

Так как, уравнение относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат содержит частные производные функции $\chi(t,S,\mu)$ по t,S,μ, то для его решения необходимо задать начальные условия

$$\chi(t,S,\mu)\big|_{t=0} = \chi(0,S,\mu)$$

и краевые условия

$$\chi(t,S,\mu)\big|_{S=0} = \chi(t,0,\mu);$$

$$\chi(t,S,\mu)\big|_{\mu\to\infty} \to 0.$$

Систему уравнений дополним условием нормировки функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\int\limits_0^\infty d\mu\cdot\chi(t,S,\mu)=[\chi]_0$, где концентрация базовых продуктов на элементарном технологическом участке связана с общим количество базовых продуктов N_1:

$$\int\limits_0^\infty dS\cdot[\chi]_0 = N_1,$$

и уравнением, связывающим инженерно-производственную функцию $f(t,S,\mu)$ с планом выпуска продукции $F_{план}(t)$, определяемым спросом:

$$\left.\int\limits_0^\infty d\mu\cdot\mu\cdot\chi(t,S,\mu)\right|_{S=Sd} = [\chi]_1\big|_{S=Sd};$$

$$\left.\int\limits_0^{T_{план}} dt\cdot[\chi]_1\right|_{S=Sd} = F_{план}(t).$$

Если период интегрирования $T_{план}$ – равен месяцу, то мы имеем дело с месячным планом.

Задача относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\chi(t,S,\mu)$ в полной формулировке имеет вид:

$$\frac{\partial\chi}{\partial t}+\frac{\partial\chi}{\partial S}\cdot\mu+\frac{\partial\chi}{\partial\mu}\cdot f=$$

$$=\lambda_{оборуд}\cdot\int\limits_0^\infty[\psi[\tilde\mu\to\mu]\cdot\tilde\mu\cdot\chi(t,S,\tilde\mu)-\psi[\mu\to\tilde\mu]\cdot\mu\cdot\chi(t,S,\mu)]\cdot d\tilde\mu;$$

$$f=\frac{d\mu}{dt}=\frac{1}{[\chi]_0}\cdot\frac{\partial[\mu_0\cdot\lambda_{оборуд}]}{\partial t}+\frac{1}{[\chi]_0^{\,2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial[\mu_0\cdot\lambda_{оборуд}]^2}{\partial S};$$

$$\chi(t,S,\mu)\big|_{t=0}=\chi(0,S,\mu);\quad \chi(t,S,\mu)\big|_{S=0}=\chi(t,0,\mu);$$

$$\chi(t,S,\mu)\big|_{\mu\to\infty}\to 0;$$

$$\int\limits_0^\infty dS\cdot[\chi]_0=N_1;\qquad \int\limits_0^{T_{план}}dt\cdot[\chi]_1\Bigg|_{S=Sd}=F_{план}(t).$$

В общем случае решить эту задачу для любой производственной системы не представляется возможным. Однако частные решения, точные или приближенные, могут дать полное представление о поведении базовых продуктов, а следовательно и самого производственного процесса, в некоторых интересных с точки зрения производства практических ситуациях, что в свою очередь укрепляет нашу уверенность в правильности выбранной математической модели, основанной на уравнении относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\chi(t,S,\mu)$. Что касается начальных условий, то они обычно являются частью производственной постановки задачи $\chi(t,S,\mu)\big|_{t=0}=\chi(0,S,\mu)$. Необходимость начальных условий объясняется тем, что рассматриваемое уравнение является уравнением эволюционного типа.

Менее очевидна ситуация с краевыми условиями. Они могут быть заданы в начале, в конце технологической цепочке или на одном из диспетчерских пунктов, где, например, происходит контроль качества базового продукта. К сожалению, экономико-теоретическая и экспериментально-производственная информация о состоянии базовых продуктов в месте задания краевых условий довольно ограничена и зачастую сводится к общим утверждениям, либо к построению интуитивных моделей. Например, модель краевых условий $\chi(t,S,\mu)\big|_{S=0} = \chi(t,0,\mu)$ может быть представлена в виде зависимости работы оборудования

$$\chi(t,S,\mu)\big|_{S=0} = \chi(t,0,\mu) \Rightarrow \qquad \chi(t,S,\mu)\big|_{S=0} = \chi_{оборуд}(t,0,\mu).$$

Другой не простой задачей, связанной с уравнением относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\chi(t,S,\mu)$, являются исследования стремления решения уравнения относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\chi(t,S,\mu)$ к стационарному режиму при $t \to \infty$. Следует ожидать, что функция распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\chi(t,S,\mu)$ при $t \to \infty$ будет определяться видом наперед заданной функции $\psi[\mu \to \tilde{\mu}]$. В этом случае хорошо было бы показать условия, при которых все решения начальной задачи для уравнения относительно функция распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\chi(t,S,\mu)$ стремятся к функции, описывающей стационарный производственный процесс $\chi_{оборуд}(t,S,\mu)$. Особенно это приобретает значение, когда краевые условия задачи таковы, что задача допускает стационарное решение, отличное от вида заданной функции $\chi_{оборуд}(t,S,\mu)$. К сожалению, даже в простейших случаях стационарные задачи плохо поддаются аналитическому исследованию, за исключением тех, для которых можно аппроксимировать исходные уравнения соотношениями, отвечающими в частности, например, линеаризованной модели.

2.3. Решения системы уравнений математической модели управления производством продукции для однопродуктового предприятия в некоторых предельных случаях

2.3.1. Использование методов теории возмущения для описания реальных неравновесных состояний производственной системы

Как уже отмечалось, решение и анализ уравнения относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\chi(t,S,\mu)$ в фазовом пространстве (S,μ):

$$\frac{\partial\chi}{\partial t}+\frac{\partial\chi}{\partial S}\cdot\mu+\frac{\partial\chi}{\partial\mu}\cdot f=$$

$$=\lambda_{оборуд}\cdot\int_0^{\infty}\left[\psi\left[\tilde{\mu}\to\mu\right]\cdot\tilde{\mu}\cdot\chi(t,S,\tilde{\mu})-\psi\left[\mu\to\tilde{\mu}\right]\cdot\mu\cdot\chi(t,S,\mu)\right]\cdot d\tilde{\mu}$$

связано со значительными трудностями. Весьма точный класс точных решений представляется равновесными функциями, которые будем обозначать посредством $\chi_{оборуд}(t,S,\mu)$. Данные функции являются решением уравнения относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\chi(t,S,\mu)$ для равновесного случая и определяются параметрами технологического процесса, описывающего процесс воздействия оборудования на базовый продукт. Смысл этих распределений $\lim\limits_{t\to\infty}\chi(t,S,\mu)\to\chi_{оборуд}(t,S,\mu)$ ясен: они описывают равновесные состояния производственной системы. Для того, чтобы описать более реальные неравновесные состояния, когда имеется существенное влияние дисперсии

$$\int\limits_0^\infty d\mu\cdot[\mu-\langle\mu\rangle]^2\cdot\chi(t,S,\mu)=P(t,S)=\sigma^2(t,S)\cdot[\chi]_0$$

и функции $\psi[\mu\to\tilde{\mu}]$ посредством интеграла

$$\lambda_{оборуд}\cdot\int\limits_0^\infty[\psi[\tilde{\mu}\to\mu]\cdot\tilde{\mu}\cdot\chi(t,S,\tilde{\mu})-\psi[\mu\to\tilde{\mu}]\cdot\mu\cdot\chi(t,S,\mu)]\cdot d\tilde{\mu}\ ,$$

приходится полагаться на приближенные методы. Некоторые из наиболее известных методов основаны на теории возмущений: выбирается малый параметр ε, отвечающий исходной постановке задачи, и функция распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\chi(t,S,\mu)$ раскладываются в асимптотически сходящийся ряд по малому параметру ε:

$$\chi(t,S,\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\chi_k(t,S,\mu)\ ,\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon\cdot\chi_{k+1}(t,S,\mu)}{\chi_k(t,S,\mu)}\to 0,$$

где выбор малого параметра ε будет показан ниже.

Используем такое же разложение по малому параметру ε для функции $J(t,S,\mu)=\dfrac{d\chi(t,S,\mu)}{dt}$:

$$J(\chi,\chi)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k}\sum_{m=0}^{k}J(\chi_m,\chi_{k-m}).$$

Видно, что разложении функции $\chi(t,S,\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k}\chi_k(t,S,\mu)$ в степенной ряд по параметру ε влечет за собой разложение интеграла

$$\lambda_{оборуд}\cdot\int_0^{\infty}[\psi[\tilde{\mu}\to\mu]\cdot\tilde{\mu}\cdot\chi(t,S,\tilde{\mu})-\psi[\mu\to\tilde{\mu}]\cdot\mu\cdot\chi(t,S,\mu)]\cdot d\tilde{\mu}$$

с коэффициентами

$$J_k=\sum_{m=0}^{k}J(\chi_m,\chi_{k-m}).$$

Значительное число разложений уравнения относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\chi(t,S,\mu)$ обладает тем свойством, что членом нулевого порядка в них служит равновесная функция $\chi_{оборуд}(t,S,\mu)$, для которой выполняется условие $J(t,S,\mu)=\dfrac{d\chi_{оборуд}(t,S,\mu)}{dt}=0$. Это следует либо из уравнения нулевого приближения, либо из предположений, лежащих в основе метода возмущений. Итак, в наших предположениях для членов разложения нулевого порядка имеем

$$J(\chi_0,\chi_0)=0,\quad \text{т.е.}\qquad J_0=0.$$

Отметим, что коэффициенты J_k представимы в виде следующей суммы

$$J_k=2\cdot J(\chi_0,\chi_k)+\sum_{m=1}^{k-1}J(\chi_m,\chi_{k-m}),$$

$$J(\chi_0, \chi_k) = J(\chi_k, \chi_0).$$

Видно, что первое слагаемое $2 \cdot J(\chi_0, \chi_k)$ соответствует значениям при $m = 0$ и $m = k$, а второй член включает в себя величины $\chi_m(t,S,\mu)$ при $m < k$, и следовательно, его можно считать известным при k –ом шаге метода возмущений. Таким образом, задача свелась к исследованию на каждом шаге линейного оператора $2 \cdot J(\chi_0, \chi_k)$, действующего на неизвестную функцию $\chi_k(t,S,\mu)$. Удобно положить $\chi_k = \chi_0 \cdot \delta_k$ и взять в качестве неизвестной величину δ_k.

Рассмотрим теперь выбор параметра ε, который при определенных условиях будем считать малым. Если при исходной постановке параметр ε не входит непосредственно в уравнение относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\chi(t,S,\mu)$ в фазовом пространстве (S,μ):

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial \chi}{\partial S} \cdot \mu + \frac{\partial \chi}{\partial \mu} \cdot f =$$

$$= \lambda_{оборуд} \cdot \int_0^\infty [\psi[\tilde{\mu} \to \mu] \cdot \tilde{\mu} \cdot \chi(t,S,\tilde{\mu}) - \psi[\mu \to \tilde{\mu}] \cdot \mu \cdot \chi(t,S,\mu)] \cdot d\tilde{\mu},$$

то следует обратиться к линеаризованному уравнению. Если же искать другие разложения, то первый шаг должен состоять в исследовании порядка величин различных слагаемых, входящих в уравнение относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат.

Обозначим через τ, η, ξ характерные время, скорость изменения затрат и шаг по переменной S. Тогда в первом приближении можно записать:

$$\frac{\partial\chi}{\partial t} \approx \tau^{-1}\cdot[\chi-\chi_0]; \qquad \frac{\partial\chi}{\partial S}\cdot\mu \approx \eta\cdot\xi^{-1}\cdot[\chi-\chi_0];$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial\mu}\cdot f = \Delta\eta^{-1}\cdot f\cdot[\chi-\chi_0]; \qquad J \approx \lambda_{оборуд}\cdot\eta\cdot[\chi-\chi_0].$$

Данную оценку следует воспринимать скорее как качественную, чем количественную. Однако такой подход обладает тем преимуществом, что позволяет легко сравнивать результаты, соответствующие различным микромоделям, так как уравнение относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\chi(t,S,\mu)$ в фазовом пространстве (S,μ):

$$\frac{\partial\chi}{\partial t}+\frac{\partial\chi}{\partial S}\cdot\mu+\frac{\partial\chi}{\partial\mu}\cdot f=$$

$$=\lambda_{оборуд}\cdot\int_0^{\infty}[\psi[\tilde{\mu}\to\mu]\cdot\tilde{\mu}\cdot\chi(t,S,\tilde{\mu})-\psi[\mu\to\tilde{\mu}]\cdot\mu\cdot\chi(t,S,\mu)]\cdot d\tilde{\mu},$$

будучи выраженное через макроизмеряемые величины τ, η, ξ, не зависит от вида интеграла:

$$\lambda_{оборуд}\cdot\int_0^{\infty}[\psi[\tilde{\mu}\to\mu]\cdot\tilde{\mu}\cdot\chi(t,S,\tilde{\mu})-\psi[\mu\to\tilde{\mu}]\cdot\mu\cdot\chi(t,S,\mu)]\cdot d\tilde{\mu},$$

и может быть представлено в виде уравнения относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат через макроизмеряемые величины τ, η, ξ:

$$\tau^{-1}\cdot[\chi-\chi_0]+\eta\cdot\xi^{-1}\cdot[\chi-\chi_0]+\Delta\eta^{-1}\cdot f\cdot[\chi-\chi_0]\approx\lambda_{оборуд}\cdot\eta\cdot[\chi-\chi_0]$$

При $[\chi-\chi_0]=0$ *мы имеем случай равновесного состояния системы, для которого справедливо тождество*

$$J(\chi_0,\chi_0)=0.$$

Производя сокращения на $[\chi-\chi_0]$, получаем приближенное равенство:

$$\tau^{-1}+\eta\cdot\xi^{-1}+\Delta\eta^{-1}\cdot f\approx\lambda_{оборуд}\cdot\eta.$$

Разделив левую $\tau^{-1}+\eta\cdot\xi^{-1}+\Delta\eta^{-1}\cdot f$ и правую часть $\lambda_{оборуд}\cdot\eta$ приближенного уравнения для функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\chi(t,S,\mu)$ на $\eta\cdot\xi^{-1}$, получим соотношение между макроизмеряемыми величинами τ, η, ξ:

$$\frac{\xi}{\tau\cdot\eta}+1+\frac{\xi}{\Delta\eta\cdot\eta}\cdot f\approx\frac{\xi}{\left[\dfrac{1}{\lambda_{оборуд}}\right]}.$$

В приближенном равенстве присутствуют два основных безразмерных параметра

$$Pm=\frac{\xi}{\tau\cdot\eta}\qquad\text{и}\qquad\frac{1}{Kv}=\frac{\xi}{\left[\dfrac{1}{\lambda_{оборуд}}\right]}.$$

Второе слагаемое $\dfrac{\xi}{\Delta\eta\cdot\eta}\cdot f$ *в приближенном равенстве можно представить в виде*

$$\frac{\xi}{\Delta\eta\cdot\eta}\cdot f\approx\frac{\xi}{\Delta\eta\cdot\eta}\cdot\frac{d\mu}{dt}\approx\frac{\xi}{\Delta\eta\cdot\eta}\cdot\frac{\Delta\eta}{\tau}\approx\frac{\xi}{\eta}\cdot\frac{1}{\tau}=Pm.$$

Ясно, что $Kv = \dfrac{\xi}{\left[\dfrac{1}{\lambda_{оборуд}}\right]}$ изменяется в пределах от нуля до бесконечности. В связи с этим для параметра $\dfrac{1}{Kv} = \dfrac{\xi}{\left[\dfrac{1}{\lambda_{оборуд}}\right]}$ естественно рассмотреть два предельных случая:

$$Kv \to 0 \text{ и } Kv \to \infty.$$

Эти два случая описывают ситуации, относящиеся к предельно малым и предельно большим изменениям затрат базового продукта между двумя основными операциями. Исследуем ниже каждый из предельных случаев.

2.3.2. Решения системы уравнений математической модели управления производством продукции для однопродуктового предприятия для малых чисел Kv. Предельный случай $Kv << 1$, $Pm \approx 1$

Рассмотрим класс производственных систем, для которых качественная оценка состояния дает значения коэффициентов $Kv << 1$, $Pm \approx 1$. Данный случай соответствует плотному потоку базовых продуктов вдоль технологической цепочки неравновестного производственного процесса с высокой концентрацией технологического оборудования. Тогда отношение любого слагаемого левой части в уравнении относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\chi(t,S,\mu)$ в фазовом пространстве (S,μ):

$$\frac{\partial\chi}{\partial t}+\frac{\partial\chi}{\partial S}\cdot\mu+\frac{\partial\chi}{\partial\mu}\cdot f=$$

$$=\lambda_{оборуд}\cdot\int_0^{\infty}[\psi[\tilde{\mu}\to\mu]\cdot\tilde{\mu}\cdot\chi(t,S,\tilde{\mu})-\psi[\mu\to\tilde{\mu}]\cdot\mu\cdot\chi(t,S,\mu)]\cdot d\tilde{\mu},$$

к его правой части по порядку величины совпадает с числом $Kv << 1$:

$$\frac{\left[\frac{\partial\chi}{\partial t}\right]}{\lambda\left[_{оборуд}\int_0^{\infty}[\psi[\tilde{\mu}\to\mu]\cdot\tilde{\mu}\cdot\chi(t,S,\tilde{\mu})-\psi[\mu\to\tilde{\mu}]\cdot\mu\cdot\chi(t,S,\mu)]\cdot d\tilde{\mu}\right]}\approx$$

$$\approx\frac{\tau^{-1}}{\lambda_{оборуд}\cdot\eta}\approx Pm\cdot Kv\approx Kv;$$

$$\frac{\left[\frac{\partial\chi}{\partial S}\cdot\mu\right]}{\lambda\left[_{оборуд}\cdot\int_0^{\infty}[\psi[\tilde{\mu}\to\mu]\cdot\tilde{\mu}\cdot\chi(t,S,\tilde{\mu})-\psi[\mu\to\tilde{\mu}]\cdot\mu\cdot\chi(t,S,\mu)]\cdot d\tilde{\mu}\right]}\approx$$

$$\approx\frac{\eta\cdot\xi^{-1}}{\lambda_{оборуд}\cdot\eta}\approx Kv;$$

$$\frac{\left[\frac{\partial\chi}{\partial\mu}\cdot f\right]}{\lambda\left[_{оборуд}\cdot\int_0^{\infty}[\psi[\tilde{\mu}\to\mu]\cdot\tilde{\mu}\cdot\chi(t,S,\tilde{\mu})-\psi[\mu\to\tilde{\mu}]\cdot\mu\cdot\chi(t,S,\mu)]\cdot d\tilde{\mu}\right]}\approx$$

$$\approx\frac{\Delta\eta^{-1}\cdot f}{\lambda_{оборуд}\cdot\eta}\approx Kv$$

и метод решения можно формализовать, вводя искусственный параметр $\varepsilon \approx Kv \to 0$ (предположительно малый) в качестве множителя перед левой частью уравнения. Введем безразмерные переменные $\hat{t}$, $\hat{S}$, $\hat{\mu}$, связанные с переменными τ, η, ξ (характерные время, скорость изменения затрат и шаг по переменной S) следующим образом:

$$t=\tau\cdot\hat{t};\quad S=\xi\cdot\hat{S};\quad \mu=\xi\cdot\hat{\mu};\quad J(\chi,\chi)=\lambda_{оборуд}\cdot\eta\cdot\hat{J}(\chi,\chi).$$

Тогда уравнение

$$\left[\frac{\partial\chi}{\partial t}+\frac{\partial\chi}{\partial S}\cdot\mu+\frac{\partial\chi}{\partial\mu}\cdot f\right]=J(\chi,\chi)$$

принимает вид

$$\left[\frac{\partial\chi}{\tau\cdot\partial\hat{t}}+\frac{\partial\chi}{\xi\cdot\partial\hat{S}}\cdot\eta\cdot\hat{\mu}+\frac{\partial\chi}{\eta\cdot\partial\hat{\mu}}\cdot\frac{\eta\cdot d\hat{\mu}}{\tau\cdot\partial\hat{t}}\right]=\lambda_{оборуд}\cdot\eta\cdot\hat{J}(\chi,\chi)$$

Разделим слагаемые выше написанного приближенного равенства на

$$\eta\cdot\xi^{-1}:$$

$$\frac{\eta}{\xi\cdot\lambda_{оборуд}}\cdot\left[\frac{\xi\cdot\partial\chi}{\eta\cdot\tau\cdot\partial\hat{t}}+\frac{\partial\chi}{\partial\hat{S}}\cdot\hat{\mu}+\frac{\xi\cdot\partial\chi}{\eta\cdot\tau\cdot\partial\hat{\mu}}\cdot\frac{d\hat{\mu}}{\cdot\partial\hat{t}}\right]=\eta\cdot\hat{J}(\chi,\chi)$$

и после сокращения на η получаем

$$\frac{1}{\xi\cdot\lambda_{оборуд}}\cdot\left[\frac{\xi\cdot\partial\chi}{\eta\cdot\tau\cdot\partial\hat{t}}+\frac{\partial\chi}{\partial\hat{S}}\cdot\hat{\mu}+\frac{\xi\cdot\partial\chi}{\eta\cdot\tau\cdot\partial\hat{\mu}}\cdot\frac{d\hat{\mu}}{\partial\hat{t}}\right]=\hat{J}(\chi,\chi).$$

С использованием параметров

$$Pm=\frac{\xi}{\tau\cdot\eta}\quad\text{и}\quad\frac{1}{Kv}=\frac{\xi}{\left[\dfrac{1}{\lambda_{оборуд}}\right]}$$

уравнение относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат примет вид

$$Kv\cdot\left[Pm\cdot\frac{\partial\chi}{\partial\widehat{t}}+\frac{\partial\chi}{\partial\widehat{S}}\cdot\widehat{\mu}+Pm\cdot\frac{\partial\chi}{\partial\widehat{\mu}}\cdot\frac{d\widehat{\mu}}{\partial\widehat{t}}\right]=\widehat{J}(\chi,\chi),$$

где $\varepsilon=Kv\rightarrow 0$ малый параметр, а $Pm=\dfrac{\xi}{\tau\cdot\eta}\rightarrow 1.$

Вводя обозначения $\varepsilon=Kv\rightarrow 0$ *и используя тождество*

$$Pm=\frac{\xi}{\tau\cdot\eta}\equiv 1$$

окончательно имеем уравнение в виде

$$\varepsilon\cdot\left[\frac{\partial\chi}{\partial\widehat{t}}+\frac{\partial\chi}{\partial\widehat{S}}\cdot\widehat{\mu}+\frac{\partial\chi}{\partial\widehat{\mu}}\cdot\frac{d\widehat{\mu}}{\partial\widehat{t}}\right]=\widehat{J}(\chi,\chi);$$

Полагая

$$J(\chi,\chi)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k}\sum_{m=0}^{k}J(\chi_m,\chi_{k-m})\approx$$

$$\approx\lambda_{оборуд}\cdot\int_0^{\infty}[\psi[\widetilde{\mu}\rightarrow\mu]\cdot\widetilde{\mu}\cdot\chi(t,S,\widetilde{\mu})-\psi[\mu\rightarrow\widetilde{\mu}]\cdot\mu\cdot\chi(t,S,\mu)]\cdot d\widetilde{\mu};$$

ищем решение в виде разложения в асимптотический ряд по малому параметру ε:

$$\chi(t,S,\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k}\chi_k(t,S,\mu)\,,\qquad \lim_{\varepsilon\rightarrow 0}\frac{\varepsilon\cdot\chi_{k+1}(t,S,\mu)}{\chi_k(t,S,\mu)}\rightarrow 0,$$

где $\varepsilon=Kv\rightarrow 0.$

Используя это представление в уравнении относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\chi(t,S,\mu)$, будем иметь:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k} \cdot \left[\frac{\partial \chi(k-1)}{\partial t} + \frac{\partial \chi(k-1)}{\partial S} \cdot \mu + \frac{\partial \chi(k-1)}{\partial \mu} \cdot f \right] \approx$$

$$J(\chi,\chi) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k} \sum_{m=0}^{k} J(\chi_m,\chi_{k-m}) \approx$$

$$\approx \lambda_{оборуд} \cdot \int_{0}^{\infty} [\psi[\tilde{\mu} \to \mu] \cdot \tilde{\mu} \cdot \chi(t,S,\tilde{\mu}) - \psi[\mu \to \tilde{\mu}] \cdot \mu \cdot \chi(t,S,\mu)] \cdot d\tilde{\mu};$$

и можно записать

$$\varepsilon \cdot \left[\frac{\partial \chi}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial \chi}{\partial \hat{S}} \cdot \hat{\mu} + \frac{\partial \chi}{\partial \hat{\mu}} \cdot \frac{d\hat{\mu}}{\partial \hat{t}} \right] = \hat{J}(\chi,\chi).$$

Подставляя это представление в уравнение относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\chi(t,S,\mu)$, будем иметь:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k} \cdot \left[\frac{\partial \chi(k-1)}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial \chi(k-1)}{\partial \hat{S}} \cdot \mu + \frac{\partial \chi(k-1)}{\partial \hat{\mu}} \cdot \hat{f} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k} \cdot \hat{J}_k,$$

где

$$J(\chi,\chi) = \lambda_{оборуд} \cdot \eta \cdot \hat{J}(\chi,\chi);$$

$$J(\chi,\chi) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k} \sum_{m=0}^{k} J(\chi_m,\chi_{k-m}) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k} \cdot J_k;$$

$$J_k = \sum_{m=0}^{k} J(\chi_m,\chi_{k-m}).$$

Откуда получаем уравнения для конкретного приближения

$$0 = \hat{J}_0;$$

$$\frac{\partial \chi_0}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial \chi_0}{\partial \hat{S}} \cdot \mu + \frac{\partial \chi_0}{\partial \hat{\mu}} \cdot \hat{f} = \hat{J}_1;$$

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial \chi_1}{\partial \hat{S}} \cdot \mu + \frac{\partial \chi_1}{\partial \hat{\mu}} \cdot \hat{f} = \hat{J}_2.$$

Из уравнения $0 = \hat{J}_0$ находится нулевое приближение χ_0, которое затем используется для нахождения из уравнения $\frac{\partial \chi_0}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial \chi_0}{\partial \hat{S}} \cdot \mu + \frac{\partial \chi_0}{\partial \hat{\mu}} \cdot \hat{f} = \hat{J}_1$ первого приближения χ_1, и так далее.

Обычно несколько приближений более чем достаточно для получения решения уравнения относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\chi(t,S,\mu)$ с требуемой точностью для описания производственного процесса. Основной результат данного подхода состоит в том, что если допустить возможность разложения функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\chi(t,S,\mu)$ в ряд по степеням $\varepsilon \approx K\nu \to 0$, то можно построить макроскопическое описание производственного процесса в терминах моментов функции распределения в том или ином приближении.

Рассмотрим теперь условия, при которых правомерно разложение по малому параметру $\varepsilon \approx K\nu \to 0$. При выборе характерных величин τ, η, ξ (характерные время, скорость изменения затрат и шаг по переменной S), мы полагали:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} \approx \tau^{-1} \cdot [\chi - \chi_0]; \qquad \frac{\partial \chi}{\partial \mu} \cdot f = \Delta \eta^{-1} \cdot f \cdot [\chi - \chi_0];$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial S} \cdot \mu \approx \eta \cdot \xi^{-1} \cdot [\chi - \chi_0]; \qquad J \approx \lambda_{оборуд} \cdot \eta \cdot [\chi - \chi_0].$$

Однако, могут существовать такие пространственно-временные области решения уравнения относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\chi(t,S,\mu)$, где профили моментов функции распределения становятся очень крутыми при $\varepsilon \approx Kv \to 0$. В этих областях решения уравнения относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат теряют точность. К таким областям относятся окрестности границ, начальный промежуток времени (начальный производственный поток). В упомянутых выше областях функция $\chi(t,S,\mu)$ заметно меняется на расстояниях порядка $\dfrac{1}{\lambda_{оборуд}}$, так что

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} \approx \tau^{-1} \cdot \frac{[\chi - \chi_0]}{\varepsilon}; \qquad \frac{\partial \chi}{\partial S} \cdot \mu \approx \eta \cdot \xi^{-1} \cdot \frac{[\chi - \chi_0]}{\varepsilon};$$

вместо предполагаемого

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} \approx \tau^{-1} \cdot [\chi - \chi_0]; \qquad \frac{\partial \chi}{\partial S} \cdot \mu \approx \eta \cdot \xi^{-1} \cdot [\chi - \chi_0]$$

Таким образом, если упомянутые области исключить, то

$$\chi(t,S,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \chi_k(t,S,\mu)$$

аппроксимируют для достаточно малых $\varepsilon \approx Kv \to 0$ решения фактически любых задач для уравнения относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\chi(t,S,\mu)$ в описанной выше постановке.

2.3.3. Решения системы уравнений математической модели управления производством продукции для однопродуктового предприятия для больших чисел Kv. Предельный случай $Kv >> 1$, $Pm \approx 1$

Случай $Kv = \dfrac{1}{\lambda_{оборуд} \cdot \xi} >> 1$, $Pm \approx 1$ соответствует производственному процессу, у которого, как правило, малая плотность обрабатывающего оборудования $\lambda_{оборуд} \to 0$ вдоль цепочки технологического процесса изготовления базового продукта. Тем самым, базовый продукт проходит большой путь между основными операциями, находясь в свободном, не обрабатывающемся состоянии. В этом случае уравнение относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\chi(t,S,\mu)$:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial \chi}{\partial S} \cdot \mu + \frac{\partial \chi}{\partial \mu} \cdot f =$$

$$\lambda_{оборуд} \cdot \int_0^{\infty} [\psi[\tilde{\mu} \to \mu] \cdot \tilde{\mu} \cdot \chi(t,S,\tilde{\mu}) - \psi[\mu \to \tilde{\mu}] \cdot \mu \cdot \chi(t,S,\mu)] \cdot d\tilde{\mu}$$

с учетом безразмерных переменных $\hat{t}$, $\hat{S}$, $\hat{\mu}$, связанных с переменными τ, η, ξ (характерные время, скорость изменения затрат и шаг по переменной S)

$$t = \tau \cdot \hat{t}, \quad S = \xi \cdot \hat{S}, \quad \mu = \xi \cdot \hat{\mu}, \quad J(\chi,\chi) = \lambda_{оборуд} \cdot \eta \cdot \hat{J}(\chi,\chi)$$

получаем в виде

$$\left[\frac{\partial \chi}{\tau \cdot \partial \hat{t}} + \frac{\partial \chi}{\xi \cdot \partial \hat{S}} \cdot \eta \cdot \hat{\mu} + \frac{\partial \chi}{\eta \cdot \partial \hat{\mu}} \cdot \frac{\eta \cdot d\hat{\mu}}{\tau \cdot \partial \hat{t}}\right] = \lambda_{оборуд} \cdot \eta \cdot \hat{J}(\chi,\chi).$$

С использованием параметров

$$Pm=\frac{\xi}{\tau\cdot\eta} \quad \text{и} \quad \frac{1}{Kv}=\frac{\xi}{\left[\dfrac{1}{\lambda_{оборуд}}\right]}$$

уравнение примет вид

$$Kv\cdot\left[Pm\cdot\frac{\partial\chi}{\partial\widehat{t}}+\frac{\partial\chi}{\partial\widehat{S}}\cdot\widehat{\mu}+Pm\cdot\frac{\partial\chi}{\partial\widehat{\mu}}\cdot\frac{d\widehat{\mu}}{\partial\widehat{t}}\right]=\widehat{J}(\chi,\chi),$$

где $\varepsilon=\frac{1}{Kv}\to 0$ малый параметр;

$$Pm=\frac{\xi}{\tau\cdot\eta}\to 1$$

или окончательно

$$\left[Pm\cdot\frac{\partial\chi}{\partial\widehat{t}}+\frac{\partial\chi}{\partial\widehat{S}}\cdot\widehat{\mu}+Pm\cdot\frac{\partial\chi}{\partial\widehat{\mu}}\cdot\frac{d\widehat{\mu}}{\partial\widehat{t}}\right]=\varepsilon\cdot\widehat{J}(\chi,\chi);$$

$$\left[\frac{\partial\chi}{\partial\widehat{t}}+\frac{\partial\chi}{\partial\widehat{S}}\cdot\widehat{\mu}+\frac{\partial\chi}{\partial\widehat{\mu}}\cdot\frac{d\widehat{\mu}}{\partial\widehat{t}}\right]=\varepsilon\cdot\widehat{J}(\chi,\chi).$$

Представляется естественным разложить функцию $\chi(t,S,\mu)$ в асимптотический ряд по степеням малого параметра $\varepsilon=\frac{1}{Kv}\to 0$

$$\chi(t,S,\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k}\chi_{k}(t,S,\mu), \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon\cdot\chi_{k+1}(t,S,\mu)}{\chi_{k}(t,S,\mu)}\to 0.$$

Тогда в соответствии с ранее записанными выражениями

$$J(\chi,\chi)=\lambda_{оборуд}\cdot\int_{0}^{\infty}\left[\psi\left[\widetilde{\mu}\to\mu\right]\cdot\widetilde{\mu}\cdot\chi(t,S,\widetilde{\mu})-\psi\left[\mu\to\widetilde{\mu}\right]\cdot\mu\cdot\chi(t,S,\mu)\right]\cdot d\widetilde{\mu};$$

$$J(\chi,\chi)=\lambda_{оборуд}\cdot\eta\cdot\widehat{J}(\chi,\chi);$$

$$J(\chi,\chi)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\sum_{m=0}^{k}J(\chi_m,\chi_{k-m})=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\cdot J_k;$$

$$J_k=\sum_{m=0}^{k}J(\chi_m,\chi_{k-m}).$$

получим уравнение относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\chi(t,S,\mu)$:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\cdot\left[\frac{\partial\chi_к}{\partial\hat{t}}+\frac{\partial\chi_к}{\partial\hat{S}}\cdot\hat{\mu}+\frac{\partial\chi_к}{\partial\hat{\mu}}\cdot\hat{f}\right]=\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\cdot\hat{J}_{k-1}.$$

Откуда для последовательных приближений имеем:

$$\frac{\partial\chi_0}{\partial\hat{t}}+\frac{\partial\chi_0}{\partial\hat{S}}\cdot\hat{\mu}+\frac{\partial\chi_0}{\partial\hat{\mu}}\cdot\hat{f}=0;$$

$$\frac{\partial\chi_1}{\partial\hat{t}}+\frac{\partial\chi_1}{\partial\hat{S}}\cdot\hat{\mu}+\frac{\partial\chi_1}{\partial\hat{\mu}}\cdot\hat{f}=\hat{J}_0;$$

$$\frac{\partial\chi_2}{\partial\hat{t}}+\frac{\partial\chi_2}{\partial\hat{S}}\cdot\hat{\mu}+\frac{\partial\chi_2}{\partial\hat{\mu}}\cdot\hat{f}=\hat{J}_1.$$

...

Первое из этих уравнений

$$\frac{\partial\chi_0}{\partial\hat{t}}+\frac{\partial\chi_0}{\partial\hat{S}}\cdot\hat{\mu}+\frac{\partial\chi_0}{\partial\hat{\mu}}\cdot\hat{f}=0,$$

как и следовало ожидать, является уравнением свободного перемещения базового продукта вдоль технологической цепочки. Под свободным перемещением будем понимать такое движение базового продукта вдоль технологической цепочки производственного процесса, при котором перенос затрат на базовый продукт происходит наперед заданным способом, определяемым инженерно-производственной кцией технологического процесса $f(t,S)$ без наличия отклонения рости изменения затрат от своего среднего значения. Такой перенос актеризуется функцией $\psi[\mu \to \tilde{\mu}] = \psi[\tilde{\mu} \to \mu]$, т.е. после нологической обработки скорость изменения затрат, отнесенных на ювый продукт может принимать только значение, определенное спортом оборудования без каких-то отклонений от паспортной личины.

В частном случае $\hat{f} = 0$ решение уравнения свободного еремещения базового продукта вдоль технологической цепочки

$$\frac{\partial\chi_0}{\partial\hat{t}} + \frac{\partial\chi_0}{\partial\hat{S}} \cdot \hat{\mu} + \frac{\partial\chi_0}{\partial\hat{\mu}} \cdot \hat{f} = 0$$

южет быть найдено в виде

$\chi_0(\hat{t},\hat{S}) = T(\zeta) = T(\hat{S} - \hat{t}\cdot\hat{\mu})$, где $\zeta = (\hat{S} - \hat{t}\cdot\hat{\mu})$, $\hat{\mu} = const$.

Случай $\hat{f} = 0$ соответствует производственному процессу, у которого на каждой технологической операции переносятся на базовый продукт примерно одинаковые затраты, т.е. $\hat{\mu} = const$. Такими процессами можно описывать, например, транспортировку газа или нефти, электроэнергии и т. д.

Подставляя записанное в таком виде решение в уравнение, получаем тождественное равенство

$$\frac{\partial\chi}{\partial\zeta} \cdot \frac{\partial\zeta}{\partial\hat{t}} + \hat{\mu} \cdot \frac{\partial\chi}{\partial\zeta} \cdot \frac{\partial\zeta}{\partial\hat{S}} = \frac{\partial\chi}{\partial\zeta} \cdot (-\hat{\mu}) + \hat{\mu} \cdot \frac{\partial\chi}{\partial\zeta} \equiv 0 .$$

Вид функции $T(\zeta) = T(\hat{S} - \hat{t}\cdot\hat{\mu})$ определим из начального условия

$\chi|_{\hat{t}=0} = \chi(0,\hat{S},\hat{\mu})$: $\quad T(\zeta)|_{\hat{t}=0} = T(\hat{S} - \hat{t}\cdot\hat{\mu})|_{\hat{t}=0}$

и граничного условия

$$\chi\big|_{\hat{S}=\hat{S}^*}=\chi(\hat{t},0,\hat{\mu}):\qquad T(\zeta)\big|_{\hat{S}=\hat{S}^*}=T(\hat{S}-\hat{t}\cdot\hat{\mu})_{\hat{S}=\hat{S}^*}.$$

В следующих приближениях

$$\frac{\partial\chi_1}{\partial\hat{t}}+\frac{\partial\chi_1}{\partial\hat{S}}\cdot\hat{\mu}+\frac{\partial\chi_1}{\partial\hat{\mu}}\cdot\hat{f}=\hat{J}_0;$$

$$\frac{\partial\chi_2}{\partial\hat{t}}+\frac{\partial\chi_2}{\partial\hat{S}}\cdot\hat{\mu}+\frac{\partial\chi_2}{\partial\hat{\mu}}\cdot\hat{f}=\hat{J}_1$$

$$\ldots$$

присутствуют члены типа источника, которые определяются предыдущими приближениями. Таким образом, решение уравнения относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат сводится к решению последовательности дифференциальных уравнений. В качестве начального приближения выбирается функция распределения, соответствующая решению уравнения свободного перемещения базового продукта вдоль технологической цепочки

$$\frac{\partial\chi_0}{\partial\hat{t}}+\frac{\partial\chi_0}{\partial\hat{S}}\cdot\hat{\mu}+\frac{\partial\chi_0}{\partial\hat{\mu}}\cdot\hat{f}=0.$$

2.3.4. Линеаризованное решение уравнения относительно функции распределения базовых продуктов для однопродуктового предприятия. Предельный случай $Kv\approx 1$, $Pm\approx 1$

Предельный случай $Kv\approx 1$, $Pm\approx 1$ соответствует производственному процессу, у которого слагаемые уравнения относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\frac{\partial\chi}{\partial t}$, $\frac{\partial\chi}{\partial S}\cdot\mu$, $\frac{\partial\chi}{\partial\mu}\cdot f$,

$$\lambda_{оборуд} \cdot \int\limits_0^\infty [\psi[\widetilde{\mu} \to \mu] \cdot \widetilde{\mu} \cdot \chi(t,S,\widetilde{\mu}) - \psi[\mu \to \widetilde{\mu}] \cdot \mu \cdot \chi(t,S,\mu)] \cdot d\widetilde{\mu}$$

приблизительно равны по порядку величины.

Ищем решение уравнения относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\chi(t,S,\mu)$:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial \chi}{\partial S} \cdot \mu + \frac{\partial \chi}{\partial \mu} \cdot f =$$

$$= \lambda_{оборуд} \cdot \int\limits_0^\infty [\psi[\widetilde{\mu} \to \mu] \cdot \widetilde{\mu} \cdot \chi(t,S,\widetilde{\mu}) - \psi[\mu \to \widetilde{\mu}] \cdot \mu \cdot \chi(t,S,\mu)] \cdot d\widetilde{\mu}$$

в виде разложения функции $\chi(t,S,\mu)$ в асимптотический ряд по степеням малого параметра $\varepsilon \to 0$

$$\chi(t,S,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \chi_k(t,S,\mu); \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon \cdot \chi_{k+1}(t,S,\mu)}{\chi_k(t,S,\mu)} \to 0.$$

Результат подстановки такого разложения в уравнения относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат не зависит от смысла параметра $\varepsilon \to 0$. Если параметр $\varepsilon \to 0$ не входит явно в уравнения относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат, то приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon \to 0$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \cdot \left[\frac{\partial \chi_к}{\partial t} + \frac{\partial \chi_к}{\partial S} \cdot \mu + \frac{\partial \chi_к}{\partial \mu} \cdot f \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \cdot J_k$$

получаем

$$\left[\frac{\partial\chi_к}{\partial t}+\frac{\partial\chi_к}{\partial S}\cdot\mu+\frac{\partial\chi_к}{\partial\mu}\cdot f\right]=J_k,$$

где

$$J(\chi,\chi)=\lambda_{оборуд}\cdot\int\limits_0^{\infty}\left[\psi[\tilde{\mu}\to\mu]\cdot\tilde{\mu}\cdot\chi(t,S,\tilde{\mu})-\psi[\mu\to\tilde{\mu}]\cdot\mu\cdot\chi(t,S,\mu)\right]\cdot d\tilde{\mu};$$

$$J(\chi,\chi)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\sum_{m=0}^{k}J(\chi_m,\chi_{k-m})=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\cdot J_k.$$

Функция $\chi_0(t,S,\mu)$ должна удовлетворять уравнению

$$\left[\frac{\partial\chi_0}{\partial t}+\frac{\partial\chi_0}{\partial S}\cdot\mu+\frac{\partial\chi_0}{\partial\mu}\cdot f\right]=J_0.$$

Так как из свойств генераторной функции $J_0\equiv 0$, то в качестве нулевого приближения следует брать равновесную функцию $\chi_{оборуд}(t,S,\mu)$. В противном случае начальный шаг метода возмущений будет столь же трудным, что и решение исходного уравнения. Фактически это означает, что изучается широкий класс производственных процессов, характеризующийся отклонением от состояния полного равновесия.

Положим $\chi_k(t,S,\mu)=\chi_{оборуд}(t,S,\mu)\cdot\delta_k$ при $n\geq 1$ и запишем уравнение

$$\frac{\partial\chi_к}{\partial t}+\frac{\partial\chi_к}{\partial S}\cdot\mu+\frac{\partial\chi_к}{\partial\mu}\cdot f=J_k;$$

$$J_k=2\cdot J(\chi_0,\chi_k)+\sum_{m=1}^{k-1}J(\chi_m,\chi_{k-m});$$

в виде

$$\frac{\partial \delta_к}{\partial t} + \frac{\partial \delta_к}{\partial S} \cdot \mu + \frac{\partial \delta_к}{\partial \mu} \cdot f = L\delta_k + \alpha_k ,$$

где оператор

$$\mathrm{L}\delta_{\mathrm{k}} = \frac{2 \cdot \mathrm{J}(\chi_0, \chi_{\mathrm{k}})}{\chi_0} = \frac{2 \cdot \mathrm{J}(\chi_0, \chi_0 \cdot \delta_{\mathrm{k}})}{\chi_0};$$

$$\alpha_k = \frac{\sum\limits_{m=1}^{k-1} J(\chi_m, \chi_{k-m})}{\chi_0} = \frac{\sum\limits_{m=1}^{k-1} J(\chi_0 \cdot \delta_k, \chi_0 \cdot \delta_{k-m})}{\chi_0};$$

$$\alpha_1 = 0.$$

Указанные выше формулы задают алгоритм последовательных приближений решения уравнения относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\chi(t,S,\mu)$:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial \chi}{\partial S} \cdot \mu + \frac{\partial \chi}{\partial \mu} \cdot f =$$

$$= \lambda_{оборуд} \cdot \int\limits_0^{\infty} [\psi[\tilde{\mu} \to \mu] \cdot \tilde{\mu} \cdot \chi(t,S,\tilde{\mu}) - \psi[\mu \to \tilde{\mu}] \cdot \mu \cdot \chi(t,S,\mu)] \cdot d\tilde{\mu}.$$

Следует подчеркнуть, что на каждом шаге решается одно и то же уравнение

$$\frac{\partial \delta_к}{\partial t} + \frac{\partial \delta_к}{\partial S} \cdot \mu + \frac{\partial \delta_к}{\partial \mu} \cdot f = L\delta_k + \alpha_k ,$$

только с новым свободным членом, который вычисляется по предыдущим приближениям. Эти уравнения содержат сложный интегро-дифференциальный оператор $L\delta_k + \alpha_k$ и по виду почти столь же сложны, что и исходное уравнение, за тем исключением, что мы однозначно избавились от нелинейности. Общая структура уравнений во всех приближениях при $n \geq 1$ позволяет ограничиться только случаем $n=1$ и рассмотреть так называемое линеаризованное уравнение

$$\frac{\partial \delta}{\partial t}+\frac{\partial \delta}{\partial S}\cdot \mu+\frac{\partial \delta}{\partial \mu}\cdot f = L\delta .$$

Наличие в уравнениях при $n>1$ свободного члена α_k незначительно усложняет их решение, так как хорошо известно, как это можно сделать с помощью соответствующего линейного однородного уравнения. Для практических приложений описания производственного процесса с достаточной степенью точности можно ограничиваться только случаем $n=1$.

ВЫВОД: Изучение линеаризованного уравнения относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\chi(t,S,\mu)$ дает возможность достоверного описания реального производственного процесса. Линеаризованное уравнение по форме совпадает с общим уравнением относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\chi(t,S,\mu)$. Это позволяет надеяться, что изучая линеаризованное уравнение, можно сделать вывод о свойствах решения общего уравнения для случаев, когда имеются в виду процессы, для которых нелинейный характер в правой части уравнения относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат несущественный.

Уточним теперь условия, при которых можно использовать линеаризованное уравнение относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат для получения интересных с точки зрения исследования производственных процессов результатов. Поскольку параметр $\varepsilon \to 0$ по предположению не входит в само уравнение, то условия использования линеаризованного уравнения должны быть определены начальными условиями при $t=0$ и граничными условиями. Действительно, так как мы ищем решение в виде

$$\chi(t,S,\mu)=\chi_{оборуд}(t,S,\mu)\cdot(1+\delta),$$

требуя, чтобы функция δ в том или ином смысле была мала по сравнению с единицей, необходимо, чтобы δ была мала и на границе, и в начальный момент времени. Следовательно, первое условие заключается в малости отклонения начальных данных от равновесной функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\chi_{оборуд}(t,S,\mu)$; это не обязательно означает, что при $t=0$ функция δ принимает близкие к нулю значения, достаточно в частности потребовать малости относительного отклонения для моментов функции распределения относительно их начальных значений:

$$\frac{\left\|[\chi]_0-[\chi]_{0_{нач}}\right\|}{[\chi]_0}\to 0\,,\quad \frac{\left\|[\chi]_1-[\chi]_{1_{нач}}\right\|}{[\chi]_1}\to 0,\quad \frac{\left\|[\chi]_2-[\chi]_{2_{нач}}\right\|}{[\chi]_2}\to 0,$$

где $[\chi]_{0_{нач}}$, $[\chi]_{1_{нач}}$, $[\chi]_{2_{нач}}$ - значения моментов функции распределения, заданные начальными условиями.

Аналогичная ситуация имеется и при рассмотрении краевых условий. Рассмотрим уравнение

$\frac{\partial \delta}{\partial S} \cdot \mu = L\delta$, *для стационарного случая* $\frac{\partial \delta}{\partial t} = 0$, *при условии* $f \approx 0$.

Отсюда

$$\delta = \mu \cdot \int L\delta \cdot dS + \delta_{гран}.$$

Из последнего следует, что функция δ принимает малые значения тогда, когда мал свободный член $\delta_{гран}$, определяемый граничними условиями. Пусть $\chi_{оборуд}(t,S,\mu)$ - равновесная функция распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат с моментами функции распределения $[\chi]_0$, $[\chi]_1$, $[\chi]_2$ равными значениям моментов функции распределения для границы $[\chi]_{0_{гран}}$, $[\chi]_{1_{гран}}$, $[\chi]_{2_{гран}}$. Из уравнения

$$\frac{\partial \chi}{\partial S} \cdot \mu = \lambda_{оборуд} \cdot \{\psi[\tilde{\mu} \to \mu] \cdot [\chi]_1 - \mu \cdot \chi\};$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial S} \cdot \mu = L\delta,$$

для стационарного случая $\frac{\partial \delta}{\partial t} = 0$, *при условии* $f \approx 0$, *следует, что на границе*

$$\int \lambda_{оборуд} \cdot \{\psi[\tilde{\mu} \to \mu] \cdot [\chi]_1 - \mu \cdot \chi_{оборуд} \cdot (1+\delta)\} \cdot dS \to 0,$$

то есть на относительные возмущения моментов функции распределения $[\chi]_0$, $[\chi]_1$, $[\chi]_2$, последнее накладывает взамен условия малости $\delta_{гран} \to 0$ условия

$$\frac{\left\|[\chi]_0 - [\chi]_{0_{гран}}\right\|}{[\chi]_0} \to 0, \quad \frac{\left\|[\chi]_1 - [\chi]_{1_{гран}}\right\|}{[\chi]_1} \to 0, \quad \frac{\left\|[\chi]_2 - [\chi]_{2_{гран}}\right\|}{[\chi]_2} \to 0.$$

Этими рассмотрениями показано, что линеаризация оправдана, если нелинейные неоднородные члены в начальных и краевых условиях малы. Поэтому, при рассмотрении задачи в линеаризованной постановке следует установить:

- Малость неоднородных начальных и граничных условий.
- Разность между линеаризованным уравнением и неоднородным уравнением имеет более высокий порядок малости по параметру отклонения от положения равновесия, чем само решение.

2.3.5. «Начальное движение» в уравнении относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат для однопродуктового предприятия. Предельный случай $Kv \approx 1$, $Pm >> 1$

Предельный случай $Kv \approx 1$, $Pm >> 1$ соответствует переходному сильно нестационарному процессу в производственной деятельности предприятии, когда требуется осуществить, например, переход с одних производственных показателей на более высокие. В таком случае начальное состояние производственной системы является сильно неравновесным по отношению к конечному. Основной вклад в формирование функции распределения вносит слагаемое $\dfrac{\partial \chi}{\partial t}$, отвечающее за нестационарность производственного процесса. Осуществив переход в конечное состояние, производственный процесс превращается, как правило, в стационарный.

Если в начальный момент времени функция распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\chi(t,S,\mu)$ для уравнения

$$\frac{\partial\chi}{\partial t}+\frac{\partial\chi}{\partial S}\cdot\mu+\frac{\partial\chi}{\partial\mu}\cdot f=$$

$$=\lambda_{оборуд}\cdot\int_0^\infty[\psi[\tilde{\mu}\to\mu]\cdot\tilde{\mu}\cdot\chi(t,S,\tilde{\mu})-\psi[\mu\to\tilde{\mu}]\cdot\mu\cdot\chi(t,S,\mu)]\cdot d\tilde{\mu}$$

не является равновесной $\chi_{оборуд}(t,S,\mu)$ (близкой к равновесной $\chi(t,S,\mu)\to\chi_{оборуд}(t,S,\mu)$), то она будет быстро изменяться, пока таковой не станет.

С учетом безразмерных переменных $\hat{t}$, $\hat{S}$, $\hat{\mu}$, связанных с переменными τ, η, ξ (характерные время, скорость изменения затрат и шаг по переменной S)

$$t=\tau\cdot\hat{t},\quad S=\xi\cdot\hat{S},\quad \mu=\xi\cdot\hat{\mu},\quad J(\chi,\chi)=\lambda_{оборуд}\cdot\eta\cdot\hat{J}(\chi,\chi)$$

получаем

$$\left[\frac{\partial\chi}{\tau\cdot\partial\hat{t}}+\frac{\partial\chi}{\xi\cdot\partial\hat{S}}\cdot\eta\cdot\hat{\mu}+\frac{\partial\chi}{\eta\cdot\partial\hat{\mu}}\cdot f\right]=\lambda_{оборуд}\cdot\eta\cdot\hat{J}(\chi,\chi).$$

Из свойств генераторной функции

$$J(\chi,\chi)=\lambda_{оборуд}\cdot\int_0^\infty[\psi[\tilde{\mu}\to\mu]\cdot\tilde{\mu}\cdot\chi(t,S,\tilde{\mu})-\psi[\mu\to\tilde{\mu}]\cdot\mu\cdot\chi(t,S,\mu)]\cdot d\tilde{\mu};$$

для случая сильного отклонения начального распределения базовых продуктов $\chi(t,S,\mu)$ от равновесной функции $\chi_{оборуд}(t,S,\mu)$ можем записать

$$J(\chi,\chi)=\lambda_{оборуд}\cdot\{\psi[\tilde{\mu}\to\mu]\cdot[\chi]_1-\mu\cdot\chi\}\approx\lambda_{оборуд}\cdot\{-\mu\cdot\chi\}$$

для случая $\Delta\chi=\chi_{нач}-\chi_{оборуд}\approx\chi_{нач}$, $\chi_{нач}>>\chi_{оборуд}$ (рис.2.3),

$$J(\chi,\chi)=\lambda_{оборуд}\cdot\{\psi[\tilde{\mu}\to\mu]\cdot[\chi]_1-\mu\cdot\chi\}\approx\lambda_{оборуд}\cdot\{\psi[\tilde{\mu}\to\mu]\cdot[\chi]_1\}$$

для случая $\Delta\chi=\chi_{нач}-\chi_{оборуд}\approx\chi_{оборуд}$, $\chi_{нач}<<\chi_{оборуд}$ (рис.2.3).

Отсюда получаем

$$\left[\frac{\partial\chi}{\tau\cdot\partial\hat{t}}+\frac{\partial\chi}{\xi\cdot\partial\hat{S}}\cdot\eta\cdot\hat{\mu}+\frac{\partial\chi}{\eta\cdot\partial\hat{\mu}}\cdot f\right]\approx-\lambda_{оборуд}\cdot\eta\cdot\hat{\mu}\cdot\chi$$

для случая $\Delta\chi=\chi_{нач}-\chi_{оборуд}\approx\chi_{нач}$, $\chi_{нач}>>\chi_{оборуд}$

и

$$\left[\frac{\partial\chi}{\tau\cdot\partial\hat{t}}+\frac{\partial\chi}{\xi\cdot\partial\hat{S}}\cdot\eta\cdot\hat{\mu}+\frac{\partial\chi}{\eta\cdot\partial\hat{\mu}}\cdot f\right]\approx\lambda_{оборуд}\cdot[\chi]_1\approx\lambda_{оборуд}\cdot\eta\cdot\langle\hat{\mu}\rangle\cdot[\chi]_0$$

для случая $\Delta\chi=\chi_{нач}-\chi_{оборуд}\approx\chi_{оборуд}$, $\chi_{нач}<<\chi_{оборуд}$.

Среди переменных τ, η, ξ (характерные время, скорость изменения затрат и шаг по переменной S) значительно уменшилось характерное время процесса τ

$$t=\tau\cdot\hat{t},\quad S=\xi\cdot\hat{S},\quad \mu=\xi\cdot\hat{\mu},\quad J(\chi,\chi)=\lambda_{оборуд}\cdot\eta\cdot\hat{J}(\chi,\chi).$$

Применяя использованный ранее поход, можно записать

$$Pm=\frac{\xi}{\tau\cdot\eta},\ Pm>>1 \quad \text{и} \quad \frac{1}{Kv}=\frac{\xi}{\left[\dfrac{1}{\lambda_{оборуд}}\right]},\quad Kv\approx 1$$

и уравнение примет вид с точностью до знака

$$Kv\cdot\left[Pm\cdot\frac{\partial\chi}{\partial\hat{t}}+\frac{\partial\chi}{\partial\hat{S}}\cdot\hat{\mu}+\cdot\frac{\partial\chi}{\eta\cdot\partial\hat{\mu}}\cdot f\right]=\hat{J}(\chi,\chi)\Rightarrow$$

$$\left[Pm\cdot\frac{\partial\chi}{\partial\hat{t}}+\frac{\partial\chi}{\eta\cdot\partial\hat{\mu}}\cdot f\right]\approx\hat{J}(\chi,\chi)\Rightarrow$$

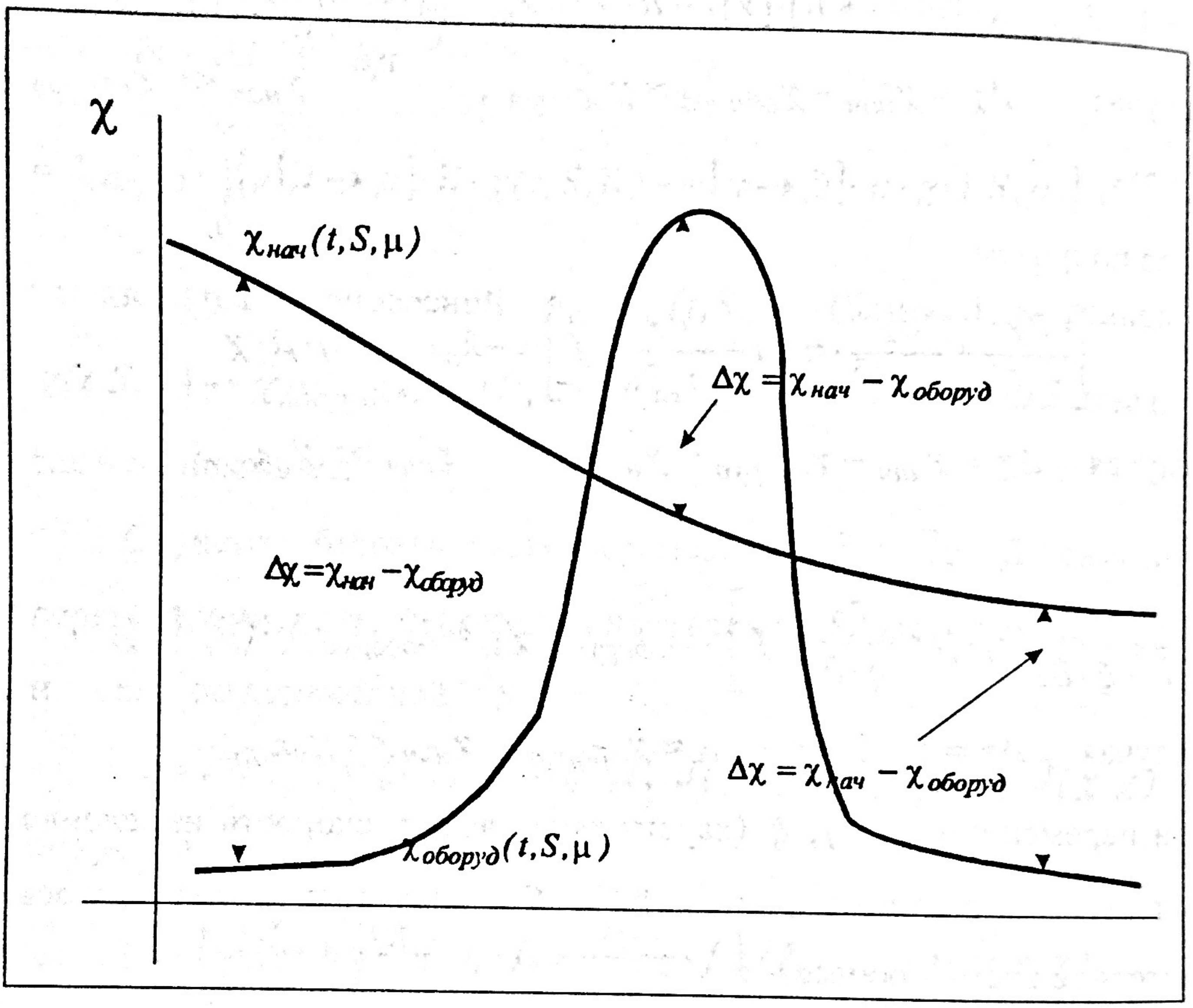

Рис.2.3. «Начальное движение» в уравнении для функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат

$$Pm\cdot\frac{\partial\chi}{\partial\hat{t}}\approx-\hat{\mu}\cdot\chi$$

для случая $\Delta\chi=\chi_{нач}-\chi_{оборуд}\approx\chi_{нач}$, $\chi_{нач}>>\chi_{оборуд}$

и

$$Pm\cdot\frac{\partial\chi}{\partial\hat{t}}\approx\langle\hat{\mu}\rangle\cdot[\chi]_0$$

для случая $\Delta\chi = \chi_{нач} - \chi_{оборуд} \approx \chi_{оборуд}$, $\chi_{нач} << \chi_{оборуд}$.

Решение уравнения для обох случав можно представить в виде

$$Pm \cdot \frac{\partial\chi}{\partial\hat{t}} \approx -\hat{\mu} \cdot \chi \qquad \Rightarrow \qquad \chi \approx \chi|_0 \cdot e^{-\frac{\hat{\mu}}{Pm} \cdot (\hat{t} - \hat{t}|_0)}$$

$$Pm \cdot \frac{\partial\chi}{\partial\hat{t}} \approx \langle\hat{\mu}\rangle \cdot [\chi]_0 \qquad \Rightarrow \qquad \chi \approx \chi|_0 + \frac{1}{Pm} \cdot \langle\hat{\mu}\rangle \cdot [\chi]_0 \cdot (\hat{t} - \hat{t}|_0)$$

В нашем случае

$$\frac{1}{Pm} \cdot \langle\hat{\mu}\rangle \cdot (\hat{t} - \hat{t}|_0) \approx \frac{1}{\left[\dfrac{\xi}{\tau \cdot \eta}\right]} \cdot \langle\hat{\mu}\rangle \cdot (\hat{t} - \hat{t}|_0) \approx$$

$$\approx \frac{1}{\left[\dfrac{\tau_{стац}}{\tau}\right]} \cdot \langle\hat{\mu}\rangle \cdot (\hat{t} - \hat{t}|_0) \approx \frac{1}{\tau_{стац}} \cdot \langle\hat{\mu}\rangle \cdot (\hat{t} - \hat{t}|_0) \cdot \tau \approx$$

$$\approx \frac{1}{\tau_{стац}} \cdot \langle\hat{\mu}\rangle \cdot (t - t|_0) \approx \langle\hat{\mu}\rangle \cdot \frac{(t - t|_0)}{\tau_{стац}}.$$

Видно, что при $t \to \infty$ мы имеем стремление множителя $\frac{1}{Pm} \cdot \langle\hat{\mu}\rangle \cdot (\hat{t} - \hat{t}|_0)$ к бесконечности

$$\langle\hat{\mu}\rangle \cdot \frac{(t - t|_0)}{\tau_{стац}} \to \infty.$$

Отсюда за промежуток времени $(t - t|_0)$ у нас происходит быстрое изменение функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат в сторону своего равновесного состояния для описанных случаев

$$Pm \cdot \frac{\partial \chi}{\partial \hat{t}} \approx -\hat{\mu} \cdot \chi \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\chi}{\chi|_0} \approx e^{-\langle \hat{\mu} \rangle \cdot \frac{(t - t|_0)}{\tau_{стац}}} ;$$

$$Pm \cdot \frac{\partial \chi}{\partial \hat{t}} \approx \langle \hat{\mu} \rangle \cdot [\chi]_0 \qquad \Rightarrow \quad \frac{\chi}{\chi|_0} \approx 1 + \langle \hat{\mu} \rangle \cdot \frac{(t - t|_0)}{\tau_{стац}} .$$

Это говорит о том, что функция распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат должна меняться в масштабах быстрого времени. Последнее означает, что в течение довольно небольшого времени начальный слой принимает распределение, соответствующее условию $J(\chi_0, \chi_0) = 0$, то есть функция распределения принимает значения в окрестности равновесной функции $\chi_{оборуд}(t,S,\mu)$. Получен довольно существенный вывод, что любое начальное распределение базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\chi(t,S,\mu)$ при достаточно больших временах $t \to \infty$ стремится к своему равновестному распределению $\chi(t,S,\mu) \to \chi_{оборуд}(t,S,\mu)$), которое определяется параметрами работы оборудования производственной системы.

2.4. Приложение математической модели описания производства продукции для предприятия с массовым выпуском продукции в задачах планирования и управления производственным процессом

При рассмотрение вопросов планирования и управления производственной деятельностью предприятия модели планирования и управления разделим на две группы:

- Математические модели стратегического (или технико-экономического) планирования
- Математические модели оперативного планирования.

Под стратегическим (технико-экономическим) планированием будем понимать планирование развития техники, организации и экономики предприятия в их неразрывной взаимосвязи. В процессе стратегического (технико-экономического) планирования устанавливаются объемы производства и показатели качества продукции, выполняются расчеты необходимых ресурсов и определяются ожидаемые уровни развития техники, организации и экономики предприятия.

Внедрение и использование новой и совершенствование действующей техники и организации производства и труда на предприятии должно осуществляться планомерно, вытекать из перспективных планов развития отрасли и предприятия, основываться на последних достижениях науки и техники, учитывать конкретные особенности предприятия и передовой опыт.

Основой планируемого повышения экономической эффективности производства является совершенствование его организационно-технического уровня. Повышения эффективности производства охватывает следующие важнейшие направления: повышение качества продукции, проведение научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ, внедрение прогрессивной технологии, механизации и автоматизации производства, совершенствование систем управления, планирования и организации производства, научной организации труда, экономию материальных и трудовых ресурсов.

Стратегическое (технико-экономическое) планирование и управление исходит из требований рынка, основывается на плане развития техники и совершенствовании организации производства и труда и конкретизирует задачи каждого подразделения предприятия.

В рамках стратегического (технико-экономического) планирования и управления осуществляется взаимоувязанное развитие техники и экономики предприятия. Нельзя планировать внедрение новой техники, не имея обоснования ее экономической эффективности, подобно тому, как невозможно определять объемные задания и необходимые ресурсы без технического их обоснования.

Результаты стратегического (технико-экономического) планирования и управления находят свое выражение в виде заданий, показателей, лимитов в техпромфинплане предприятия и планах его подразделений.

Развитием и продолжением стратегического (технико-экономического) планирования и управления является оперативное планирование и управление производства. Задача состоит в обеспечении слаженной и согласованной работы всех звеньев производства в целях равномерного выполнения плана выпуска продукции в установленном объеме и номенклатуре при наилучшем использовании производственных ресурсов

В процессе оперативного планирования и управления производством осуществляют расчет и установление производственных заданий цехам, участкам и рабочим местам по выпуску определенных изделий, узлов и заготовок; нормативов движения производства (нормативов заделов, периодичности, размеров партии и др.); календарных графиков, определяющих порядок, последовательность и сроки изготовления продукции на каждой данной стадии производства. Расчет нормативов, установление заданий и календарных графиков, а также координация работы осуществляется в целом по заводу, по цехам, участкам и рабочим местам.

Сложность управления современным промышленным предприятием, достижение максимальной непрерывности производственных процессов и обеспечение комплектности – все это требует, чтобы функции руководства ходом производства, оперативного контроля и регулирования выполнялись самостоятельной диспетчерской службой. Диспетчирование завершает заводскую плановую работу, является органической частью и особой формой оперативного планирования и управления производством и призвано централизованно осуществлять непрерывное руководство выполнением плана, обеспечивая ритмичную работу и равномерный выпуск продукции.

2.4.1. Модель оперативного планирования и управления в массовом производстве для машиностроения

2.4.1.1. Особенности оперативного планирования и управления в массовом производстве. Постановка задачи оперативного планирования и управления в массовом производстве

Массовое производство в машиностроении характеризуется прежде всего узкой специализацией завода, цеха и участка на выпуске ограниченной и устойчивой в течение длительного промежутка времени номенклатуры изделий, изготавливаемых на основе установленного плановым заданием постоянного суточного темпа выпуска готовой продукции. Массовый выпуск изделий определяется преимущественно применением специального и специализированного оборудования, компонуемого в технологические поточные линии, и организацию предметно замкнутых участков, на которых производится обработка деталей, сборка узлов и агрегатов.

Основной задачей планирования и управления массового производства является организация и обеспечение движения обрабатываемых деталей и собираемых изделий по операциям в заданном такте.

Планирование и управление массового производства отличается рядом особенностей. Прежде всего необходимо отметить, что плановые расчеты массового производства теснейшим образом сочетаются с организационными мероприятиями по обеспечению бесперебойной и ритмичной работы на всех операциях применительно к единой расчетной величине такта выпуска продукции. В связи с этим значительная часть календарно-плановых нормативов массового производства имеет весьма устойчивый характер и непосредственно закладывается в основу планового регламента работы поточных линий. Работа по текущему планированию и управлению поточного производства сводится к корректировке фактического хода производства применительно к заданному нормативному распорядку.

В массовом производстве создаются условия для применения централизованной системы оперативного управления и планирования производством, которая имеет значительные преимущества: четкость, гибкость, действенное сокращение звеньев аппарата управления и его удешевление. Централизация оперативного управления позволяет широко и наиболее успешно применять механизацию и автоматизацию планово-расчетных и учетно-контрольных показателей с использованием современных быстродействующих средств и разнообразных средств диспетчерской техники. Вычислительный центр завода или предприятия может обеспечить своевременную выдачу цехам, участкам и органам снабжения по-детальных программ, а показатели первичного учета, переданные в учетный центр и преобразованные там в аналитическую сводку о выполнении плана и состоянии незавершенного производства, могут служить надежными данными для регулирования хода производства.

Оперативное планирование и управление производственным процессом базируется на следующих календарно-плановых нормативах (таблица 2.2.). На основе рассчитанных календарно-плановых нормативов и в соответствии с заданием вышестоящих организаций

Таблица 2.2.

Календарно-плановые нормативы оперативного планирования и управления в массовом производстве

№	Наименование
1	Норматив расчета такта и ритма выпускаемой продукции
2	Нормативный (плановый) график работы участков и линий
3	Нормативы внутрицикловых (внутрицеховых производственных) и межлинейных (межцеховых) заделов

составляются годовые, квартальные и месячные по-детальные для механических и заготовительных цехов и по-узловые и по-изделъные для сборочных цехов производственные программы и планы-графики на короткие отрезки времени по заводу, цехам и участкам.

Очень важными составными элементами оперативного планирования и управления в массовом производстве является контроль и управление движением заготовок, деталей, узлов и агрегатов между операциями, участками и цехами и контроль хода выполнения планов, состояние заделов и оперативное управление хода выполнения планов.

Расчеты оперативного планирования и управления массового производства должны базироваться на документации технологической и конструкторской подготовки производства, технологических маршрутах изготовления изделия по операциям и участкам, нормах расхода и технологических картах, составляемых на каждое изделие с указанной нормативной трудоемкостью.

При детальном рассмотрении календарно-плановых нормативов массового производства следует принимать во внимание неодинаковые формы организации массового производства, которые обуславливают некоторые различия в составе календарно плановых нормативов и специфики в их определении. Так, например, для прямоточного производства характерны межоперационные оборотные заделы, которых нет в непрерывно-поточном производстве. При расчете такта непрерывно-поточного производства необходимо предусматривать потери на отдых рабочих, в прямоточном производстве это не обязательно.

2.4.1.2.Календарно-плановые нормативы массового производства в модели оперативного планирования и управления в массовом производстве для машиностроения

Расчеты календарно-плановых нормативов рассмотрим в виде равнительного анализа показателей, используемых в курсе Экономика и организация машиностроительной промышленности» пущено Министерством высшего и среднего специального азования СССР в качестве учебника для студентов вузов, лающихся по специальности «Экономика и организация иностроительной промышленности» [7]) и показателей в модели тивного планирования и управления в массовом производстве для иостроения, основанной на функции распределения базовых тов по скоростям изменения затрат $\chi(t,S,\mu)$ в фазовом нстве (S,μ).

кодным элементом для расчетов массового производства расчет такта производственного процесса. ательность и содержание расчетов календарно-плановых в движения прямоточного и непрерывно поточного тва совпадают, однако имеют некоторые отличия, которые з особенности данной разновидности производства. Мы не будем останавливаться на отличительных особенностях, а будем использовать общие для двух видов производства формулы для проведения аналогии между показателями, используемые в курсе «Экономика и организация машиностроительной промышленности» и полученными показателями (макропараметрами) в модели оперативного планирования и управления в массовом производстве для машиностроения, основанной на функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\chi(t,S,\mu)$ в фазовом пространстве (S,μ).

Итак, тактом производственного процесса называется промежуток времени между выпуском с последней операции двух последовательно изготовляемых изделий [7] (в описанной модели – последовательно изготавливаемых базовых продуктов). Величина такта r определяется отношением времени (например, в часах) на выполнение заданной программой выпуска к общей программе выпуска (например, в штуках):

$$r = \frac{заданный\_период\_времени}{заданная\_программа}\left[\frac{час}{штук}\right].$$

Расчет такта в непрерывно-поточном производстве и поточном производстве совпадает. Аналогом такта r в описанной математической модели является величина, обратно пропорциональная первому моменту $\int\limits_0^\infty d\mu\cdot\mu\cdot\chi(t,S,\mu)=[\chi]_1$ функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат, характеризующему поток базовых продуктов вдоль технологического процесса

$$r = \frac{1}{[\chi]_1}\left[\frac{час}{штук}\right].$$

Такт является исходной величиной для организации работы поточной линии и всех расчетов движения производственного процесса, например, для расчета ритма передачи деталей с операции на операции, если передача осуществляется не после каждого такта, а периодически, транспортными партиями. Ритм передачи заготовок от операции к операции R определяется по формуле

$$R = r \cdot n'[час],$$

где $n'[штук]$ - размер транспортной партии. Следует заметить, что как правило, в массовом производстве в случае стационарной работы, размер транспортной партии значительно меньше межоперационных заделов поточной линии.

Подставляя в исходную формулу $R = r \cdot n'[час]$ выражение для такта $r = \frac{1}{[\chi]_1}\left[\frac{час}{штук}\right]$, получаем аналог в описанной математической модели

$$R = \frac{n'}{[\chi]_1}[час].$$

Такты и ритмы рассчитываются в массовом производстве по изделиям и деталям вдоль технологической цепочки изготовления продукции. Такт выражается при всякого рода расчетах не только непосредственно как календарный промежуток времени между выпуском или запуском предметов труда, но и в виде обратной величины – темпа поточной линии

$$Темп = \frac{1}{r} = \frac{заданная\_программа}{заданный\_период\_времени}\left[\frac{штук}{час}\right].$$

Темп определяет количество изделий (деталей), выпускаемых поточной линией в единицу времени и является аналогом потока базовых продуктов вдоль технологической цепочки производственного процесса:

$$Темп = \frac{1}{r} = [\chi]_1 \left[\frac{штук}{час}\right].$$

Для многодетальных изделий в целях ускорения расчетов обычно, путем пересмотра технических спецификаций, составляются специальные ведомости, в которых группируются детали по признаку их применяемости в изделиях (например, блок цилиндра, крышка блока, коленчатый вал, распределительный вал идут по штуке на машину, поршневые кольца по 12 штук. Данная группировка может быть названа базовым продуктом). Такая группировка является основанием для введения учетной единицы: базовый продукт. Это упрощает расчет такта, а также производственных программ выпуска изделий.

Для планирования поточного производства и разработки календарно-плановых нормативов необходимы расчеты количества рабочих мест на линии, которое должно обеспечить выполнение сменных заданий. Расчет количества рабочих мест **с** ведется по каждой операции по формуле

$$c = \frac{t_{шт}}{r} = [штук],$$

где $t_{шт}\left[\frac{час}{штук}\right]$- норма штучного времени с учетом фактического ее выполнения

Делая подстановку $r = \frac{1}{[\chi]_1}\left[\frac{час}{штук}\right]$,

Получаем аналог

$$c = t_{шт} \cdot [\chi]_1 = \int_{S_1}^{S_2} \lambda_{оборуд}(t,S) \cdot dS = [штук],$$

где $\lambda_{оборуд}(t,S)\left[\frac{штук}{грн}\right]$ - есть плотность расположения оборудования вдоль технологической цепочки увеличения стоимости базового продукта.

В условиях непрерывного строго синхронного потока количество рабочих мест на операциях всегда равно одному и тому же числу, так как основным условием непрерывно поточного производства, позволяющим осуществить непрерывность протекания производственных операций, является такая степень синхронизации времени их выполнения, при которой операционное время равно или кратно такту. Иными словами, отношение операционного времени к количеству станков, установленных на соответствующих операциях, должны быть равны друг другу и соответствовать величине такта:

$$\frac{t_{шт1}}{c_1} = \frac{t_{шт2}}{c_2} = \frac{t_{шт3}}{c_3} = r = const.$$

Подобный результат для аналога

$$\frac{t_{шт1}}{\int_{S_1}^{S_2} \lambda_{оборуд}(t,S) \cdot dS} = \frac{t_{шт2}}{\int_{S_2}^{S_2} \lambda_{оборуд}(t,S) \cdot dS} = \frac{t_{шт3}}{\int_{S_3}^{S_4} \lambda_{оборуд}(t,S) \cdot dS} =$$

$$=\frac{1}{[\chi]_1}\left[\frac{час}{штук}\right]=const$$

нетрудно получить из уравнения непрерывности потока базовых продуктов вдоль технологической цепочки:

$$\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t}+\frac{\partial([\chi]_0\cdot\langle\mu\rangle)}{\partial S}=\Delta(t,S) \qquad \Delta(t,S)\to 0,$$

полагая стационарный производственный процесс $\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t}=0$.

Из уравнения непрерывности потока базовых продуктов вдоль технологической цепочки:

$$\frac{\partial([\chi]_0\cdot\langle\mu\rangle)}{\partial S}=0 \quad \text{или} \quad [\chi]_1=\langle\mu\rangle\cdot[\chi]_0=const,$$

что является условием синхронизации производственного потока.

Для того, чтобы работа поточной линии осуществлялась бесперебойно в заданном ритме, необходимо насыщение всех стадий производственного процесса заделами (аналог в описанной математической модели заделу является интеграл от нулевого момента функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\int\limits_{S_i}^{S_j}dS\cdot[\chi]_0$, представляющий собой количество базовых продуктов между i-ой и j-ой технологической операцией, которым соответствует стоимость базового продукта на операции S_i и S_j), уровень которых должен быть строго регламентирован.

Мы не будем останавливаться на классификации производственных заделов, так как в качественном плане это не меняет картины представления производственного процесса, а определим суммарный задел на конкретной операции в виде равенства

$$Z_{задел\_i} = \int_{S_i}^{S_{i+1}} dS \cdot [\chi]_0 .$$

Определение норм заделов в массовом производстве производится преимущественно на основании опытных данных, подкрепленных и проверенных статистическими данными и специально проводимыми наблюдениями за отклонениями от такта в ходе работы поточных линий. Основными причинами отклонений от такта в работе поточных линий являются: производственно-технические неполадки (несвоевременная подача заготовок и материалов, брак заготовок, массовые поломки инструмента, выход из строя оборудования и т.д.); колебания производительности труда основных и вспомогательных рабочих; вспомогательные операции, прерывающие основной процесс (переналадка и смена инструмента и т.д.), что выражено в модели оперативного планирования и управления в массовом производстве для машиностроения посредством функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\chi(t,S,\mu)$ в фазовом пространстве (S,μ): через случайную величину μ, инженерно-производственную функцию $\frac{d\mu}{dt} = f(t,S)$ и генераторную функцию

$$J = \lambda_{оборуд} \cdot \int_0^{\infty} [\psi[\tilde{\mu} \to \mu] \cdot \tilde{\mu} \cdot \chi(t,S,\tilde{\mu}) - \psi[\mu \to \tilde{\mu}] \cdot \mu \cdot \chi(t,S,\mu)] \cdot d\tilde{\mu} .$$

Таблица 2.3.

Сравнительная таблица календарно-плановых нормативов массового производства

	Название календарно-планового норматива	Курс «Экономика и организация машиностроительной промышленности»	Модель оперативного плани-рования и управления в массовом производстве для машиностроения, основанной на функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\chi(t,S,\mu)$ в фазовом пространстве (S,μ)
	Такт производственного процесса	$r = \frac{заданный\_период\_времени}{заданная\_программа}\left[\frac{час}{штук}\right]$	$r = \frac{1}{[\chi]_1}\left[\frac{час}{штук}\right]$, где $\int_0^\infty d\mu \cdot \mu \cdot \chi(t,S,\mu) = [\chi]_1$
	Ритм передачи заготовок от операции к операции R	$R = r \cdot n'[час]$, где $n'[штук]$ - размер транспортной партии	$R = \frac{n'}{[\chi]_1}[час]$, где $n'[штук]$ - размер транспортной партии
	Темп поточной линии	$Темп = \frac{1}{r} = \frac{заданная\_программа}{заданный\_период\_времени}\left[\frac{штук}{час}\right]$	$Темп = \frac{1}{r} = [\chi]_1\left[\frac{штук}{час}\right]$
	Количество рабочих мест по каждой операции	$c = \frac{t_{шт}}{r} = [штук]$	$c = t_{шт} \cdot [\chi]_1 = \int_{S_1}^{S_2} \lambda_{оборуд}(t,S) \cdot dS = [штук]$ где $\lambda_{оборуд}(t,S)\left[\frac{штук}{грв}\right]$ - плотность расположения оборудования вдоль технологической цепочки увеличения стоимости базового продукта
	Межоперационный задел	$Z_{задел\_1}$	$Z_{задел\_i} = \int_{S_i}^{S_{i+1}} dS \cdot [\chi]_0$

В заключении представим в табличном виде календарно-плановые нормативы массового производства, используемых в курсе «Экономика и организация машиностроительной промышленности» и их аналоги, представленные в модели оперативного планирования и управления в массовом производстве для машиностроения, основанной на функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\chi(t,S,\mu)$ в фазовом пространстве (S,μ):

Данная таблица дает возможность сопоставлять календарно-плановые нормативы массового производства и использовать модель оперативного планирования и управления в массовом производстве для машиностроения, основанной на функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\chi(t,S,\mu)$ в фазовом пространстве (S,μ) в виде эффективного инструмента оперативного планирования и управления производственным процессом для массового выпуска продукции.

2.4.1.3.Вопросы устойчивости массового производства в модели оперативного планирования и управления в массовом производстве для машиностроения

Рассмотрим влияние возмущающих факторов на функционирование системы базовых продуктов в случае массового производства. Под возмущающими факторами будем понимать силы, не учитываемые при описании производственного процесса вследствие их малости по сравнению с основными силами, влияющими на производство- и выпуск продукции. Они могут действовать как мгновенно, что сведется к малому изменению начального состояния производственной системы, так и непрерывно, что будет означать, что составленные уравнения производственного процесса отличаются от истинных, что в них не учтены некоторые малые поправочные члены.

Хорошо известно, что влияние малых возмущающих факторов на движение материальной системы будет не одинаковым для различных процессов. На одни процессы это влияние незначительно, так как возмущенное движение мало отличается от невозмущенного. Напротив, на других процессах влияние возмущений сказывается весьма значительно, так как возмущающее движение системы значительно отличается от невозмущенного, как бы ни были малы возмущающие силы. Процессы первого рода будут устойчивыми, второго рода – неустойчивыми. Так как возмущающие факторы всегда существуют неизбежно, то становится понятным, что задача устойчивости производственного процесса приобретает очень важное теоретическое и практическое значение.

Исследование устойчивости производственного процесса будем осуществлять через макропараметры производственной системы, являющими моментами функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\chi(t,S,\mu)$ в фазовом пространстве (S,μ).

Запишем уравнения для моментов функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\chi(t,S,\mu)$. Возьмем интегро-дифференциальное уравнение, описывающее поведение функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат

$$\frac{\partial \chi}{\partial t}+\frac{\partial \chi}{\partial S}\cdot \mu+\frac{\partial \chi}{\partial \mu}\cdot f=\lambda_{оборуд}\cdot\left\{\psi\left[\tilde{\mu}\to\mu\right]\cdot\left[\chi\right]_1-\mu\cdot\chi\right\},$$

$$\int_0^{\infty}\psi\left[\mu\to\tilde{\mu}\right]\cdot d\tilde{\mu}=1$$

и проинтегрируем его по всему диапазону случайной величины μ.

Получим уравнение непрерывности потока базовых продуктов вдоль технологической цепочки:

$$\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t}+\frac{\partial\left([\chi]_0\cdot\langle\mu\rangle\right)}{\partial S}=\Delta(t,S);$$

$$\Delta(t,S)\to 0,$$

являющее законом сохранения для движения базовых продуктов вдоль технологической цепочки производственного процесса при $\Delta(t,S)=0$. Член $\Delta(t,S)\to 0$ характеризует дополнительный отток или приток базовых продуктов в ходе прохождения их по этапам технологического процесса. Затем вновь возьмем интегро-дифференциальное уравнение, описывающее поведение функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат, умножим его на случайную величину μ и проинтегрируем его по всему диапазону случайной величины μ.

Получим уравнение движения базовых продуктов вдоль технологической цепочки в общем случае

$$\frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial t}+\langle\mu\rangle\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial S}=-\frac{1}{[\chi]_0}\cdot\frac{\partial P(t,S)}{\partial S}+f+\frac{1}{[\chi]_0}\cdot\Gamma(t,S),$$

где f - инженерно-производственная функция – виртуальная сила, заставляющая перемещаться базовый продукт вдоль технологической цепочки, определяющаяся планом производства и технологическим процессом;

$-\frac{1}{[\chi]_0}\cdot\frac{\partial P(t,S)}{\partial S}$ - сила, представляющая собой давление на базовый продукт между технологическими операциями и определяющаяся дисперсией случайной величины μ;

$\frac{1}{[\chi]_0}\cdot\Gamma(t,S)$ - сила, представляющая потери или поступления базовых продуктов посредством не технологических операций.

Как правило $\frac{1}{[\chi]_0}\cdot\Gamma(t,S)\to 0$

и $\frac{1}{[\chi]_0}\cdot\frac{\partial P(t,S)}{\partial S} >> \frac{1}{[\chi]_0}\cdot\Gamma(t,S)$, $\qquad f >> \frac{1}{[\chi]_0}\cdot\Gamma(t,S)$.

Мы имеем систему уравнений, описывающих производственный процесс через макропараметры производственной системы, которыми являются моменты функции распределения базовых продуктов от случайной величины μ:

$$\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t}+\frac{\partial([\chi]_0\cdot\langle\mu\rangle)}{\partial S}=0;$$

$$\frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial t}+\langle\mu\rangle\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial S}=-\frac{1}{[\chi]_0}\cdot\frac{\partial P(t,S)}{\partial S}+f.$$

которые задаются из планируемых календарно-плановых нормативов (таблица 2.3.).

Решение

$$[\chi]_0^* = [\chi]_0^*(t,S); \quad [\chi]_1^* = \langle\mu\rangle^* \cdot [\chi]_0^*; \; \langle\mu\rangle^* = \langle\mu\rangle^*(t,S)$$

системы уравнений

$$\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t} + \frac{\partial([\chi]_0 \cdot \langle\mu\rangle)}{\partial S} = 0;$$

$$\frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial t} + \langle\mu\rangle \cdot \frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial S} = -\frac{1}{[\chi]_0} \cdot \frac{\partial P(t,S)}{\partial S} + f$$

будем называть необходимыми условиями устойчивости или планом производственного процесса. Этот план выражает баланс между движением базовых продуктов вдоль технологической цепочки и требуемым выходом продукции с производства, заданным граничными условиями.

Рассмотрим теперь, что произойдет, если макровеличины, наблюдаемые производственной или диспетчерской службой, получат случайные малые возмущения $[y]_0$, $\langle y\rangle$ относительно своего невозмущенного положения $[\chi]_0^*$, $\langle\mu\rangle^*$, определяемого необходимыми условиями устойчивости:

$$[\chi]_0^* = [\chi]_0^*(t,S); \quad [\chi]_1^* = \langle\mu\rangle^* \cdot [\chi]_0^*; \qquad \langle\mu\rangle^* = \langle\mu\rangle^*(t,S),$$

Разложим макровеличину в окрестности невозмущенного положения:

$$[\chi]_0 = [\chi]_0^* + [y]_0; \qquad \langle\mu\rangle = \langle\mu\rangle^* + \langle y\rangle.$$

Линеаризуем систему уравнений

$$\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t}+\frac{\partial([\chi]_0\cdot\langle\mu\rangle)}{\partial S}=0;$$

$$\frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial t}+\langle\mu\rangle\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial S}=-\frac{1}{[\chi]_0}\cdot\frac{\partial P(t,S)}{\partial S}+f$$

по малым возмущениям в окрестности невозмущенного движения (в дальнейшем будем называть “плановым движением”) макропараметров системы, подставив

$$[\chi]_0=[\chi]_0^*+[y]_0; \qquad \langle\mu\rangle=\langle\mu\rangle^*+\langle y\rangle$$

и разложив функции $\frac{1}{[\chi]_0}\cdot\frac{\partial P(t,S)}{\partial S}$ и f в окрестности планового движения макропараметров $[\chi]_0$ и $\langle\mu\rangle$:

$$\frac{1}{[\chi]_0}\cdot\frac{\partial P(t,S)}{\partial S}=\frac{1}{[\chi]_0}\cdot\frac{\partial P(t,S)}{\partial S}\bigg|^*+a_1\cdot[y]_0+a_2\cdot\langle y\rangle+\Delta(0^2);$$

$$f=f^*+b_1\cdot[y]_0+b_2\cdot\langle y\rangle+\Delta(0^2),$$

где посредством $\Delta(0^2)$ обозначены члены более высокого порядка малости относительно возмущений макроскопических параметров производственной системы.

Подставляя указанное выше в систему уравнений, получаем

$$\frac{\partial[\chi]_0^*}{\partial t}+\frac{\partial[y]_0}{\partial t}+\frac{\partial\left(\left\{[\chi]_0^*+[y]_0\right\}\cdot\left\{\langle\mu\rangle^*+\langle y\rangle\right\}\right)}{\partial S}=0;$$

$$\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial t}+\frac{\partial\langle y\rangle}{\partial t}+\left\{\langle\mu\rangle^*+\langle y\rangle\right\}\cdot\frac{\partial\left\{\langle\mu\rangle^*+\langle y\rangle\right\}}{\partial S}=$$

$$=\frac{1}{[\chi]_0}\cdot\frac{\partial\sigma^2(t,S)}{\partial S}\Bigg|^*+a_1\cdot[y]_0+a_2\cdot\langle y\rangle+\Delta(0^2)+$$

$$+f^*+b_1\cdot[y]_0+b_2\cdot\langle y\rangle+\Delta(0^2).$$

Для невозмущенного состояния производственной системы имеем:

$$\frac{\partial[\chi]_0^*}{\partial t}+\frac{\partial\left([\chi]_0^*\cdot\langle\mu\rangle^*\right)}{\partial S}=0;$$

$$\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial t}+\langle\mu\rangle^*\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S}=-\frac{1}{[\chi]_0}\cdot\frac{\partial P(t,S)}{\partial S}\Bigg|^*+\quad f^*.$$

Используя последнее, получим систему уравнений состояния производственной системы для малых возмущений макропараметров $[\chi]_0$ и $\langle\mu\rangle$, линеаризованную относительно малых возмущений $[y]_0$, $\langle y\rangle$

$$\frac{\partial[y]_0}{\partial t}+[\chi]_0^*\cdot\frac{\partial\langle y\rangle}{\partial S}+\frac{\partial[\chi]_0^*}{\partial S}\cdot\langle y\rangle+\frac{\partial[y]_0}{\partial S}\cdot\langle\mu\rangle^*+[y]_0\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S}=0;$$

$$\frac{\partial\langle y\rangle}{\partial t}+\langle\mu\rangle^*\cdot\frac{\partial\langle y\rangle}{\partial S}+\langle y\rangle\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S}=a_1\cdot[y]_0+a_2\cdot\langle y\rangle+b_1\cdot[y]_0+b_2\cdot\langle y\rangle.$$

Разложим малое возмущение макропараметров $[\chi]_0$ и $\langle\mu\rangle$ в ряд Фурье:

$$[y]_0\approx\alpha_{01}+\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{j1}\cdot sin\left[\frac{2\cdot\pi\cdot j}{S_d}\cdot S\right]+\sum_{j=1}^{\infty}\beta_{j1}\cdot cos\left[\frac{2\cdot\pi\cdot j}{S_d}\cdot S\right];$$

$$\langle y\rangle \approx \alpha_{02} + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{j2} \cdot sin\left[\frac{2\cdot\pi\cdot j}{S_d}\cdot S\right] + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{j2} \cdot cos\left[\frac{2\cdot\pi\cdot j}{S_d}\cdot S\right],$$

где $\alpha_{01}(t)$, $\alpha_{02}(t), \alpha_{j1}(t), \alpha_{j2}(t), \beta_{j1}(t), \beta_{j2}(t)$ коэффициенты разложения в ряд Фурье малых возмущений $[y]_0$, $\langle y\rangle$ макропараметров $[\chi]_0$ и $\langle\mu\rangle$. Подставляя вместо малых возмущений их разложение в ряд Фурье, можно получить уравнения в малых возмущениях для каждой из гармоник. Например, для нулевой гармоники уравнения в малых возмущениях имеют вид:

$$\frac{d\alpha_{01}}{dt} + \frac{\partial[\chi]_0^*}{\partial S}\cdot\alpha_{02} + \frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S}\cdot\alpha_{01} = 0;$$

$$\frac{d\alpha_{02}}{dt} + \alpha_{02}\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S} = a_1\cdot\alpha_{01} + a_2\cdot\alpha_{02} + b_1\cdot\alpha_{01} + b_2\cdot\alpha_{02}.$$

где характеристическое уравнение системы для нулевой гармоники:

$$\begin{vmatrix} \left[-\lambda + \dfrac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S}\right] & \left[\dfrac{\partial[\chi]_0^*}{\partial S}\right] \\ [-a_1 - b_1] & \left[-\lambda + \dfrac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S} - a_2 - b_2\right] \end{vmatrix} = 0;$$

$$\left[-\lambda + \frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S}\right]\cdot\left[-\lambda + \frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S} - a_2 - b_2\right] - [-a_1 - b_1]\cdot\left[\frac{\partial[\chi]_0^*}{\partial S}\right] = 0 \qquad \text{или}$$

$$\lambda^2 + \left[-2\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S} + a_2 + b_2\right]\cdot\lambda + [-a_2 - b_2]\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S} - [-a_1 - b_1]\cdot\left[\frac{\partial[\chi]_0^*}{\partial S}\right] = 0.$$

Решая квадратное относительно λ уравнение, получаем

$$\lambda(S)=\frac{-\left[-2\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S}+a_2+b_2\right]\pm\sqrt{\left[-2\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S}+a_2+b_2\right]^2-4\cdot\left[[-a_2-b_2]\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S}-[-a_1-b_1]\cdot\left[\frac{\partial[\chi]_0^*}{\partial S}\right]\right]}}{2}.$$

Для стационарного случая

$$\frac{\partial[\chi]_0^*}{\partial t}=0;\qquad \frac{\partial\left([\chi]_0^*\cdot\langle\mu\rangle^*\right)}{\partial S}=0;\qquad \frac{\partial[\chi]_0^*}{\partial S}=-\frac{[\chi]_0^*}{\langle\mu\rangle}\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S};$$

$$[\chi]_0^*=\frac{A_1}{\langle\mu\rangle};\qquad A_1=const$$

и получаем

$$\lambda(S)=\frac{-\left[-2\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S}+a_2+b_2\right]\pm\sqrt{\left[-2\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S}+a_2+b_2\right]^2-4\cdot\left[[-a_2-b_2]\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S}+[-a_1-b_1]\cdot\frac{A_1}{\langle\mu\rangle^2}\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S}\right]}}{2}=$$

$$=\frac{-\left[-2\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S}+a_2+b_2\right]\pm\sqrt{\left[-2\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S}+a_2+b_2\right]^2-4\cdot\left[[-a_2-b_2]+[-a_1-b_1]\cdot\frac{A_1}{\langle\mu\rangle^2}\right]\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S}}}{2}.$$

Если корни уравнения имеют отрицательную реальную часть, то производственный процесс устойчив относительно нулевой гармоники разложения возмущения.

2.4.1.4.Вопросы управления массовым производством в модели оперативного планирования и управления машиностроительным предприятием

2.4.1.4.1. Сущность и задачи диспетчерского руководства производством

Диспетчирование, являющееся на предприятии органической частью оперативного планирования производства, включает в себя:

- Непрерывный учет и текущую информацию о фактическом ходе работ по выполнению установленного производственного графика и графика сменно-суточных заданий;
- Принятие оперативных мер по предупреждению и устранению отклонений от плана и перебоев в ходе производства;
- Выявление и анализ причин отклонений от установленных плановых заданий и календарных графиков производства и принятия оперативных мер по ликвидации этих причин;
- Координацию текущей работы взаимосвязанных звеньев производства в целях обеспечения ритмичной работы производства по установленному графику;
- Организационное руководство оперативной подготовкой всего необходимого для выполнения сменно-суточных заданий и календарных графиков производства.

Таким образом, диспетчирование представляет собой централизованный оперативный контроль и оперативное управление производства с целью обеспечения равномерного и комплексного выполнения плана выпуска продукции.

Система диспетчерского руководства является действенным средством обеспечения ритмичной работы при следующих основных условиях:

- диспетчирование должно опираться на четкую организацию оперативного планирования производства, непосредственным продолжением которого оно является;

- диспетчирование предполагает непрерывность контроля и наблюдения за ходом производства, для чего необходима своевременная и точная информация о фактическом выполнении планов-графиков изготовления и выпуска продукции и обо всех неполадках, возникающих в текущей работе. Создание специальной системы оперативной информации основывается на применении современных технических средств, обеспечивающих автоматизацию получения, переработки и передачи информации.
- диспетчирование предполагает обязательное быстрое и четкое выполнение распоряжений руководства, что позволяет успешно ликвидировать возникающие неполадки и координировать работу всех звеньев производства; для этого диспетчерский персонал должен быть наделен достаточными полномочиями, дающими возможность осуществлять текущее распорядительство и маневрирование имеющимися на производстве резервами (страховыми запасами материалов, заделами заготовок и деталей, резервным оборудованием и т.д.) и применять другие средства, необходимые для устранения перебоев и регулирования хода производства
- диспетчерская служба должна базироваться на четкой ответственности и приемственности оперативного руководства производством; для этого устанавливается строгий регламент дежурства диспетчерского персонала и ответственная сдача-приемка сменных дежурств.

Для упрощения рассмотрим идеальный случай $\frac{1}{[\chi]_0} \cdot \Gamma(t,S) = 0$, $\Delta(t,S) = 0$, что не влияет на качественную картину процесса. Функции $\frac{1}{[\chi]_0} \cdot \frac{\partial P(t,S)}{\partial S}$ и f являются заданными и определяются посредством задания инженерно-производственной и генераторной функции производственного процесса.

Пусть системе уравнений

$$\frac{\partial\ [\chi\ ]_0}{\partial\ t} + \frac{\partial([\chi]_0 \cdot \langle\mu\rangle)}{\partial S} = 0;$$

$$\frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial t} + \langle\mu\rangle \cdot \frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial S} = -\frac{1}{[\chi]_0} \cdot \frac{\partial P(t,S)}{\partial S} + f$$

с начальными $[\chi]_{0\_начальн} = [\chi]_0(0,S)$;

$$\langle\mu\rangle_{начальн} = \langle\mu\rangle(0,S)$$

и граничными $[\chi]_{0\_гранич} = [\chi]_0(t,0)$;

$$\langle\mu\rangle_{гранич} = \langle\mu\rangle(t,S_d)$$

условиями соответствует решение

$$[\chi]_0^* = [\chi]_0^*(t,S); \quad [\chi]_1^* = \langle\mu\rangle^* \cdot [\chi]_0^*; \quad \langle\mu\rangle^* = \langle\mu\rangle^*(t,S),$$

являющееся планом функционирования производственной системы и строится на основе начальных и граничных условий

$[\chi]_{0\_начальн} = [\chi]_0(0,S)$; $\langle\mu\rangle_{начальн} = \langle\mu\rangle(0,S)$;

$[\chi]_{0\_гранич} = [\chi]_0(t,0)$; $\langle\mu\rangle_{гранич} = \langle\mu\rangle(t,S_d)$, В разных типах производства конкретное содержание диспетчерского руководства имеет ряд существенных особенностей, представленных в таблице 2.4. Непрерывный, системный контроль за состоянием всех элементов производства и за фактическим ходом работ по выполнению плана имеет в разных типах производства и при различных системах оперативного планирования неодинаковый состав объектов наблюдения и диспетчерского контроля:

Таблица 2.4.

Основные объекты диспетчерского контроля и наблюдения за ходом производства

Тип производства	Объекты диспетчерского контроля и наблюдения за ходом производства	Примечание
1	2	3
Единичное производство	**Сроки выполнения отдельных работ по заказам**	• Предусматривает системную проверку своевременности запуска и выпуска заготовок по отдельным этапам их изготовления, а также своевременности комплектования деталей и узлов для окончательного монтажа и выпуска готовой продукции в установленные сроки. • Важнейшее условие бесперебойной работы: наличие своевременной и комплексной подготовки, а также сопровождающая его оперативная подготовка всего необходимого для выполнения заказа. • Диспетчерское руководство осуществляет текущую увязку органов технической подготовки, участвующих в последовательных стадиях разработки заказов.

1	2	3
Серийное производство	**Установленные по плану сроки запуска и выпуска партии заготовок и деталей на всех участках производственной цепочки, состояние складских заделов**	• В зависимости от характере серийного производства и, в частности, от степени его устойчивости диспетчерский контроль может осуществляться либо применительно к стандартным графикам межцеховых подач по отдельным цехам и план- графикам работ производственных участков, либо применительно к установленным на очередной месяц срокам комплектации узлов. • При использовании системы планирования по заделам основным объектом диспетчерского контроля является степень укомплектованности изделий, которая устанавливается на основании данных картотеки пропорциональности, и показатель отставания в сутко-позициях, определяемый из графика пропорциональности. • Важная задача оперативной подготовки производства является обеспечение ритмичного чередования запуска партии деталей в обработку и их выпуска по установленному календарному графику. Для этого необходима в первую очередь четкая организация переналадки оборудования. Работа наладчиков оборудования производится под строгим контролем диспетчеров, которые должны строгого соблюдения установленных графиков переналадок.
Массовое производство	**Такт работы и нормы заделов на всех стадиях производственного процесса**	• Контроль осуществляется с помощью, как правило, суточных и часовых графиков работы. • Наряду со специфическими для каждого типа производства объектами диспетчерского контроля существуют и объекты диспетчерского наблюдения, свойственные любому типу производства: контроль за наличием сырья и материалов, бесперебойностью работы оборудования и выполнением внеплановых срочных заданий и заказов. Диспетчер должен обеспечивать системную проверку наличия в производственных цехах требуемых материалов и заготовок. При этом подача всего необходимого на производственные участки должно осуществляться под наблюдением диспетчера и в ряде случаев по его прямому распоряжению.

2.4.1.4.2.Постановка задачи оперативного управления производственным процессом машиностроительного предприятия

В процессе дежурства диспетчер завода получает оперативную информацию о ходе производства и его обеспечении. Для этого используется система оповещений и сигнализации. Довольно широко используется производственная сигнализация, представляющая собой различного рода счетные и регистрирующие приборы, которые автоматически передают фактические показания с рабочих мест. С помощью автоматической сигнализации диспетчер получает сведения о начале и конце работы конвейера, простоях оборудования, выработке на отдельных производственных участках, часовом выпуске изделий и т.п.

В условиях применения ЭВМ функции оперативного планирования и управления тесно переплетаются. Например, каждая отправка партии деталей потребителю фиксируется с помощью накладных и с помощью баз данных, посредством которых происходит выписка накладных. Информация в течение суток накапливается, обрабатывается и сравнивается с плановой информацией. Затем, в начале следующих суток информация о ходе производства и задание на следующие сутки передается производственным подразделениям в виде цепочки рекомендаций, распоряжений и приказов, суть которых – ликвидировать наличие отклонения от планового результата. Эти действия по ликвидации отклонений от плановых показателей носят заранее продуманный характер и представлены в виде инструкций у диспетчера. Данные инструкции будем называть управляющей функцией, а конкретные распоряжения диспетчера по ликвидации отклонения от планового результата - управляющими воздействиями.

Рассмотрим некоторую динамическую систему массового производства, описываемую с помощью системы уравнений для такта производственного процесса

$$r = \frac{1}{[\chi]_1}\left[\frac{час}{штук}\right]; \qquad \int_0^{\infty} d\mu \cdot \mu \cdot \chi(t,S,\mu) = [\chi]_1$$

и межоперационного задела $Z_{задел\_i} = \int_{S_i}^{S_{i+1}} dS \cdot [\chi]_0$:

$$\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t} + \frac{\partial([\chi]_0 \cdot \langle\mu\rangle)}{\partial S} = 0;$$

$$\frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial t} + \langle\mu\rangle \cdot \frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial S} = -\frac{1}{[\chi]_0} \cdot \frac{\partial\sigma^2(t,S)}{\partial S} + f$$

с начальными $\quad [\chi]_{0\_начальн} = [\chi]_0(0,S);$

$$\langle\mu\rangle_{начальн} = \langle\mu\rangle(0,S)$$

и граничными $\quad [\chi]_{0\_гранич} = [\chi]_0(t,0);$

$$\langle\mu\rangle_{гранич} = \langle\mu\rangle(t,S_d)$$

условиями.

Дополним уравнение межоперационных заделов и уравнение для такта производственного процесса управляющей функцией $v_0(t,S)$ и $v_1(t,S)$:

$$\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t} + \frac{\partial([\chi]_0 \cdot \langle\mu\rangle)}{\partial S} = v_0(t,S);$$

$$\frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial t}+\langle\mu\rangle\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial S}=-\frac{1}{[\chi]_0}\cdot\frac{\partial\sigma^2(t,S)}{\partial S}+f+v_1(t,S)$$

вающими процесс управления межоперационными заделами и
м производственного процесса.

Будем полагать, что управление отсутствует в случае работы зводства в плановом (невозмущенном) режиме: $v_0^*(t,S)=0$,
$,S)=0$.

Данное состояние описывается необходимыми условиями ойчивости производственной системы:

$$[\chi]_0^*=[\chi]_0^*(t,S);\quad [\chi]_1^*=\langle\mu\rangle^*\cdot[\chi]_0^*;\ \langle\mu\rangle^*=\langle\mu\rangle^*(t,S),$$

олученными выше.

для исследования проблем управления межоперационными заделами и актом производственного процесса целесообразно составить уравнения возмущенного движения управляемой системы, перейдя к новым переменным

$$[y]_0=[\chi]_0-[\chi]_0^*;\qquad \langle y\rangle=\langle\mu\rangle-\langle\mu\rangle^*;$$

$$u_0=v_0(t,S)-v_0^*(t,S);\qquad u_1=v_1(t,S)-v_1^*(t,S)$$

где $[y]_0$, $\langle y\rangle$ - малые возмущения производственной системы;

u_0, u_1 - управляющие воздействия диспетчерской службы на отклонения производственной системы от планового (невозмущенного) состояния.

Полученные таким образом уравнения управления производственной системой

$$\frac{\partial[y]_0}{\partial t}+[\chi]_0^*\cdot\frac{\partial\langle y\rangle}{\partial S}+\frac{\partial[\chi]_0^*}{\partial S}\cdot\langle y\rangle+\frac{\partial[y]_0}{\partial S}\cdot\langle\mu\rangle^*+[y]_0\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S}=u_0;$$

$$\frac{\partial\langle y\rangle}{\partial t}+\langle\mu\rangle^*\cdot\frac{\partial\langle y\rangle}{\partial S}+\langle y\rangle\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S}=a_1\cdot[y]_0+a_2\cdot\langle y\rangle+b_1\cdot[y]_0+b_2\cdot\langle y\rangle+u_1.$$

и будем рассматривать далее.

Сформулируем теперь задачу об управлении:

Задача №1: Требуется найти такое управляющее воздействие $u_0(t,[y]_0,\langle y\rangle)$, $u_1(t,[y]_0,\langle y\rangle)$, которые обеспечат асимптотическую устойчивость планового (невозмущенного) состояния производственной системы:

$$[\chi]_0^*=[\chi]_0^*(t,S);$$

$$[\chi]_1^*=\langle\mu\rangle^*\cdot[\chi]_0^*;\ \langle\mu\rangle^*=\langle\mu\rangle^*(t,S)$$

в силу уравнений возмущенного движения:

$$\frac{\partial[y]_0}{\partial t}+[\chi]_0^*\cdot\frac{\partial\langle y\rangle}{\partial S}+\frac{\partial[\chi]_0^*}{\partial S}\cdot\langle y\rangle+\frac{\partial[y]_0}{\partial S}\cdot\langle\mu\rangle^*+[y]_0\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S}=u_0;$$

$$\frac{\partial\langle y\rangle}{\partial t}+\langle\mu\rangle^*\cdot\frac{\partial\langle y\rangle}{\partial S}+\langle y\rangle\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S}=a_1\cdot[y]_0+a_2\cdot\langle y\rangle+b_1\cdot[y]_0+b_2\cdot\langle y\rangle+u_1.$$

Реальной основой для сформулированной задачи №1 является следующая ситуация. Предполагается, что в ходе управления можно измерять текущие значения макропараметров $[\chi]_0$ (уровень межоперационных заделов), $\langle\mu\rangle$ (аналог такта производственной системы), которые поступают в диспетчерский пункт, например, посредством производственной сигнализации. На основе этого измерения управляющее устройство должно вырабатывать воздействие

$u_0(t,[y]_0,\langle y\rangle)$, $u_1(t,[y]_0,\langle y\rangle)$ на объект. Эти воздействия должны обеспечить асимптотическую устойчивость заданного планового (невозмущенного) состояния: $[\chi]_0^* = [\chi]_0^*(t,S)$; $[\chi]_1^* = \langle\mu\rangle^* \cdot [\chi]_0^*$; $\langle\mu\rangle^* = \langle\mu\rangle^*(t,S)$.

По смыслу величин $[\chi]_0$, $\langle\mu\rangle$ и $u_0(t,[y]_0,\langle y\rangle)$, $u_1(t,[y]_0,\langle y\rangle)$ предполагается, что функции $u_0(t,[y]_0,\langle y\rangle)$, $u_1(t,[y]_0,\langle y\rangle)$, определение которых составляет задачу№1, должны удовлетворять равенствам:

$$u_0(t,0,0) = 0;$$

$$u_1(t,0,0) = 0.$$

Мы будем исследовать задачу об управлении, полагая, что функции $u_0(t,[y]_0,\langle y\rangle)$, $u_1(t,[y]_0,\langle y\rangle)$ определены и непрерывны в рассматриваемой области и не стеснены никакими дополнительными неравенствами, т.е. предполагается, что в уравнениях в малых возмущениях

$$\frac{\partial[y]_0}{\partial t} + [\chi]_0^* \cdot \frac{\partial\langle y\rangle}{\partial S} + \frac{\partial[\chi]_0^*}{\partial S} \cdot \langle y\rangle + \frac{\partial[y]_0}{\partial S} \cdot \langle\mu\rangle^* + [y]_0 \cdot \frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S} = u_0;$$

$$\frac{\partial\langle y\rangle}{\partial t} + \langle\mu\rangle^* \cdot \frac{\partial\langle y\rangle}{\partial S} + \langle y\rangle \cdot \frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S} = a_1 \cdot [y]_0 + a_2 \cdot \langle y\rangle + b_1 \cdot [y]_0 + b_2 \cdot \langle y\rangle + u_1$$

переменные u_0, u_1 могут принимать сколь угодно большие значения.

Задача об управлении сформулирована для случая асимптотической устойчивости. Прикладные задачи управления наряду с требованиями асимптотической устойчивости заданного планового (невозмущенного) состояния : $[x]_0^* = [x]_0^*(t,S)$; $[x]_1^* = \langle\mu\rangle^* \cdot [x]_0^*$; $\langle\mu\rangle^* = \langle\mu\rangle^*(t,S)$, содержат обычно пожелания о наилучшем возможном качестве переходного процесса, т.е. пожелания о наилучшем (с какой-либо точки зрения) качестве возмущенного движения в процессе его приближения к плановому (невозмущенному) состоянию при $t \to \infty$. При этом обычно высказывается пожелания о наименьшей возможной затрате ресурсов (энергии, сырья и материалов, трудовых ресурсов и т.д.), расходуемых на формирование управляющих воздействий $u_0(t,[y]_0,\langle y\rangle)$, $u_1(t,[y]_0,\langle y\rangle)$. Такие пожелания можно выразить в виде условия минимальности некоторого интеграла:

$$I = \int_{t_0}^{\infty} \omega(t,[y]_0,\langle y\rangle,u_0,u_1) \cdot dt.$$

Здесь $\omega(t,[y]_0,\langle y\rangle,u_0,u_1)$ - неотрицательная функция. Символами

u_0, u_1 будем обозначать величины управляющих воздействий, которые реализуются в системе. Вопрос о выборе функции $\omega(t,[y]_0,\langle y\rangle,u_0,u_1)$, определяющей оценку качества производственного процесса, здесь подробно обсуждать не будем. То или иное решение этого вопроса определяется в каждом конкретном случае конкретными особенностями рассматриваемой прикладной задачи. Обычно при выборе функции $\omega(t,[y]_0,\langle y\rangle,u_0,u_1)$ учитывают три основных мотива:

1.Условие минимума интеграла качества $I = \int_{t_0}^{\infty} \omega(t, [y]_0, \langle y \rangle, u_0, u_1) \cdot dt$ должно обеспечивать достаточно быстрое затухание возникшего возмущения $[y]_0 = [\chi]_0 - [\chi]_0^*$; $\langle y \rangle = \langle \mu \rangle - \langle \mu \rangle^*$.

2.Величина интеграла качества $I = \int_{t_0}^{\infty} \omega(t, [y]_0, \langle y \rangle, u_0, u_1) \cdot dt$ должна удовлетворительно оценивать ресурсы, затрачиваемые на формирование управляющих воздействий $u_0(t, [y]_0, \langle y \rangle)$, $u_1(t, [y]_0, \langle y \rangle)$.

3.Функция $\omega(t, [y]_0, \langle y \rangle, u_0, u_1)$ должна быть такой, чтобы решение задачи не оказалось чрезмерно сложным и чтобы, по возможности, можно было получить это решение в замкнутой форме.

В частности, этим условиям во многих практических случаях отвечает функция $\omega(t, [y]_0, \langle y \rangle, u_0, u_1)$, выбранная в виде определенно положительной квадратичной формы

$$\omega = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + \sum_{i,j=0}^{m} \beta_{ij} \cdot u_i \cdot u_j; \qquad x_1 = [y]_0;\ x_2 = \langle y \rangle,$$

где

n- количество линейно-независимых возмущений макропараметров производственной системы;

m – количество управляющих воздействий на возмущения макропараметров производственной системы.

Задачу об управлении производственной системой при условии минимума какого-то критерия качества $I = \int\limits_{t_0}^{\infty} \omega(t, [y]_0, \langle y \rangle, u_0, u_1) \cdot dt$ будем называть задачей об оптимальном управлении. Данную задачу сформулируем так:

Задача №2(об оптимальном управлении производственной системой):

Пусть выбран критерий качества производственного процесса в виде интеграла $I = \int\limits_{t_0}^{\infty} \omega(t, [y]_0, \langle y \rangle, u_0, u_1) \cdot dt$. Требуется найти такие управляющие воздействия $u_0(t, [y]_0, \langle y \rangle)$, $u_1(t, [y]_0, \langle y \rangle)$, которые обеспечат асимптотическую устойчивость планового (невозмущенного) состояния производственной системы в силу уравнений в малых возмущениях

$$\frac{\partial [y]_0}{\partial t} + [\chi]_0^* \cdot \frac{\partial \langle y \rangle}{\partial S} + \frac{\partial [\chi]_0^*}{\partial S} \cdot \langle y \rangle + \frac{\partial [y]_0}{\partial S} \cdot \langle \mu \rangle^* + [y]_0 \cdot \frac{\partial \langle \mu \rangle^*}{\partial S} = u_0;$$

$$\frac{\partial \langle y \rangle}{\partial t} + \langle \mu \rangle^* \cdot \frac{\partial \langle y \rangle}{\partial S} + \langle y \rangle \cdot \frac{\partial \langle \mu \rangle^*}{\partial S} = a_1 \cdot [y]_0 + a_2 \cdot \langle y \rangle + b_1 \cdot [y]_0 + b_2 \cdot \langle y \rangle + u_1$$

При этом, какие бы то ни были другие управляющие воздействия, $u_0^*(t, [y]_0, \langle y \rangle)$, $u_1^*(t, [y]_0, \langle y \rangle)$, решающие задачу №1, должно выполняться неравенство

$$I = \int\limits_{t_0}^{\infty} \omega(t, [y]_0^0, \langle y \rangle^0, u_0^0, u_1^0) \cdot dt \le \int\limits_{t_0}^{\infty} \omega(t, [y]_0^*, \langle y \rangle^*, u_0^*, u_1^*) \cdot dt$$

для всех начальных условий в области существования решений уравнения в малых возмущениях. Функции $u_0^0(t,[y]_0,\langle y\rangle)$, $u_1^0(t,[y]_0,\langle y\rangle)$, разрешающие задачу №2 будем называть оптимальным управлением.

Задача №2 об оптимальном управлении производственным процессом предъявляет к функциям $u_0^0(t,[y]_0,\langle y\rangle)$, $u_1^0(t,[y]_0,\langle y\rangle)$ больше требований, чем задача №1 к разрешающим ее функциям, $u_0^*(t,[y]_0,\langle y\rangle)$, $u_1^*(t,[y]_0,\langle y\rangle)$. Однако исследование и решение задачи №2 облегчается тем обстоятельством, что эта проблема, как правило, имеет единственное решение [8]. Напротив, набор функций $u_0(t,[y]_0,\langle y\rangle)$, $u_1(t,[y]_0,\langle y\rangle)$, решающих задачу №1 обычно содержит большой произвол. По этой причине часто оказывается целесообразным такой путь решения задачи №1. Для исключения произвола в выборе функций $u_0(t,[y]_0,\langle y\rangle)$, $u_1(t,[y]_0,\langle y\rangle)$ вводят в условие этой задачи вспомогательное условие минимума некоторого интеграла качества $I=\int_{t_0}^{\infty}\omega(t,[y]_0,\langle y\rangle,u_0,u_1)\cdot dt$, хотя может быть исходная постановка задачи никаких явных условий оптимальности не содержит. Тем самым задача №1 превращается во вспомогательную задачу №2. При этом функция $\omega(t,[y]_0,\langle y\rangle,u_0,u_1)$ должна выбираться так, чтобы решение вспомогательной задачи №2 было возможно проще. Далее рассмотрим исследования задач №1 и №2 для производственного процесса методами, опирающимися на основные идеи классической теории устойчивости.

2.4.1.4.3. Использование второго метода Ляпунова для задачи оперативного управления процессов массового производства машиностроительного предприятия

Решение задачи об управлении для уравнений первого приближения.

Для задач №1 и №2 об управлении процессами массового производства, как и для общей задачи устойчивости, может быть развита теория исследования этих задач по первому приближению [9]. Здесь можно указать случаи, когда решение проблемы определяется первым приближением, а также критические случаи, когда возможность разрешения проблемы и сами искомые воздействия $u_0(t,[y]_0,\langle y\rangle)$, $u_1(t,[y]_0,\langle y\rangle)$ определяются членами высшего порядка малости в уравнениях для межоперационных заделов и для такта производственного процесса:

$$\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t}+\frac{\partial([\chi]_0\cdot\langle\mu\rangle)}{\partial S}=v_0(t,S);$$

$$\frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial t}+\langle\mu\rangle\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial S}=-\frac{1}{[\chi]_0}\cdot\frac{\partial P(t,S)}{\partial S}+f+v_1(t,S)$$

описывающими процесс управления межоперационными заделами и тактом производственного процесса.

Ниже мы рассмотрим задачу №1 для нелинейной системы уравнений, описывающих процесс управления межоперационными заделами и тактом производственного процесса исходя из ее линейного приближения. Имеются работы [10], в которых можно найти более подробное изложение теории управления процессами по первому приближению.

Запишем линеаризованное по малым возмущениям $[y]_0$, $\langle y\rangle$ уравнение возмущенного движения при наличии управляющих воздействий:

$$\frac{\partial[y]_0}{\partial t}+[\chi]_0^*\cdot\frac{\partial\langle y\rangle}{\partial S}+\frac{\partial[\chi]_0^*}{\partial S}\cdot\langle y\rangle+\frac{\partial[y]_0}{\partial S}\cdot\langle\mu\rangle^*+[y]_0\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S}=q_{00}\cdot u_0+$$

$$q_{01}\cdot u_1+$$

$$R_0(t,[y]_0,\langle y\rangle,u_0,u_1);$$

$$\frac{\partial\langle y\rangle}{\partial t}+\langle\mu\rangle^*\cdot\frac{\partial\langle y\rangle}{\partial S}+\langle y\rangle\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S}=a_1\cdot[y]_0+a_2\cdot\langle y\rangle+b_1\cdot[y]_0+b_2\cdot\langle y\rangle+$$

$$q_{10}\cdot u_0+q_{11}\cdot u_1+R_1(t,[y]_0,\langle y\rangle,u_0,u_1)$$

Здесь $[\chi]_0^*$, $\frac{\partial[\chi]_0^*}{\partial S},\langle\mu\rangle^*,\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S}$, $q_{00},q_{01},q_{10},q_{11}$ - ограниченные и непрерывные функции времени; $R_0(t,[y]_0,\langle y\rangle,u_0,u_1)$, $R_1(t,[y]_0,\langle y\rangle,u_0,u_1)$ - функции, разлагающиеся в области $t\geq 0$, $\left|[y]_0\right|<H_0$, $\left|\langle y\rangle\right|<H_1$ в ряд по переменным

$$[y]_0=[\chi]_0-[\chi]_0^*;\qquad \langle y\rangle=\langle\mu\rangle-\langle\mu\rangle^*;$$

$$u_0=v_0(t,S)-v_0^*(t,S);\qquad u_1=v_1(t,S)-v_1^*(t,S)$$

с ограниченными коэффициентами, причем разложения начинаются членами не ниже второго порядка малости (члены первого порядка малости учтены в явном виде в правых частях уравнений). H_0,H_1- наперед заданные сколь угодно малые величины.

Переходим теперь к исследованию задачи об управлении производственным процессом для уравнений первого приближения:

$$\frac{\partial [y]_0}{\partial t}+[\chi]_0^* \cdot \frac{\partial \langle y\rangle}{\partial S}+\frac{\partial [\chi]_0^*}{\partial S}\cdot\langle y\rangle+\frac{\partial [y]_0}{\partial S}\cdot\langle \mu\rangle^*+[y]_0\cdot\frac{\partial \langle \mu\rangle^*}{\partial S}=q_{00}\cdot u_0+q_{01}\cdot u_1;$$

$$\frac{\partial \langle y\rangle}{\partial t}+\langle \mu\rangle^* \cdot \frac{\partial \langle y\rangle}{\partial S}+\langle y\rangle\cdot\frac{\partial \langle \mu\rangle^*}{\partial S}=a_1\cdot[y]_0+a_2\cdot\langle y\rangle+b_1\cdot[y]_0+b_2\cdot\langle y\rangle+q_{10}\cdot u_0++q_{11}\cdot u_1.$$

В качестве критерия качества выберем интеграл:

$$I=\int_{t_0}^{\infty}\left[\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}\cdot x_i\cdot x_j+\sum_{i,j=0}^{m}\beta_{ij}\cdot u_i\cdot u_j\right]\cdot dt$$

$$\omega=\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}\cdot x_i\cdot x_j+\sum_{i,j=0}^{m}\beta_{ij}\cdot u_i\cdot u_j; \qquad x_1=[y]_0;\ x_2=\langle y\rangle,$$

где

n- количество линейно-независимых возмущений макропараметров производственной системы;

m – количество управляющих воздействий на возмущения макропараметров производственной системы , где квадратичные формы $\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}\cdot x_i\cdot x_j$ и $\sum_{i,j=0}^{m}\beta_{ij}\cdot u_i\cdot u_j$ предполагаются определенно положительными.

Оптимальную функцию Ляпунова $V^0(t,[y]_0,\langle y\rangle)$ будем искать в виде квадратичной формы:

$$V^0(t,[y]_0,\langle y\rangle)=c_{11}(t)\cdot[y]_0^2+c_{12}(t)\cdot[y]_0\cdot\langle y\rangle+c_{22}(t)\cdot\langle y\rangle^2$$

Составим выражение $B[V^0,t,[y]_0\langle y\rangle,u_0,u_1]$:

$$B[V^0,t,[y]_0\langle y\rangle,u_0,u_1]=\frac{\partial V^0}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V^0}{\partial x_i}\cdot\frac{dx_i}{dt}+\omega$$

где $\omega=\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}\cdot x_i\cdot x_j+\sum_{i,j=0}^{m}\beta_{ij}\cdot u_i\cdot u_j$.

При $u_0 = u^0_0(t,[y]_0,\langle y\rangle)$, $u_1 = u^0_1(t,[y]_0,\langle y\rangle)$ величина $B[V^0,t,[y]_0\langle y\rangle,u_0,u_1]$ должна иметь минимум и обращаться при этом в ноль. Отсюда первое уравнение для нахождения оптимальной функции Ляпунова $V^0(t,[y]_0,\langle y\rangle)$ и оптимальных управляющих воздействий: $u_0 = u^0_0(t,[y]_0,\langle y\rangle)$, $u_1 = u^0_1(t,[y]_0,\langle y\rangle)$:

$$B[V^0,t,[y]_0\langle y\rangle,u_0,u_1] = \frac{\partial V^0}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V^0}{\partial x_i}\cdot\frac{dx_i}{dt} +$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}\cdot x_i\cdot x_j + \sum_{i,j=0}^{m}\beta_{ij}\cdot u_i\cdot u_j = 0.$$

Дифференцируя $B[V^0,t,[y]_0\langle y\rangle,u_0,u_1]$ по u_i и приравнивая результаты нулю, получим еще уравнения для определения оптимальной функции Ляпунова $V^0(t,[y]_0,\langle y\rangle)$ и оптимальных управляющих воздействий: $u_0 = u^0_0(t,[y]_0,\langle y\rangle)$, $u_1 = u^0_1(t,[y]_0,\langle y\rangle)$:

$$\frac{\partial B[V^0,t,[y]_0\langle y\rangle,u^0_0,u^0_1]}{\partial u^0_j} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V^0}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\left[\frac{dx_i}{dt}\right]}{\partial u^0_j} + 2\cdot\sum_{i=0}^{m}\beta_{ij}\cdot u^0_i = 0;$$

$i = 0;1.$

Последние уравнения можно разрешить относительно u^0_0, u^0_1, так как вследствие определенно-положительности формы $\sum_{i,j=0}^{m}\beta_{ij}\cdot u_i\cdot u_j$ детерминант этой системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix}\beta_{00} & \beta_{01}\\ \beta_{10} & \beta_{11}\end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Разрешим последние уравнения относительно u_0^0, u_1^0:

$$u_j^0 = -\frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta_{kj}}{\Delta} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V^0}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \left[\frac{dx_i}{dt} \right]}{\partial u_j^0}.$$

Здесь Δ_{kj} - алгебраическое дополнение элемента k-ой строки и j-ой колонки.

Внося полученные значения u_0^0, u_1^0 в равенство $B[V^0, t, [y]_0 \langle y \rangle, u_0, u_1] = 0$,. получим уравнение для определения оптимальной функции Ляпунова $V^0(t, [y]_0, \langle y \rangle)$:

$$\sum_{i,j}^{n} \frac{dc_{ij}}{dt} \cdot x_i \cdot x_j + \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_j \cdot \frac{dx_i}{dt} + \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + \sum_{i,j=0}^{m} \beta_{ij} \cdot u_i \cdot u_j = 0,$$

где $$\frac{\partial V^0}{\partial t} = \sum_{i,j}^{n} \frac{dc_{ij}}{dt} \cdot x_i \cdot x_j ;$$

$$\frac{\partial V^0}{\partial x_i} = 2 \cdot \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_j .$$

Приравнивая коэффициенты при произведениях $x_i \cdot x_j$ линейно независимых величин x_i, x_j к нулю, получим уравнения для определения величин $c_{ij}(t)$.

Если удастся найти ограниченное частное решение уравнения для определения $c_{ij}(t)$, такое, что форма $V^0(t, [y]_0, \langle y \rangle) = c_{11} \cdot [y]_0^2 + c_{12} \cdot [y]_0 \cdot \langle y \rangle + c_{22} \cdot \langle y \rangle^2$ окажется определенно положительной, то задача об оптимальном управлении будет решена.

Рассмотрим сначала случай установившегося движения, когда $[\chi]_0^*$, $\frac{\partial[\chi]_0^*}{\partial S}$, $\langle\mu\rangle^*$, $\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S}$, $q_{00}, q_{01}, q_{10}, q_{11}$, α_{ij}, β_{ij} не зависят от времени.

Оптимальная функция Ляпунова ищется в виде:

$$V^0(t,[y]_0,\langle y\rangle) = c_{11}\cdot[y]_0^2 + c_{12}\cdot[y]_0\cdot\langle y\rangle + c_{22}\cdot\langle y\rangle^2$$

с постоянными коэффициентами $c_{ij} = const$.

Управляющие воздействия имеют при этом вид:

$$u_0 = u_0^0([y]_0,\langle y\rangle) = \upsilon_1^0\cdot x_1 + \upsilon_2^0\cdot x_2,$$

$u_1 = u_1^0([y]_0,\langle y\rangle) = \upsilon_1^1\cdot x_1 + \upsilon_2^1\cdot x_2$, где $\upsilon_1^0, \upsilon_2^0$, $\upsilon_1^1, \upsilon_2^2$ - постоянные.

Рассмотрим матрицу

$$W = \{Q, Q\cdot P\},$$

где Q - матрица $\{q_{ij}\}$, P - матрица $\{p_{ij}\}$ для уравнения s-ой гармоники

$$\frac{d\alpha_{s1}}{dt} + \frac{\partial[\chi]_0^*}{\partial S}\cdot\alpha_{s2} + \frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S}\cdot\alpha_{s1} = 0;$$

$$\frac{d\alpha_{s2}}{dt} + \alpha_{s02}\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S} = a_1\cdot\alpha_{s1} + a_2\cdot\alpha_{s02} + b_1\cdot\alpha_{s1} + b_2\cdot\alpha_{s2},$$

представленного в каноническом виде

$$\frac{d\alpha_{s1}}{dt} = p_{11}\cdot\alpha_{s1} + p_{12}\cdot\alpha_{s2} + q_{s00}\cdot u_{s0} + q_{s01}\cdot u_{s1}$$

$$\frac{d\alpha_{s2}}{dt} = p_{21}\cdot\alpha_{s1} + p_{22}\cdot\alpha_{s2} + q_{s10}\cdot u_{s0} + q_{s11}\cdot u_{s1}$$

Достаточные условия разрешимости задачи об определенно-положительности формы

$$V^0(t,[y]_0,\langle y\rangle)=c_{11}\cdot[y]_0^2+c_{12}\cdot[y]_0\cdot\langle y\rangle+c_{22}\cdot\langle y\rangle^2$$

определяются рангом матрицы $W=\{Q,Q\cdot P\}$.

Если матрица $W=\{Q,Q\cdot P\}$ имеет ранг, равный n, где n- количество линейно независимых слагаемых малых возмущений в управляющем воздействии

$$u_j=\sum_{i=1}^{n}\upsilon_i^j\cdot x_i, \qquad n=2$$

то задача об оптимальном управлении производственным процессом имеет единственное решение при условии минимума интеграла качества

$$I=\int_{t_0}^{\infty}\left[\sum_{i,j=1}^{k}\alpha_{ij}\cdot x_i\cdot x_j+\sum_{i,j=0}^{m}\beta_{ij}\cdot u_i\cdot u_j\right]\cdot dt,$$

управляющие воздействия $u_j=u_j^0([y]_0,\langle y\rangle)=\upsilon_1^j\cdot[y]_0+\upsilon_2^j\cdot\langle y\rangle$

определяются оптимальной функцией Ляпунова

$$V^0(t,[y]_0,\langle y\rangle)=c_{11}\cdot[y]_0^2+c_{12}\cdot[y]_0\cdot\langle y\rangle+c_{22}\cdot\langle y\rangle^2$$

в соответствии с равенством

$$u_j^0=-\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{\Delta_{kj}}{\Delta}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V^0}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\left[\frac{dx_i}{dt}\right]}{\partial u_j^0}.$$

В частности, если система управляется одним управляющим воздействием $u=u_1$,то матрица Q(матрица $\{q_{ij}\}$) при $n=2$

превращается в столбец $Q=\begin{bmatrix}q_{00}\\ q_{10}\end{bmatrix}$.

2.4.2.Модель стратегического планирования и управления в массовом производстве для машиностроения

2.4.2.1.Особенности стратегического (технико-экономического) планирования и управления в массовом производстве. Постановка задачи стратегического (технико-экономического) планирования и управления в массовом производстве

Концентрация производства, усложнение его структуры, высокие темпы развития в условиях научно-технического прогресса предопределяют все возрастающую роль стратегического (технико-экономического) планирования. Проблемы специализации предприятий и объединений, их технического обновления, совершенствования производственной структуры не могут быть решены за несколько лет, они требуют длительной технической и организационной подготовки. Поэтому для каждого предприятия нужна научно обоснованная долгосрочная перспектива, рассчитанная на 10-15 лет.

Стратегические (технико-экономические) планы определяют стратегические задачи на длительную перспективу, решая коренные проблемы развития предприятия. Разработка стратегического (технико-экономического) плана обычно осуществляется путем вариантных расчетов. В основе вариантности обычно принимают как варианты целей, так и пути их достижения.

Одной из важных проблем планирования в современных условиях является нахождение оптимальных органических взаимосвязей в системе стратегического (технико-экономического) плана. Стратегические (технико-экономические) планы не являются чем-то неизменным. Они корректируются, уточняются в готовых планах с учетом развития экономики, изменений в ресурсах и потребностях рынка посредством стратегического (технико-экономического) управления.

При разработке стратегического (технико-экономического) плана решается обширный класс задач, определяющих основные направления его развития в техническом, организационно-экономическом и социальном отношениях на основе интенсификации производства, скорейшего внедрения в производство достижений науки, техники и организации труда.

Как правило, стратегический (технико-экономический) план имеет следующие разделы:

- Производство и реализация продукции;
- Техническое развитие и организация производства;
- Повышение экономической эффективности производства;
- Нормы и нормативы;
- Капитальное строительство;
- Потребность в основных материальных ресурсах;
- Труд и кадры;
- Себестоимость, прибыль и рентабельность производства;
- Фонды экономического стимулирования;
- Финансовый план;
- социальное развитие коллектива.

Важнейшие показатели стратегического (технико-экономического) планирования и управления предприятия представлены в таблице 2.5.

Повышение научного уровня разработки стратегических (технико-экономических) планов, их технико-экономического и расчетного обоснования в значительной мере способствует использование математических методов, математического моделирования поставленных задач. Такой подход позволяет найти и отобрать из множества возможных значений переменных такие, которые являются наилучшими с точки зрения какого-нибудь критерия производства, и одновременно строго отвечают или соответствуют заданным условиям. При разработке, в частности, стратегических (технико-экономических) планов пользуются системой показателей, практически любой из которых может быть принят в качестве критерия. Поэтому в процессе создания стратегических (технико-экономических) планов следует решать ряд задач на оптимум, каждая из которых отвечает какому-нибудь из выбранных критериев и соответствует заданным ограничениям. Объектом оптимизации является, прежде всего, производственная программа, представляющая собой важный раздел стратегического (технико-экономического) плана. Критерий оптимальности выпуска продукции может быть различным, например: максимальный объем продукции, максимальная прибыль, наиболее полное использование производственной мощности.

В целях стратегического (технико-экономического) управления общий план разбивается по временным участкам (например, по годам). В дальнейшем задания плана конкретизируются и уточняются посредством стратегического (технико-экономического) управления. С этой позиции стратегический (технико-экономический) план приобретает характер инструмента оперативного управления производством в целях обеспечения конкретных запросов рынка и выявления дополнительных резервов производства.

Таблица 2.5

Важнейшие показатели стратегического (технико-экономического) планирования и управления предприятия

№	Группа показателей стратегического (технико-экономи-ческого) планирования и управления предприятия	Последовательность разработки и состав показателей группы	Показатели группы для стратегического (технико-экономического) планирования и управления предприятия
	1	2	3
1	непосред-ственно опреде-ляющие стратегическое (технико-экономическое) планирование и управление производством ;	На основе потребности в продукции предприятия и накопленных данных о возможных и необходимых изменениях ее номенклатуры намечается, какую продукцию следует снять с производства, какая должна быть подвергнута модернизации с доведением ее до уровня современных требований эксплуатации, устанавливается перечень новой продукции, которую надо производить и, наконец, определяются виды продукции, производство которых можно продолжать без всяких изменений их конструкций; затем на основе данных изучения спроса и технико-экономического анализа устанавливается динамика и уровень объема производства во временном интервале в стоимостном выражении; с учетом результатов проведенных расчетов намечается ассортимент продукции и объем ее выпуска; затем производится укрупненный расчет производственной мощности и определяется ее соответствие намеченному объему производства и ассортименту продукции; в случае необходимости намечается размер необходимых капитальных вложений и их возможные источники	• номенклатура и ассортимент выпускаемой продукции • объем производства • производст-венные мощ-ности • капитальные вложения

	1	2	3
2.	определяющие затраты материальных и трудовых ресурсов, себестоимость продукции и прибыль	На основе технико-экономических нормативов, данных экономического анализа и отчетных данных, а также предполагаемых возможных изменений технологии производства намечается проектируемое снижение трудовых и материальных ресурсов; на основе этого определяется необходимая численность работающих и фонд оплаты труда персонала; с учетом данных расчетов проектируется себестоимость продукции и прибыль	• относительное снижение затрат материальных ресурсов • снижение удельных затрат рабочего времени или рост производительности труда • общий фонд оплаты труду персонала • себестоимость продукции • прибыль • рентабельность
3	определяющие на основе соответствующих нормативов величину фондов экономического стимулирования, распределение прибыли и взаимоотношения с бюджетом;	Рассчитываются проектируемые размеры той части взаимоотношений с бюджетом, которую составляют обязательные первоначальные платежи, осуществляемые из прибыли: плата за фонды, проценты за банковские кредиты, и т.д.; затем разрабатываются нормативы длительного действия отчислений в фонды экономического стимулирования; на основе разработанных нормативов рассчитывается абсолютный размер этих фондов и определяется свободный остаток прибыли; с учетов выполненных указанных выше расчетов и других расчетов окончательно устанавливаются все взаимоотношения с бюджетом.	• Размер первоочередных платежей • Норматив отчислений в фонд экономического стимулирования • Распределени е прибыли • Взаимоотношение с бюджетом

2.4.2.2. Пример использования математического аппарата функции распределения базовых продуктов по скоростям затрат для модели стратегического планирования и управления в массовом производстве на основе первой группы показателей стратегического (технико-экономического) планирования и управления предприятием

Рассмотрим задачу стратегического планирования и управления в массовом производстве. Для упрощения при построении модели стратегического планирования и управления будем использовать первую группу показателей стратегического (технико-экономического) планирования и управления предприятием:

- номенклатура и ассортимент выпускаемой продукции
- объем производства
- производственные мощности
- капитальные вложения

Будем рассматривать массовое производство изделий одной номенклатуры. Пусть задан объем производства в виде функции времени: $\Theta = \Theta(t)$, которая диктуется прогнозом потребления продукции предприятия на рынке. Требуется получить баланс между объемом производства, производственной мощностью и капитальными вложениями для условий устойчивой работы производства при оптимальном использовании ресурсов. На основе баланса произвести расчет календарно-плановых нормативов массового производства.

Уравнение относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\chi(t,S,\mu)$ в фазовом пространстве (S,μ) для момента времени t представляет собой интегро-дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial\chi}{\partial t}+\frac{\partial\chi}{\partial S}\cdot\mu+\frac{\partial\chi}{\partial\mu}\cdot f=$$

$$=\lambda_{оборуд}\cdot\int_0^\infty\left[\psi[\tilde{\mu}\to\mu]\cdot\tilde{\mu}\cdot\chi(t,S,\tilde{\mu})-\psi[\mu\to\tilde{\mu}]\cdot\mu\cdot\chi(t,S,\mu)\right]\cdot d\tilde{\mu};$$

$$\chi(t,S,\mu)\big|_{t=0}=\chi(0,S,\mu);\quad \chi(t,S,\mu)\big|_{S=0}=\chi(t,0,\mu);$$

$$\chi(t,S,\mu)\big|_{\mu\to\infty}\to 0;$$

$$\int_0^\infty dS\cdot[\chi]_0=N_1;\qquad \left.\int_0^{T_{план}}dt\cdot[\chi]_1\right|_{S=Sd}=\Theta(t),$$

где

- функция $\psi[\mu\to\tilde{\mu}]$ является заданной и определяется параметрами технологического процесса, представляет собой функцию перехода, описывающую процесс воздействия оборудования на базовый продукт;
- инженерно-производственная функция $f(t,S)$ - действующая на базовый продукт внешняя сила, характеризующаяся установленными на предприятии технологическими процессами изготовления конкретно взятой продукции, производственным планом, трудовыми ресурсами, наличием количества и состояния

оборудования, называемая производственной функцией предприятия.

Будем рассматривать работу предприятия в режиме, близком к установившемуся. Тогда первый момент функции распределения базовых элементов, характеризующий величину такта r, определяется заданной программой выпуска и может быть представлен в виде:

$$[\chi]_1(t)=\frac{d\Theta(t)}{dt},\ r=\frac{1}{[\chi]_1(t)}\left[\frac{час}{штук}\right],$$

а само уравнение для функции распределения базовых элементов:

$$\frac{\partial\chi}{\partial t}+\frac{\partial\chi}{\partial S}\cdot\mu+\frac{\partial\chi}{\partial\mu}\cdot f=0.$$

Зная среднюю скорость отнесения затрат на базовый продукт в ходе его движения вдоль технологической цепочки производственного процесса: $\langle\mu\rangle=\dfrac{[\chi]_1}{[\chi]_0}$,

можно записать равновесную функцию распределения базовых элементов:

$$\chi(t,S,\mu)=A\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{\sigma(t,S)}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(\mu-\langle\mu\rangle(t,S))^2}{\sigma^2(t,S)}},$$

для вычисления моментов функции распределения.

Среднюю скорость отнесения затрат на базовый продукт в ходе производственно-технологического процесса $\langle\mu\rangle$ получим из уравнения непрерывности потока базовых продуктов вдоль технологической цепочки:

$$\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t}+\frac{\partial([\chi]_0\cdot\langle\mu\rangle)}{\partial S}=\Delta(t,S), \quad \Delta(t,S)\to 0,$$

и уравнения движения базовых продуктов вдоль технологической цепочки

$$\frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial t}+\langle\mu\rangle\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial S}=-\frac{1}{[\chi]_0}\cdot\frac{\partial P(t,S)}{\partial S}+f+\frac{1}{[\chi]_0}\cdot\Gamma(t,S), \qquad \Gamma(t,S)\to 0$$

Для равновесного случая, принимая во внимание медленность изменения во времени макроскопических параметров и малость величин $\Delta(t,S)\to 0$, $\Gamma(t,S)\to 0$, вышеописанная система уравнений в нулевом приближении примет вид

$$\frac{\partial([\chi]_0\cdot\langle\mu\rangle)}{\partial S}=0,$$

$$\langle\mu\rangle\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial S}=-\frac{1}{[\chi]_0}\cdot\frac{\partial P(t,S)}{\partial S}+f.$$

Оценим порядок величины $-\frac{1}{[\chi]_0}\cdot\frac{\partial P(t,S)}{\partial S}$.

По определению

$$\int_0^\infty d\mu\cdot[\mu-\langle\mu\rangle]^2\cdot\chi(t,S,\mu)=P(t,S)=\sigma^2(t,S)\cdot[\chi]_0.$$

Обычно из условия производственного процесса, принимая во внимание простои и поломки оборудования, среднее отклонение величины μ от своего среднего значения составляет 20-30%. Последнее используется в качестве коэффициента при расчете требуемого оборудования для выполнения производственной программы.

Отсюда можно получить в первом приближении

$$P(t,S) \approx \int_0^{\infty} d\mu \cdot [\mu - \langle\mu\rangle]^2 \cdot \chi(t,S,\mu) = \int_0^{\infty} d\mu \cdot [0{,}3 \cdot \langle\mu\rangle]^2 \cdot \chi(t,S,\mu) =$$

$$= 0{,}09 \cdot \langle\mu\rangle^2 \cdot [\chi]_0 .$$

Подставляя в систему уравнений:

$$\frac{\partial\left\{0{,}09 \cdot \langle\mu\rangle^2 \cdot [\chi]_0\right\}}{\partial S} = 0{,}09 \cdot \frac{\partial\{\langle\mu\rangle \cdot [\chi]_1\}}{\partial S} = 0{,}09 \cdot \langle\mu\rangle \cdot \frac{\partial\{[\chi]_1\}}{\partial S} +$$

$$0{,}09 \cdot \frac{\partial\{\langle\mu\rangle\}}{\partial S} \cdot [\chi]_1 =$$

$$= \left| из\_условия: \ \frac{\partial([\chi]_0 \cdot \langle\mu\rangle)}{\partial S} = 0 \ \right| = 0{,}09 \cdot \frac{\partial\{\langle\mu\rangle\}}{\partial S} \cdot [\chi]_1 ,$$

имеем

$$[\chi]_0 \cdot \langle\mu\rangle = \frac{d\Theta(t)}{dt},$$

$$\langle\mu\rangle \cdot \frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial S} \approx -0{,}09 \cdot \frac{\partial\{\langle\mu\rangle\}}{\partial S} \cdot \langle\mu\rangle + f .$$

Перенесем слагаемое

$$-0{,}09 \cdot \frac{\partial\{\langle\mu\rangle\}}{\partial S} \cdot \langle\mu\rangle$$

второго уравнения в правую часть:

$$\langle\mu\rangle \cdot \frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial S} + 0{,}09 \cdot \frac{\partial\{\langle\mu\rangle\}}{\partial S} \cdot \langle\mu\rangle \approx \langle\mu\rangle \cdot (1 + 0{,}09) \cdot \frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial S} \approx f$$

или

$$(1 + 0{,}09) \cdot \langle\mu\rangle \cdot \frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial S} \approx f \qquad \Rightarrow \qquad k \cdot \langle\mu\rangle \cdot \frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial S} \approx f$$

зведен поправочный коэффициент k, учитывающий дисперсию гы производственного процесса. Принимая это во внимание, ема уравнений принимает вид

$$[\chi]_0 \cdot \langle\mu\rangle = \frac{d\Theta(t)}{dt},$$

$$k \cdot \langle\mu\rangle \cdot \frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial S} \approx f$$

или

$$k \cdot \frac{\langle\mu\rangle^2}{2} + W = const = k \cdot \frac{\langle\mu\rangle^2(0)}{2} + W(0) = const,$$

$$W(S) = -\int_0^S f(S^*) \cdot dS^*, \quad \langle\mu\rangle = \frac{2}{k} \cdot \sqrt{const - W(S)}$$

$$[\chi]_0 = \frac{d\Theta(t)}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{2}{k} \cdot \sqrt{const - W(S)}}.$$

Последнее дало нам связь макроскопических параметров массового производства:

величины такта r, межоперационых заделов $[\chi]_0$ и технологии производства, определяемой инженерно-производственной функцией:

$$[\chi]_1(t) = \frac{d\Theta(t)}{dt}, \; r = \frac{1}{[\chi]_1(t)}\left[\frac{час}{штук}\right],$$

$$[\chi]_0 = \frac{d\Theta(t)}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{2}{k} \cdot \sqrt{const - W(S)}},$$

$$W(S) = -\int_0^S f(S^*) \cdot dS^*.$$

Система 2-х уравнений имеет три неизвестные величины: такт τ, межоперационые заделы $[\chi]_0$ и технологию производства, определяемую инженерно-производственной функцией $W(S) = -\int\limits_0^S f(S^*)\cdot dS^*$. Данную систему уравнений следует дополнить третьим уравнением, исходя из выбора критерия оптимизации рассчитываемого производственного процесса. Полученные выражения будем называть стационарными равновесными параметрами производственного процесса.

Величина межоперационных заделов определяется условием нормировки, накладывающим ограничение на выбор инженерно-производственной функции:

$$\int\limits_0^\infty dS\cdot[\chi]_0 = N_1,$$

где N_1 - общее количество базовых продуктов, находящихся в производственном процессе.

Проделав расчет стационарных равновесных параметров производственного процесса, перейдем к исследованию устойчивости стационарных равновесных параметров производственного процесса и задачи управлении производственным процессом. Последнее дает нам представление, насколько устойчива наша производственная система, к чему приводят возмущения стационарных равновесных параметров производственного процесса и какие необходимы управляющие воздействия для стабилизации системы. Может сложиться ситуация, что полученные оптимальные параметры соответствуют неустойчивой работе системы.

Разложим макровеличины в окрестности невозмущенного положения:

$$[\chi]_0 = [\chi]_0^* + [y]_0; \qquad \langle\mu\rangle = \langle\mu\rangle^* + \langle y\rangle.$$

Линеаризуем систему уравнений

$$\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t} + \frac{\partial([\chi]_0 \cdot \langle\mu\rangle)}{\partial S} = 0;$$

$$\frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial t} + \langle\mu\rangle \cdot \frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial S} = f$$

в окрестности невозмущенного движения (“планового движения”) макропараметров системы, подставив

$$[\chi]_0 = [\chi]_0^* + [y]_0; \qquad \langle\mu\rangle = \langle\mu\rangle^* + \langle y\rangle$$

и разложив функцию f в окрестности планового движения макропараметров $[\chi]_0$ и $\langle\mu\rangle$:

$$f = f^* + b_1 \cdot [y]_0 + b_2 \cdot \langle y\rangle + \Delta(0^2),$$

где посредством $\Delta(0^2)$ обозначены члены более высокого порядка малости по возмущениям $[y]_0$ и $\langle y\rangle$.

Подставляя указанное выше в систему уравнений, получаем

$$\frac{\partial[\chi]_0^*}{\partial t} + \frac{\partial[y]_0}{\partial t} + \frac{\partial\left(\left\{[\chi]_0^* + [y]_0\right\} \cdot \left\{\langle\mu\rangle^* + \langle y\rangle\right\}\right)}{\partial S} = 0;$$

$$\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial t} + \frac{\partial\langle y\rangle}{\partial t} + \left\{\langle\mu\rangle^* + \langle y\rangle\right\} \cdot \frac{\partial\left\{\langle\mu\rangle^* + \langle y\rangle\right\}}{\partial S} = f^* + b_1 \cdot [y]_0 + b_2 \cdot \langle y\rangle + \Delta(0^2).$$

Для невозмущенного состояния производственной системы имеем:

$$\frac{\partial[\chi]_0^*}{\partial t}+\frac{\partial\left([\chi]_0^*\cdot\langle\mu\rangle^*\right)}{\partial S}=0;$$

$$\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial t}+\langle\mu\rangle^*\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S}=-\frac{1}{[\chi]_0}\cdot\left.\frac{\partial P(t,S)}{\partial S}\right|^*+f^*.$$

Используя уравнения невозмущенного состояния, получим систему уравнений состояния производственной системы для малых возмущений $[y]_0$, $\langle y\rangle$ макропараметров $[\chi]_0$ и $\langle\mu\rangle$:

$$\frac{\partial[y]_0}{\partial t}+[\chi]_0^*\cdot\frac{\partial\langle y\rangle}{\partial S}+\frac{\partial[\chi]_0^*}{\partial S}\cdot\langle y\rangle+\frac{\partial[y]_0}{\partial S}\cdot\langle\mu\rangle^*+[y]_0\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S}=0;$$

$$\frac{\partial\langle y\rangle}{\partial t}+\langle\mu\rangle^*\cdot\frac{\partial\langle y\rangle}{\partial S}+\langle y\rangle\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S}=b_1\cdot[y]_0+b_2\cdot\langle y\rangle.$$

Разложим малые возмущения $[y]_0$, $\langle y\rangle$ макропараметров $[\chi]_0$ и $\langle\mu\rangle$ в ряд Фурье:

$$[y]_0\approx\alpha_{01}(t)+\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{j1}(t)\cdot\sin\left[\frac{2\cdot\pi\cdot j}{S_d}\cdot S\right]+\sum_{j=1}^{\infty}\beta_{j1}(t)\cdot\cos\left[\frac{2\cdot\pi\cdot j}{S_d}\cdot S\right];$$

$$\langle y\rangle\approx\alpha_{02}(t)+\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{j2}(t)\cdot\sin\left[\frac{2\cdot\pi\cdot j}{S_d}\cdot S\right]+\sum_{j=1}^{\infty}\beta_{j2}(t)\cdot\cos\left[\frac{2\cdot\pi\cdot j}{S_d}\cdot S\right],$$

где α_{01}, α_{02}, α_{j1}, α_{j2}, β_{j1}, β_{j2} коэффициенты разложения в ряд Фурье малых возмущений $[y]_0$, $\langle y\rangle$ макропараметров $[\chi]_0$ и $\langle\mu\rangle$. Подставляя в систему уравнений состояния производственной системы для малых возмущений $[y]_0$, $\langle y\rangle$ макропараметров $[\chi]_0$ и $\langle\mu\rangle$ вместо малых возмущений их разложение в ряд Фурье, можно получить систему уравнения в малых возмущениях для каждой из гармоник. Например, для нулевой гармоники уравнения в малых возмущениях имеют вид:

$$\frac{d\alpha_{01}}{dt}+\frac{\partial[\chi]_0^*}{\partial S}\cdot\alpha_{02}+\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S}\cdot\alpha_{01}=0;$$

$$\frac{d\alpha_{02}}{dt}+\alpha_{02}\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S}=b_1\cdot\alpha_{01}+b_2\cdot\alpha_{02}.$$

Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} \left[-\lambda+\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S}\right] & \left[\frac{\partial[\chi]_0^*}{\partial S}\right] \\ [-b_1] & \left[-\lambda+\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S}-b_2\right] \end{vmatrix}=0;$$

$$\left[-\lambda+\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S}\right]\cdot\left[-\lambda+\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S}-b_2\right]-[-b_1]\cdot\left[\frac{\partial[\chi]_0^*}{\partial S}\right]=0 \qquad \text{или}$$

$$\lambda^2+\left[-2\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S}+b_2\right]\cdot\lambda+[-b_2]\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S}-[-b_1]\cdot\left[\frac{\partial[\chi]_0^*}{\partial S}\right]=0.$$

Решая это квадратное относительно λ уравнение, получаем

$$\lambda(S)=\frac{-\left[-2\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S}+b_2\right]\pm\sqrt{\left[-2\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S}+b_2\right]^2-4\cdot\left[[-b_2]\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S}-[-b_1]\cdot\left[\frac{\partial[\chi]_0^*}{\partial S}\right]\right]}}{2}.$$

Для стационарного случая

$$\frac{\partial[\chi]_0^*}{\partial t}=0; \qquad \frac{\partial\left([\chi]_0^*\cdot\langle\mu\rangle^*\right)}{\partial S}=0; \qquad \frac{\partial[\chi]_0^*}{\partial S}=-\frac{[\chi]_0^*}{\langle\mu\rangle}\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S};$$

$$[\chi]_0\cdot\langle\mu\rangle=\frac{d\Theta(t)}{dt},$$

$$k\cdot\langle\mu\rangle\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial S}=f,$$

$$[\chi]_1(t)=\frac{d\Theta(t)}{dt},\ r=\frac{1}{[\chi]_1(t)}\left[\frac{час}{штук}\right],$$

$$[\chi]_0=\frac{d\Theta(t)}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{2}{k}\cdot\sqrt{const-W(S)}},\ W(S)=-\int_0^S f(S^*)\cdot dS^*.$$

и получаем

$$\lambda(S)=\frac{2\cdot\frac{f}{\langle\mu\rangle^*}-b_2\pm\sqrt{\left[2\cdot\frac{f}{\langle\mu\rangle^*}\right]^2+[b_2]^2+4\cdot b_1\cdot\frac{[\chi]_0^*}{\langle\mu\rangle^*}\cdot\frac{f}{\langle\mu\rangle^*}}}{2}.$$

Если корни уравнения имеют отрицательную реальную часть, то производственный процесс устойчив относительно нулевой гармоники разложения возмущения.

Переходим теперь к исследованию задачи об управлении производственным процессом для уравнений первого приближения:

$$\frac{\partial[y]_0}{\partial t}+[\chi]_0^*\cdot\frac{\partial\langle y\rangle}{\partial S}+\frac{\partial[\chi]_0^*}{\partial S}\cdot\langle y\rangle+\frac{\partial[y]_0}{\partial S}\cdot\langle\mu\rangle^*+[y]_0\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S}=q_{00}\cdot u_0+q_{01}\cdot u_1;$$

$$\frac{\partial\langle y\rangle}{\partial t}+\langle\mu\rangle^*\cdot\frac{\partial\langle y\rangle}{\partial S}+\langle y\rangle\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S}=a_1\cdot[y]_0+a_2\cdot\langle y\rangle+b_1\cdot[y]_0+b_2\cdot\langle y\rangle+$$

$$q_{10}\cdot u_0++q_{11}\cdot u_1.$$

Критерием качества системы служит интеграл:

$$I=\int_{t_0}^{\infty}\left[\alpha_{11}\cdot[y]_0^2+\alpha_{12}\cdot[y]_0\cdot\langle y\rangle+\alpha_{21}\cdot[y]_0\cdot\langle y\rangle+\alpha_{22}\cdot\langle y\rangle^2+\sum_{i,j=0}^{m}\beta_{ij}\cdot u_i\cdot u_j\right]\cdot dt,$$

где квадратичные формы

$$\alpha_{11}\cdot[y]_0^2+\alpha_{12}\cdot[y]_0\cdot\langle y\rangle+\alpha_{21}\cdot[y]_0\cdot\langle y\rangle+\alpha_{22}\cdot\langle y\rangle^2 \quad \text{и} \quad \sum_{i,j=0}^{m}\beta_{ij}\cdot u_i\cdot u_j$$

предполагаются определенно положительными.

Оптимальную функции Ляпунова будем искать в виде:

$$V^0(t,[y]_0,\langle y\rangle) = c_{11}\cdot[y]_0^{\,2} + c_{12}\cdot[y]_0\cdot\langle y\rangle + c_{22}\cdot\langle y\rangle^2$$

с постоянными коэффициентами $c_{ij} = const$.

Управляющие воздействия имеют при этом вид:

$$u_0 = u_0^0([y]_0,\langle y\rangle) = \upsilon_1^0\cdot[y]_0 + \upsilon_2^0\cdot\langle y\rangle,$$

$$u_1 = u_1^0([y]_0,\langle y\rangle) = \upsilon_1^1\cdot[y]_0 + \upsilon_2^1\cdot\langle y\rangle,$$ где $\upsilon_1^0, \upsilon_2^0, \upsilon_1^1, \upsilon_2^2$ - постоянные.

Рассмотрим матрицу

$$W = \{Q, Q\cdot P\},$$

где Q - матрица $\begin{vmatrix} q_{s00} & q_{s01} \\ q_{s10} & q_{s11} \end{vmatrix}$,

P - матрица $\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix}$ для уравнения s-ой гармоники

$$\frac{d\alpha_{s1}}{dt} + \frac{\partial[\chi]_0^*}{\partial S}\cdot\alpha_{s2} + \frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S}\cdot\alpha_{s1} = 0;$$

$$\frac{d\alpha_{s2}}{dt} + \alpha_{s02}\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S} = a_1\cdot\alpha_{s1} + a_2\cdot\alpha_{s02} + b_1\cdot\alpha_{s1} + b_2\cdot\alpha_{s2},$$

представленного в каноническом виде

$$\frac{d\alpha_{s1}}{dt} = p_{11}\cdot\alpha_{s1} + p_{12}\cdot\alpha_{s2} + q_{s00}\cdot u_{s0} + q_{s01}\cdot u_{s1}$$

$$\frac{d\alpha_{s2}}{dt} = p_{21}\cdot\alpha_{s1} + p_{22}\cdot\alpha_{s2} + q_{s10}\cdot u_{s0} + q_{s11}\cdot u_{s1}$$

Достаточные условия разрешимости задачи об определенно-положительности формы

$$V^0(t,[y]_0,\langle y\rangle) = c_{11}\cdot[y]_0^{\,2} + c_{12}\cdot[y]_0\cdot\langle y\rangle + c_{22}\cdot\langle y\rangle^2$$

определяются рангом матрицы $W = \{Q, Q \cdot P\}$.

Если матрица $W = \{Q, Q \cdot P\}$ имеет ранг, равный 2 (двум), то задача об оптимальном управлении производственным процессом имеет единственное решение при условии минимума интеграла качества

$$I = \int_{t_0}^{\infty}\left[\alpha_{11} \cdot [y]_0^2 + \alpha_{12} \cdot [y]_0 \cdot \langle y \rangle + \alpha_{21} \cdot [y]_0 \cdot \langle y \rangle + \alpha_{22} \cdot \langle y \rangle^2 + \sum_{i,j=0}^{m} \beta_{ij} \cdot u_i \cdot u_j\right] \cdot dt,$$

управляющие воздействия

$$u_0 = u_0^0([y]_0, \langle y \rangle) = \upsilon_1^0 \cdot [y]_0 + \upsilon_2^0 \cdot \langle y \rangle,$$

$$u_1 = u_1^0([y]_0, \langle y \rangle) = \upsilon_1^1 \cdot [y]_0 + \upsilon_2^1 \cdot \langle y \rangle,$$

определяются оптимальной функцией Ляпунова

$$V^0(t, [y]_0, \langle y \rangle) = c_{11} \cdot [y]_0^2 + c_{12} \cdot [y]_0 \cdot \langle y \rangle + c_{22} \cdot \langle y \rangle^2$$

в соответствии с равенством

$$u_j^0 = -\frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta_{kj}}{\Delta} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V^0}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial\left[\frac{dx_i}{dt}\right]}{\partial u_j^0}.$$

РАЗДЕЛ 3. МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ПРОДВИЖЕНИЕМ ПРОДУКЦИИ: РЕКЛАМА И СТИМУЛИРОВАНИЯ СБЫТА

В практическом маркетинге рекламные коммуникации и стимулирование сбыта товаров рассматриваются как тесно взаимосвязанные и вместе с тем специальные обособленные средства сообщения потенциальным и уже имеющимся покупателям о товарах и услугах, а также как способы убедить их совершить покупку [11]. Взаимосвязь проявляется в том, что оба эти средства основываются на процессе коммуникаций. Они часто используются совместно, особенно когда компания по продвижению основана на интегрированных маркетинговых коммуникациях. В то же время каждой из этих сфер характерны специфические модели и методы, которые дают разные результаты (рис.3.1.).

Различия и сходство между рекламными коммуникациями и стимулированием сбыта можно рассматривать как с концептуальной, так и с практической точек зрения. *Рекламные коммуникации* часто определяют как непрямую форму убеждения, базирующуюся на информативном или эмоциональном описании преимуществ продукта. Их задача – создать у потребителей благоприятное впечатление о продукте и «сосредоточить их мысли» на совершении покупки. *Стимулирование сбыта* обычно рассматривают как прямое средство убеждения, основой которого служат внешние стимулы, а не свойственные продукту выгоды. Цель стимулирования – побудить человека или субъект хозяйствования к немедленной покупке.

Благодаря этим мерам товары продвигаются быстрее. Главное же сходство рекламы и стимулирования сбыта заключается в том, что оба

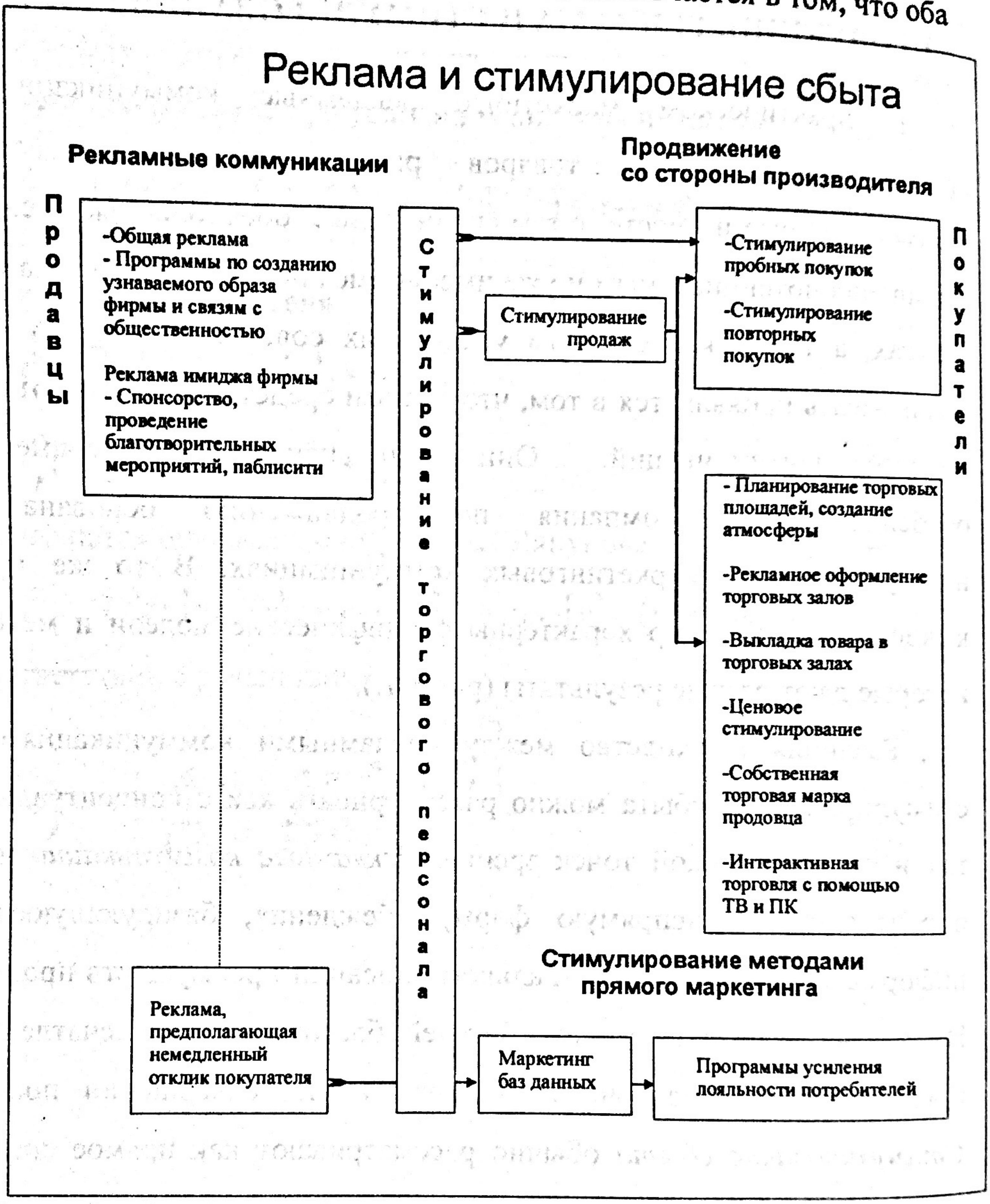

Рис.3.1. Реклама и стимулирование сбыта

эти средства представляют собой форму маркетинговых коммуникаций. Они могут использоваться для достижения одних и тех же целей. И реклама, и стимулирование сбыта обладают потенциалом как для образования марочного капитала в форме привлечения значительной лояльной клиентуры, так и для временного привлечения клиентуры. Возможность существования одного и того же обращения в рекламных коммуникациях и программах по стимулированию сбыта обуславливает существование интеграционных маркетинговых коммуникаций. На практике управляющие относятся к рекламе и стимулированию сбыта как к наборам методов, из которых можно выбрать один или несколько для каждой конкретной модели мероприятий для продвижения товаров или услуг. Какие методы будут превалировать в модели – зависит от целей кампании, в частности от кого исходят (например, от розничного продавца) и на кого направлены (на другие фирмы или потребителя) мероприятия по рекламе и стимулирования сбыта. Различные методы рекламы и стимулирования сбыта могут быть увязаны друг с другом посредством общего набора целей коммуникации, то есть задач по охвату целевых аудиторий и воздействию на их поведение. И здесь основной задачей менеджеров является выбор одного или нескольких методов модели продвижения товаров (услуг), оптимальных для конкретной задачи по продвижению товаров (услуг). Кроме того, несмотря на разнообразие методов, управляющий должен попытаться обобщить, например, рекламные обращения, если в проводимой рекламной компании используется более одного метода рекламы и стимулирования сбыта.

3.1. Общая постановка задачи построения математической модели управления продвижением продукции

Задача построения модели управления продвижением продукции предприятия основывается на взаимодействии между собой множества внешних и внутренних факторов предприятия. Однако в то время, как число различных показателей и переменных, которые необходимо принимать во внимание, велико, наиболее важные факторы, влияющие на вид математической модели управления продвижением продукции проекта можно разделить на две большие группы:

- Факторы, характеризующие состояние отрасли и условия конкуренции в ней.
- Факторы, характеризующие конкурентные возможности предприятия, его рыночную позицию и его возможности.

Для первой группы факторов при построении математической модели управления продвижением продукции проекта в первую очередь необходимо учитывать, в какой стадии жизненного цикла находится продукт или отрасль (этап выведения на рынок, этап роста, этап зрелости, этап упадка), структуру предприятия, организации или отрасли (раздробленная, концентрированная), что является конкурентной силой или типом конкурентного преимущества предприятия (модель лидерства по издержкам, сфокусированная модель низких издержек, модель широкой дифференциации, сфокусированная модель дифференциации или модель оптимальных издержек), масштабы деятельности конкурентов (осуществляется ли конкурентная борьба на региональном, национальном, многонациональном, международном или глобальном рынке).

Для второй группы переменных (факторов) построение математической модели управления продвижением продукции предприятия зависит от того,

- является ли предприятие или организация лидером в отрасли, напористым претендентом на лидерство (бросающим вызов), постоянно находится на вторых ролях или борется за выживание;
- от сильных и слабых сторон предприятия, его возможностях и грозящих предприятию опасностях.

Но даже указанные факторы могут представлять такое множество различных комбинаций, следствием каждой из которых является построение конкретной математической модели управления продвижением продукции проекта, что их невозможно рассмотреть в отдельной работе. Поэтому при построении математической модели управления продвижением продукции проекта рассмотрим пять классических вариантов ситуации по проекту в отрасли:

- конкуренция предприятий в новых и быстрорастущих отраслях;
- конкуренция предприятий в отраслях, находящихся в стадии зрелости;
- конкуренция предприятий в отраслях, находящихся в стадии стагнации или спада;
- конкуренция предприятий в раздробленных отраслях;
- конкуренция предприятий на международных и прочих рынках

и три классических варианта положения предприятия на рынке:

- предприятие лидер на рынке;
- предприятие находится на вторых ролях на рынке;
- слабое или пострадавшее от кризиса предприятие.

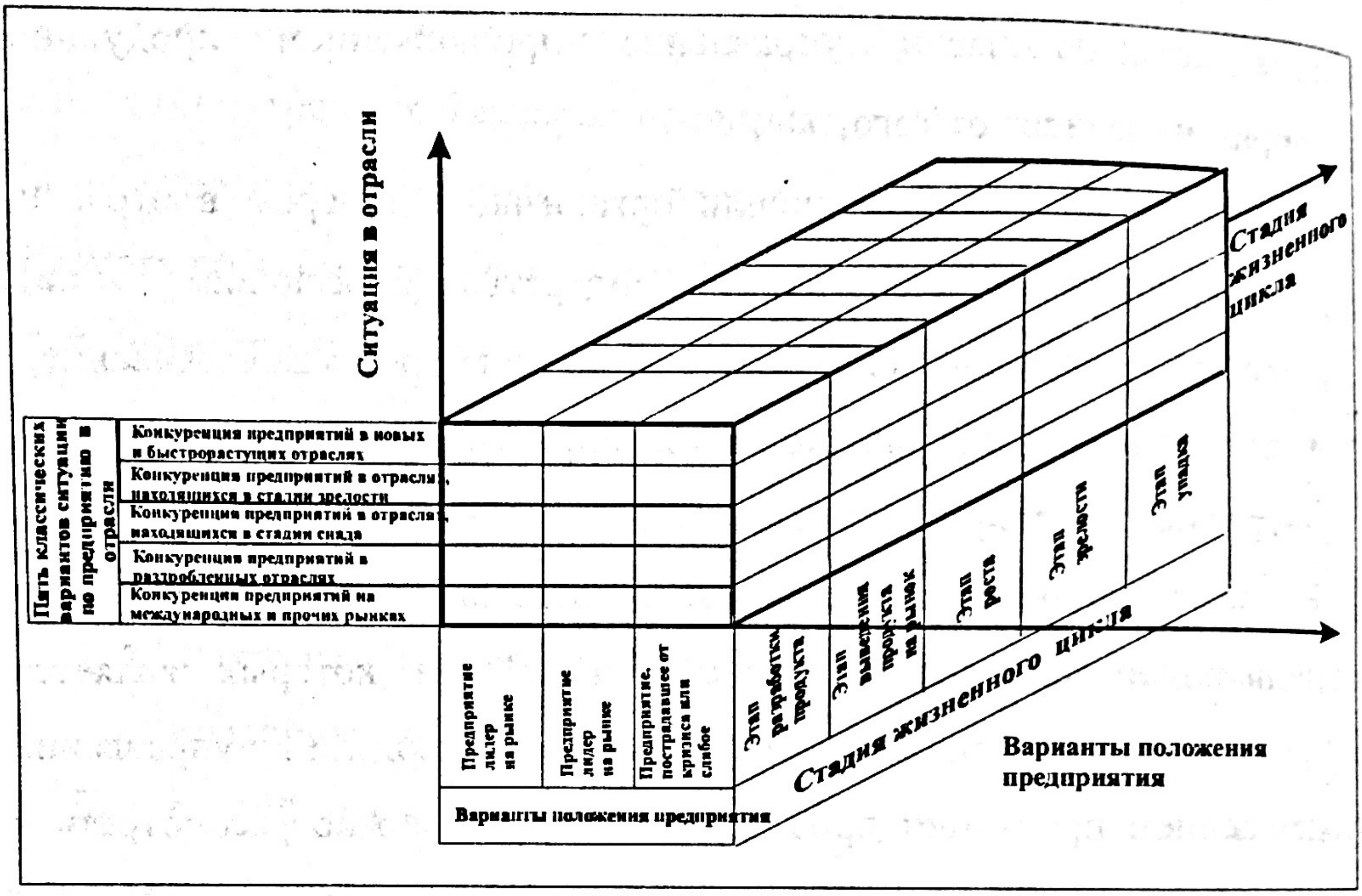

Рис.3.2.Факторы, воздействующие на предприятие

3.2. Агрегирование целевой аудитории потребителей продукции и услуг

Для того, чтобы определить, какие потребители обладают наибольшим потенциалом с точки зрения продаж, рассмотрим объем продаж предприятия как суперпозицию объема продаж относительно целевых аудиторий потребителей и успеха продаваемой торговой марки в конкретной целевой аудитории. Потенциальных потребителей торговой марки разделим на пять групп [11] на основе принципа лояльности к торговой марке. Принцип лояльности можно определить как регулярное (повторяющееся) приобретение продукта данной торговой марки, основанное на длительном знакомстве с торговой маркой и благоприятном отношении к торговой марке.

Лояльность к торговой марке - это концепция «осведомленность-отношение-поведение»:

- N_{g1} - *новые пользователи товарной категории.* Это пользователи, которые, покупая продукт организации, знакомятся с данной товарной категорией. Они могли ранее не потреблять или редко потреблять продукт из данной товарной категории. Если реклама и стимулирование направлены на них, то в этом случае есть вероятность, что они станут новыми покупателями. Группу *новые пользователи товарной категории* можно разбить на подгруппы:
    - потребители, благосклонно относящиеся к новой товарной категории (БНПК), являются наиболее предпочтительные потенциальные клиенты;
    - потребители, которые не осведомлены о рассматриваемой товарной категории, и следовательно вообще не имеют отношения к категории (НОНПК). Такой подгруппе необходима «образовательная реклама», способствующая формированию положительного отношения к категории и как результат – совершение покупки;
    - потребители, которые имеют негативное отношение к рассматриваемой товарной категории (ННПК). Практически до изменения идеологии работы на рынке вероятность совершения покупки данными организациями равна нулю.
- N_{g2}- *лояльные потребители торговой марки.* Данные потребители составляют основу текущих и будущих продаж

организации, уже максимально осведомлены о приобретаемой торговой марке и имеют о ней самое благоприятное мнение. С другой стороны, они не обладают большим потенциалом с точки увеличения сбыта. Кроме того, с точки зрения отношения к торговой марке и поведения потребитель может быть

- лояльным одной марке (ЛОМ);
- лояльным многим (обычно двум-трем) маркам (ЛММ).

Лояльность одной марке - желанная цель любого менеджера и цель рекламы и стимулирования сбыта в рассматриваемой группе.

- N_{g3} - *непостоянные потребители торговой марки.* Иногда данные потребители покупают продукт рассматриваемой организации, имеют к нему, как минимум, умеренно благоприятное отношение, иначе они его не покупали бы вообще. Однако их осведомленность может быть со временем уменьшаться, и как следствие, они будут реже употреблять наш продукт. Они могут стать лояльными потребителями торговой марки или всегда будут относиться к ней умеренно благоприятно, время от времени приобретая продукт для разнообразия, в случае дефицита данного продукта у своего поставщика или, например, под действием мероприятий по стимулированию сбыта (случай выгодной сделки). В большинстве товарных категорий, потребители, переключающиеся с одной торговой марки на другую, составляют самую большую категорию. Во время экономических кризисов группа становится еще больше. Характерно разделение группы на подгруппы:
    - непостоянные потребители торговой марки в зависимости от этапа жизненного цикла продукта. Данную подгруппу

можно отнести к экспериментирующим непостоянным пользователям (ЭНП). Подгруппа (ЭНП) очень чувствительна к рекламе, так как предпочтение и вкусы к продукту данных потребителей еще не сформировались;

- на более поздних этапах жизненного цикла с марки на марку переключаются регулярные экспериментаторы, которые делают это по привычке (РНП). Подгруппа РНП реагирует только на мероприятия ценового стимулирования;
- непостоянные потребители торговой марки в зависимости от использования торговой марки. Потребители, не имеющие постоянных предпочтений, по определению переключаются на разные марки (обычно две-три). Очевидно, имеет значение, входит наша торговая марка в набор этих марок или нет. Такие потребители являются благосклонными непостоянными пользователями (БНП) или непостоянными пользователями других торговых марок (НЛДМ).

Столь подробное разделение потребителей на подгруппы оправдано, так как в каждом случае задачи рекламы и стимулирования сбыта различны.

- N_{g4} *- непостоянные потребители других торговых марок* не включают рассматриваемую торговую марку в число потребляемых ими. Причиной может быть неосведомленность или нерегулярная осведомленность о торговой марке. Другая причина – сложившееся у потребителя нейтральное или негативное отношение к торговой марке, даже если они о ней осведомлены. Также причиной может быть высокая цена на данный продукт.

- N_{g5} *- лояльные потребители других торговых марок* обладают, как обычно, наименьшим сбытовым потенциалом, так как удовлетворены потреблением другой торговой марки. Они могут быть либо осведомлены о нашей торговой марке, либо нет. И хотя их поведение кажется более обнадеживающим по сравнению с потребителями, не пользующими товарами данной категории, их отношение к нашей торговой марке нейтрально, а чаще отрицательное – делает их для нас наименее перспективными покупателями. Их вполне можно склонить на свою сторону, особенно с помощью мероприятий стимулирования сбыта, но превратить в лояльных покупателей – едва ли. Нельзя забывать, что работа идет с удовлетворенными потребителями, которые уже досконально изучили категорию и вполне довольны своим выбором. Если все-таки у организации ставится задача воздействия на лояльных потребителей других марок, то группу следует разделить на несколько подгрупп (данная ситуация имеет место при выходе на рынок организации, чья марка имеет небольшую долю на зрелом рынке, где доминируют одна-две крупные марки). Различие проявляется в отношении к нашей марке. Оно может быть:
  - благоприятным (БЛДМ);
  - отрицательным (ОЛДМ);
  - нейтральным (НЛДМ).

Если нейтральное или отрицательное отношение основано на прошлых попытках привлечь нашу марку, то вероятность привлечения таких потребителей очень мала.

Оценка сбытового потенциала будущих покупателей – это осведомленность будущих покупателей о предлагаемой торговой марке и отношение будущих покупателей к торговой марке. Текущий же сбыт представлен в основном ядром лояльных покупателей и каймой непостоянных потребителей (затемненная область на рис.3.3).

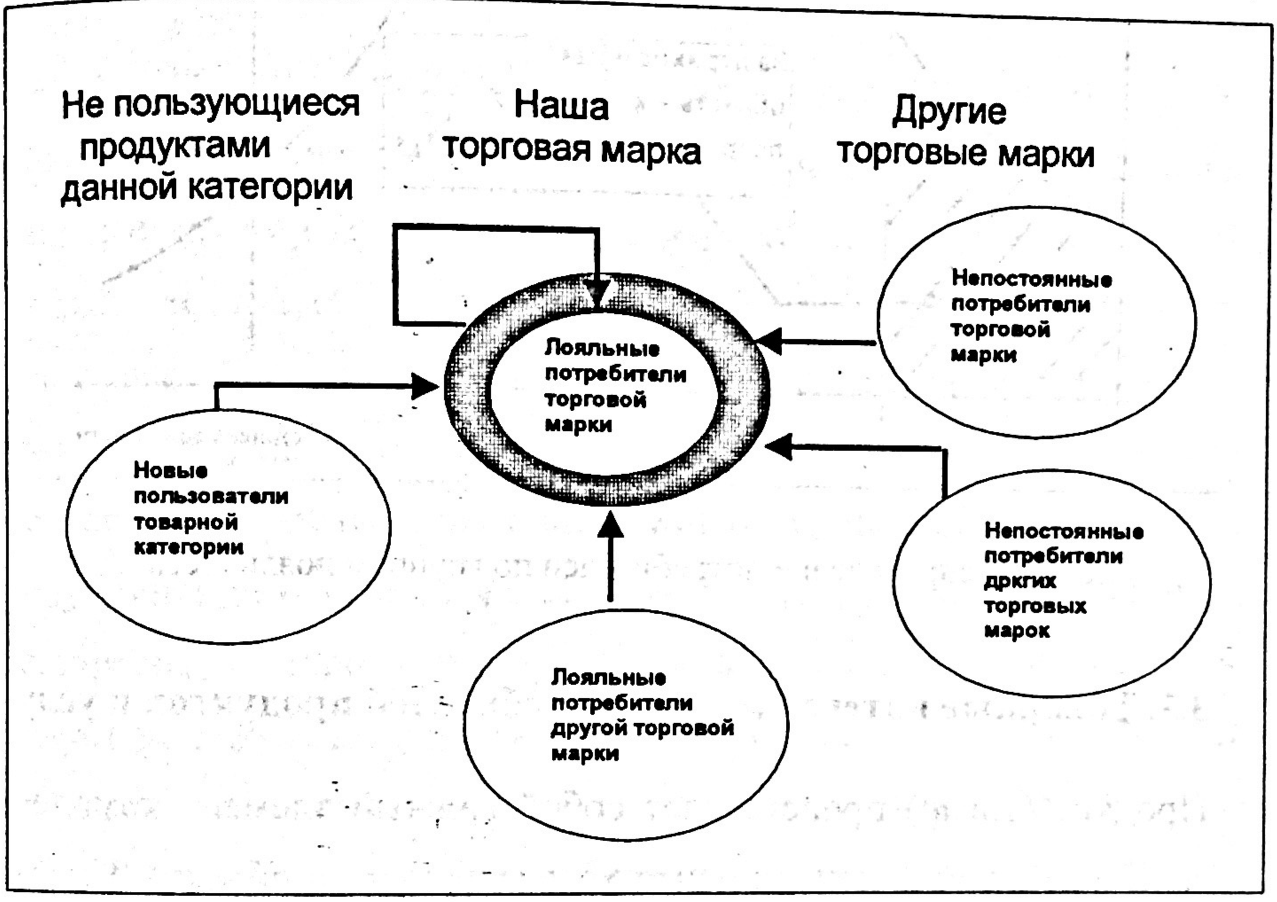

Рис.3.3. Пять групп потребителей, как источники сбыта

Осуществив суммирование покупателей по описанным группам потребителей, получим общее количество потенциальных покупателей N:

$N = \sum_{j}^{5} N_{gj}$, где N_{gj}- количество потребителей в j-ой группе потребителей. Понятно, что общее количество потенциальных покупателей N не является постоянной величиной, а зависит как от временного фактора (например, жизненного цикла продукта), так и от методов взаимодействия и воздействия на потребителя в j-ой группе.

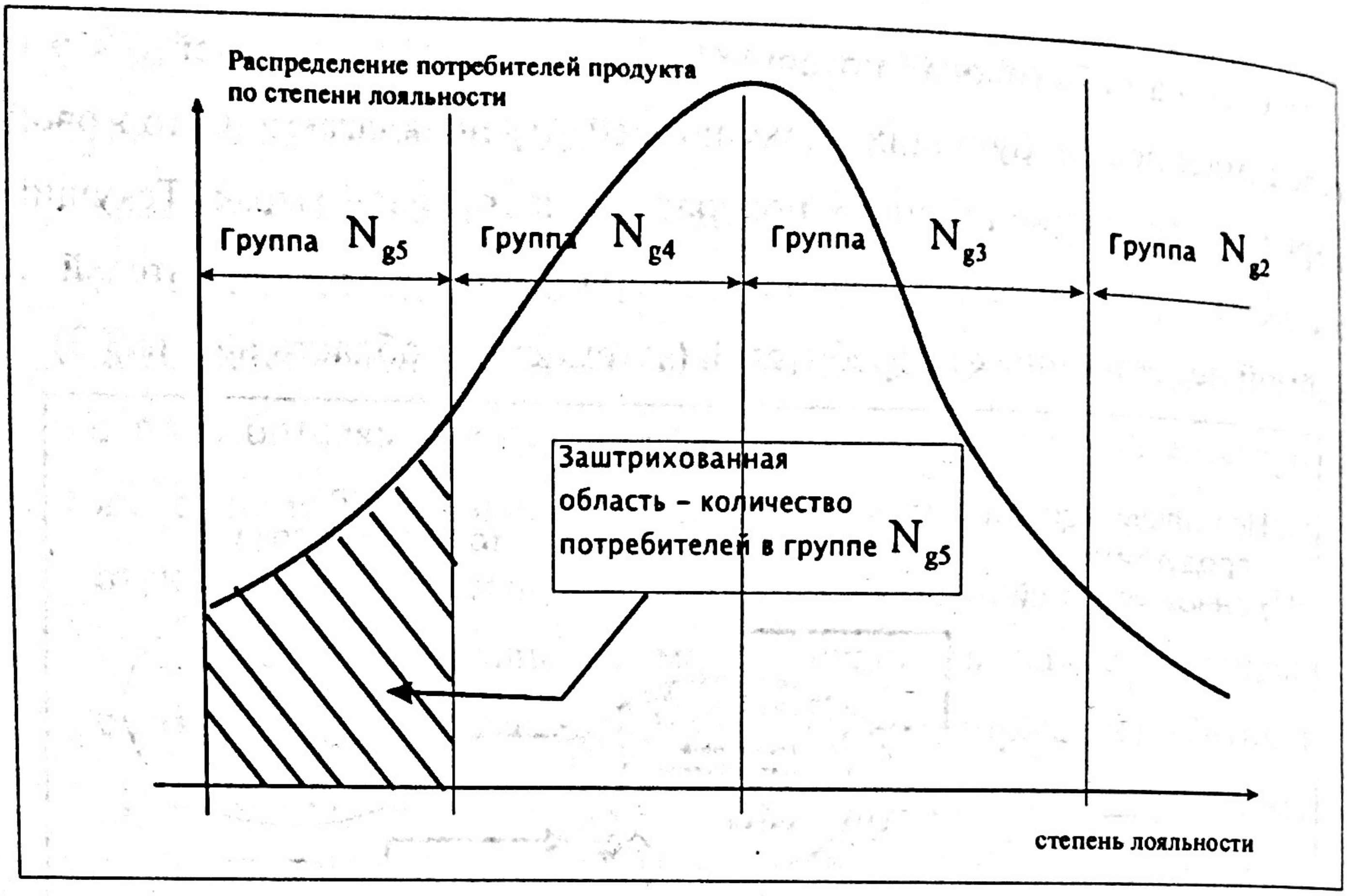

Рис.3.4.Распределение потребителей по группам лояльности

3.3. Товарные категории для потребителей продуктов и услуг

Продукт (товар) представляет собой важный элемент комплекса как маркетинга, так и менеджмента хозяйствующего объекта. Каждый продукт представляет собой обособленную целостность и может быть характеризован присущими ему показателями (являться функцией от присущих ему показателей), такими как размеры, масса, цена, качество… Характеристики продукта, наряду с такими факторами, как численность конкурентов, степень сегментирования рынка и состояние экономики, оказывают большое влияние на выбор математической модели для продвижения продукции. Продуктовая политика требует принятия согласующихся между собой решений, касающихся отдельных товарных единиц, товарного ассортимента и товарной номенклатуры [12]. Существует множество методик классификации товаров по товарным категориям. При классификации товаров может быть взята за основу близость продуктов между собой с точки зрения их конечного использования (потребительский признак), требования к организации и технологии производства (технологический признак), функционированию каналов распределения, жизненному циклу товаров, степени разделения рынка, рентабельности изделий, доходности товарной категории или каких-то иных показателей. Товарные категории составляют товарный ассортимент организации. Каждый товарный ассортимент требует собственной стратегии маркетинга. Широта товарного ассортимента отчасти определяется целями, которые ставит организация перед собой. У организаций, старающихся прослыть поставщиками исчерпывающего ассортимента продукции и/или добиться завоевания большой доли рынка или его расширения, товарный ассортимент обычно широкий. Их меньше волнует положение, когда те или иные из производимых ими товаров не дают прибыли. Организации, заинтересованные прежде всего в высокой прибыльности своего бизнеса, имеют суженный ассортимент доходных изделий. С течением времени ассортимент обычно расширяется [13]. Товарный ассортимент любой фирмы является частью общего товарного ассортимента по отрасли в целом. Расширение ассортимента происходит обычно двумя способами: путем наращивания ассортимента или путем насыщения ассортимента. Многие организации, поначалу располагавшиеся в верхнем эшелоне рынка, постепенно расширяют свой ассортимент, чтобы охватить нижележащие эшелоны.

Наращивание ассортимента может иметь целью сдерживание конкурентов, наступление на них или проникновение в наиболее быстрорастущие сегменты рынка. Одним из огромных просчетов ряда американских фирм было их нежелание расширять свой ассортимент вниз, в нижние эшелоны своих рынков (корпорация «Дженерал моторс» противилась выпуску компактных автомобилей, корпорация «Ксерокс» копировальных аппаратов меньших размеров, корпорация «Харлет-Дэвидсон» - выпуску небольших мотоциклов). В ответ японские фирмы, узревшие для себя большие открывающиеся возможности, действовали быстро и успешно.

Организации, действующие в нижних эшелонах рынка, ставят себе цель проникновения в выше лежащие эшелоны. Мотивом могут служить более высокие темпы развития верхних эшелонов рынка или их повышенная прибыльность, желание позиционировать себя в качестве производителя с исчерпывающим ассортиментом.

При большом количестве товарных категорий реализация сколько-нибудь сложных методик управления продвижением продукции оказывается невозможной, а стоимость информационной системы может перекрыть возможную экономию. С другой стороны в рамках системы управления продвижением продукции применение тех или иных методов зависит от состава товарной категории. Поэтому встает проблема оптимального разделения ассортимента организации на товарные категории с целью получение максимальной выгоды.

3.4. Жизненный цикл продукта или товарной категории

Понятие жизненного цикла ввел Теодор Левитт в статье, напечатанной в Harvard Business Review в 1965г. [14]. В статье предполагается, что продукт рождается (разрабатывается и выводится на рынок), развивается (растет объем продаж), взрослеет (обретает зрелость на рынке) и умирает (уходит с рынка, этап упадка). Вновь разработанный продукт выводится на свой целевой рынок по ранее запланированной стратегии. Поведение товара на рынке будем представлять в виде временной зависимости $\frac{dN_g}{dt} = f_g(t)$, характеризующей изменение количества потребителей продукции во времени. Наряду с зависимостью $\frac{dN_g}{dt} = f_g(t)$ жизненный цикл может быть представлен другими функциональными зависимостями, например $\frac{d\langle N_g \cdot S_N \rangle}{dt} = f_{g\_S}(t)$, $\frac{d\langle N_g \cdot Z_N \rangle}{dt} = f_{g\_Z}(t)$, в зависимости от условий построения модели, где S_N - себестоимость изготовления продукта; Z_N - цена продажи продукта соответственно $\frac{dN_g}{dt} = f_g(t)$ как описывалось выше, представляет собой изменение во времени среднего количества потребителей товарных категорий в единицу времени; $\frac{d\langle N_g \cdot S_N \rangle}{dt} = f_{g\_S}(t)$ представляет собой изменение во времени общей суммы денежных средств, требуемых для производства нужного для удовлетворения потребностей рынка количества продукции; $\frac{d\langle N_g \cdot Z_N \rangle}{dt} = f_{g\_Z}(t)$ представляет собой интенсивность поступления денежных средств за реализованную потребителям продукцию.

Типичный жизненный цикл в виде зависимости $\frac{d\langle N_g \cdot S_N \rangle}{dt} = f_{g\_S}(t)$ представлен на рис.3.5. В этом цикле отчетливо можно выделить четыре этапа [12]:

- Этап выведения на рынок - период медленного роста сбыта по мере выхода продукта на рынок. Процедура выведения продукта на рынок требует времени, и сбыт в этот период растет медленно. Медленный рост объясняется следующими обстоятельствами: задержки, связанные с расширением производства, технические проблемы и доработка изделий, задержки, связанные с доведением товара до потребителя посредством каналов распределения, нежелание потребителей отказываться от привычных схем поведения. В связи с большими затратами по выведению продукта прибыли на данном этапе обычно нет. Затраты по ***стимулированию сбыта и рекламе*** достигают в это время своего высшего уровня «в связи с необходимостью концентрированных усилий по продвижению продукта»: а)информировать потенциального потребителя о новом, неизвестном ему ранее продукте; б)побудить потребителя опробовать продукт; в)построить каналы распределения продукта. Производители на данном этапе выпускают только основные варианты и модификации продукта. Стоимость продукта на данном этапе как правило завышенная.

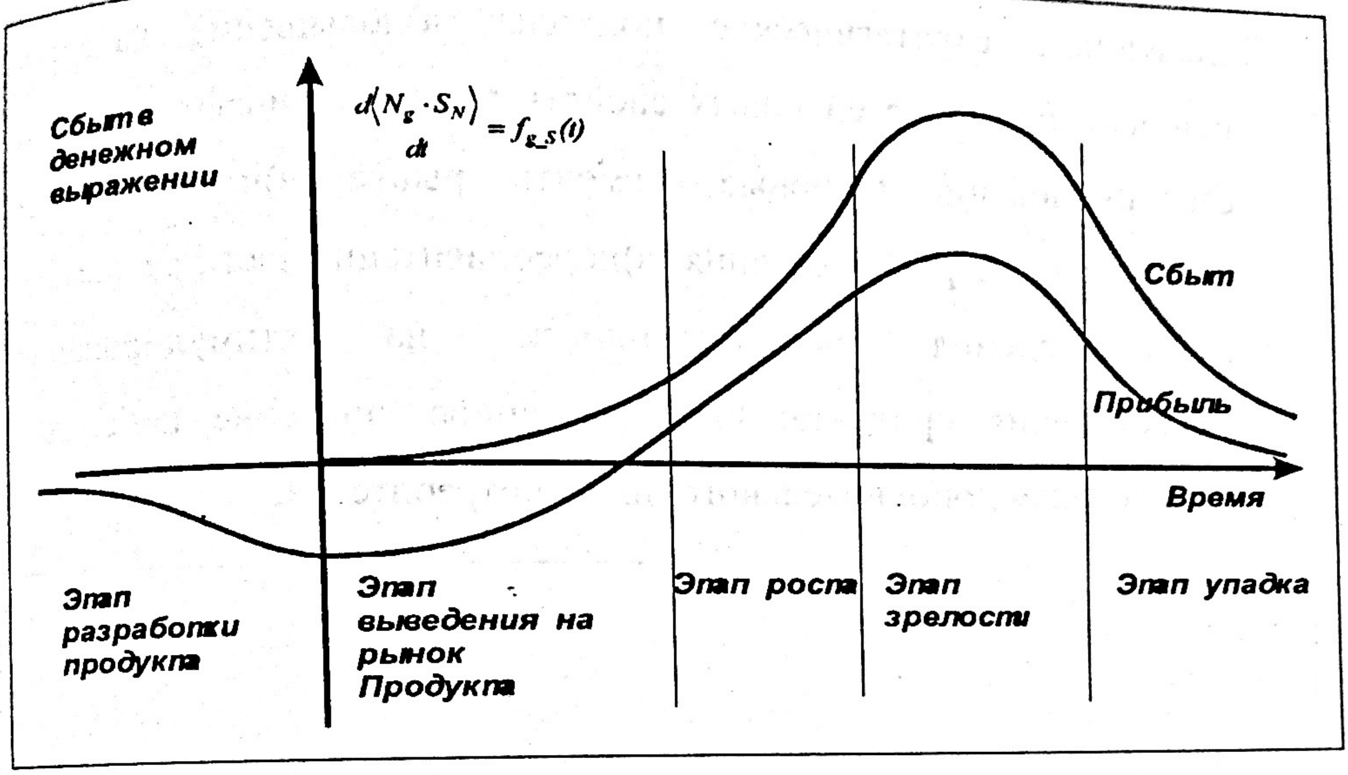

Рис.3.5. Жизненный цикл продукта в виде зависимости $\frac{d\langle N_g \cdot S_N\rangle}{dt} = f_{g\_S}(t)$

- Этап роста - период быстрого восприятия продукта рынком и быстрого роста прибылей. Если продукт удовлетворяет интересам рынка, сбыт начнет существенно расти. Ранние последователи будут продолжать покупать продукт. Намечается рост потребителей в каждом j-ой группы потребителей. Вместе с тем появляются и конкуренты. Рост числа конкурентов обязывает увеличить производство (объем продаж) с целью насыщения продуктом каналов распределения. Стоимость продукта остается на том же уровне или слегка снижается по мере роста спроса. Затраты на ***стимулирование сбыта и рекламу*** увеличиваются для противостояния конкурентам и продолжения информировании о продукте. Для того, чтобы максимально растянуть период быстрого роста, используются обычно следующие стратегические подходы: а)повышение качества новинки, придание ей новых свойств выпуском новых моделей; б)проникновение в новые сегменты рынка; в)использование новых каналов распределения; в)переориентация части рекламы с распространения осведомленности на стимулирование приобретения продукта; г)своевременное снижение цены для привлечения дополнительного числа потребителей;

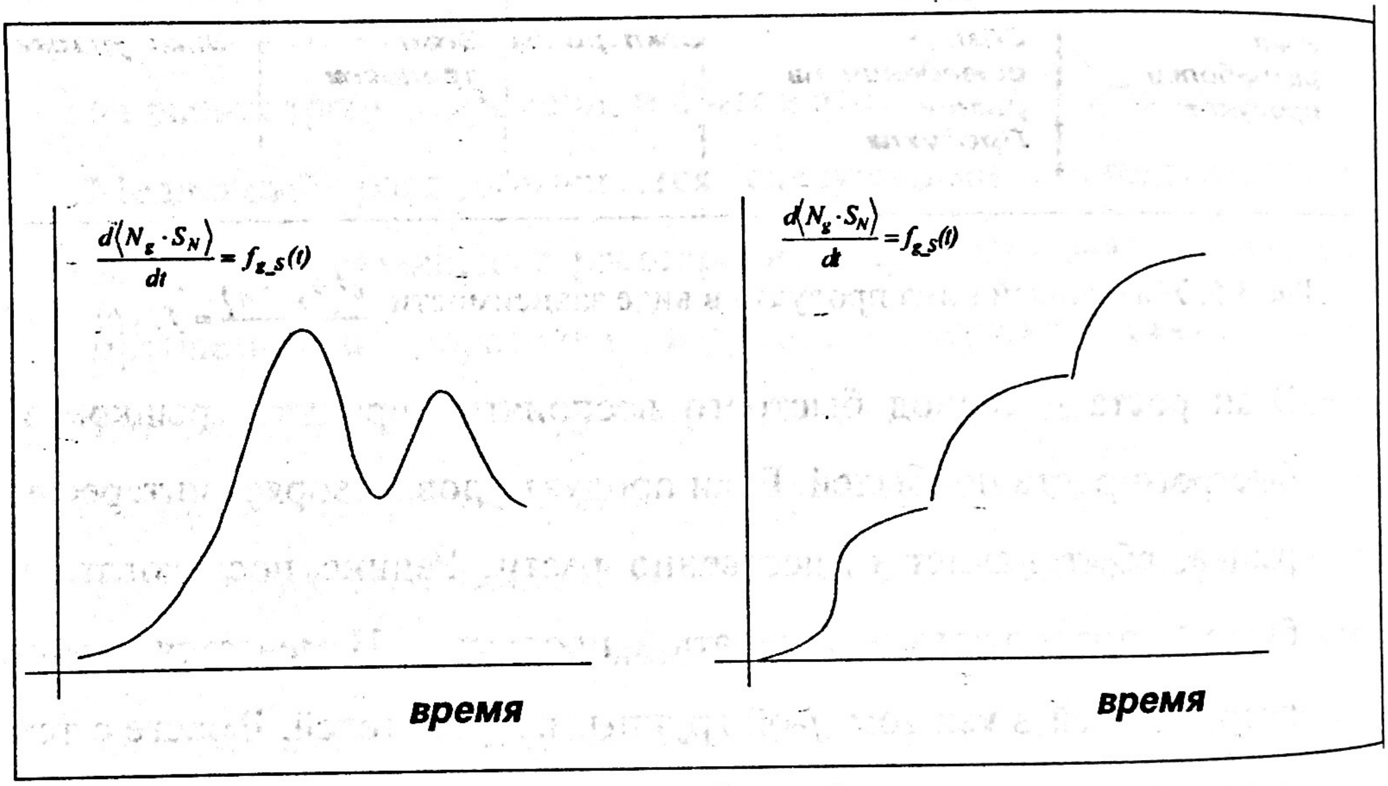

Рис.3.6. Варианты жизненного цикла продукта в виде зависимости $\frac{d\langle N_g \cdot S_N \rangle}{dt} = f_g s(t)$

- Этап зрелости – период замедления темпов сбыта в связи с тем, что продукт уже добился восприятия большинством потребителей. Прибыли стабилизируются или снижаются в связи с ростом затрат на защиту товаров от конкурентов. Большинство находящихся на рынке продуктов как раз находятся на этапе зрелости. Замедление роста сбыта означает, что у многих производителей скапливаются запасы непроданных продуктов. Это ведет к обострению конкуренции. Конкуренты все чаще прибегают к продаже по сниженным ценам. Растет реклама, ассигнования на НИОКР с целью создания улучшенных образцов. Слабые конкуренты уходят с рынка. На данном этапе требуется защита продукта, которая проявляется в: а)модификации рынка, выражающейся в поиске новых пользователей и сегментов рынка. Одновременно изыскиваются способы стимулирования рынка;

б)модификация продукта, выражающаяся в улучшении качества (мероприятия эффективны тогда, когда качество поддается улучшению, потребители верят утверждениям об улучшении качества, достаточно большое количество потребителей хотят улучшения качества), свойств (сделать продукт более безопасным и экономичным и т.д.) и внешнего вида продукта;

в)модификация комплекса маркетинга, выражающаяся в преобразовании мероприятий по стимулировании и рекламе. Для привлечения новых потребителей и переманивания покупателей других производителей можно снизить цену, разработать более действенную рекламную компанию, совершенствовать виды услуг.

Этап упадка – период, характеризующийся резким падением сбыта и снижением прибылей. Сохранение в своей номенклатуре продукта,

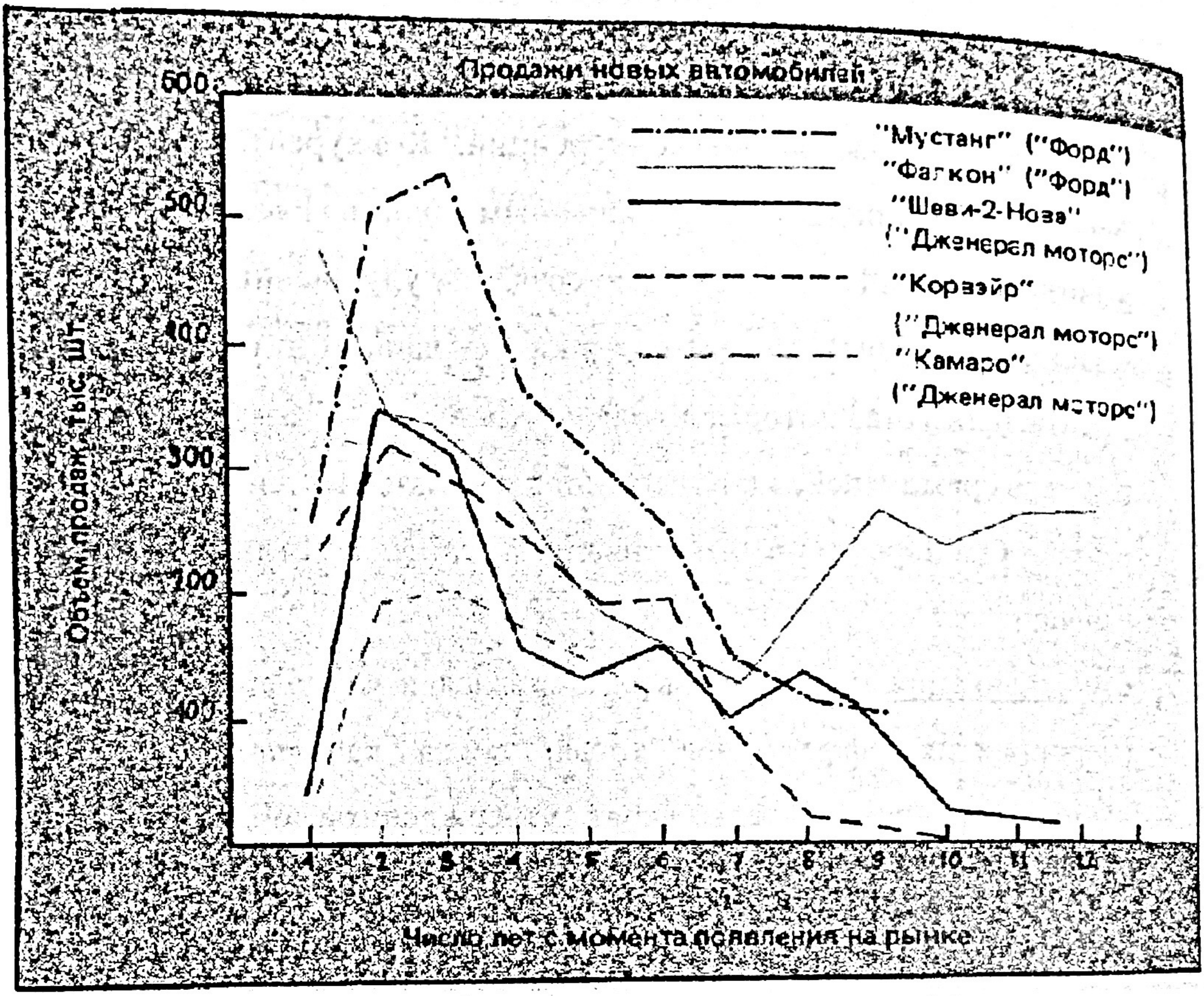

Рис.3.7.Кривые жизненных циклов некоторых марок автомобилей

вступившего в стадию упадка, может оказаться для организации чрезвычайно накладным делом. Это расходы на хранение, учет, затраты дополнительного времени руководства на отчеты по состоянию дел по данным продуктам.

Представленная кривая жизненного цикла на рис.3.6. является типичной для большинства товарных категорий. Одним из часто встречающихся вариантов является кривая с наличием нескольких локальных максимумов. Повторные «горбы» вызваны интенсивными мероприятиями по продвижению продукции (реклама и стимулирование сбыта), на этапе упадка сбыта продукта. Другой разновидностью, например, является «гребешковая» кривая, вызванная выявлением у продукта новых свойств, наличие которых характеризуется усилением воздействия первого уравнения $\frac{dN_{g1}}{dt} = a_{11} \cdot N_{g1} + f_{g1}(t)$ на систему лояльности потребителей к продукту, что выражается или в значительном изменении функции $f_{g1}(t+\Delta t) = f_{g1}(t) + \Delta f_{g1}(t)$, где $f_{g1}(t) \approx \Delta f_{g1}(t)$ или $f_{g1}(t) << \Delta f_{g1}(t)$. Понятие жизненного цикла продукта применяется для описания целого товарного класса. На рис.3.7 представлены жизненные циклы ряда хорошо известных марок автомобилей [12].

3.5. Модель управления продвижением продукции для общего случая категории жизненного цикла

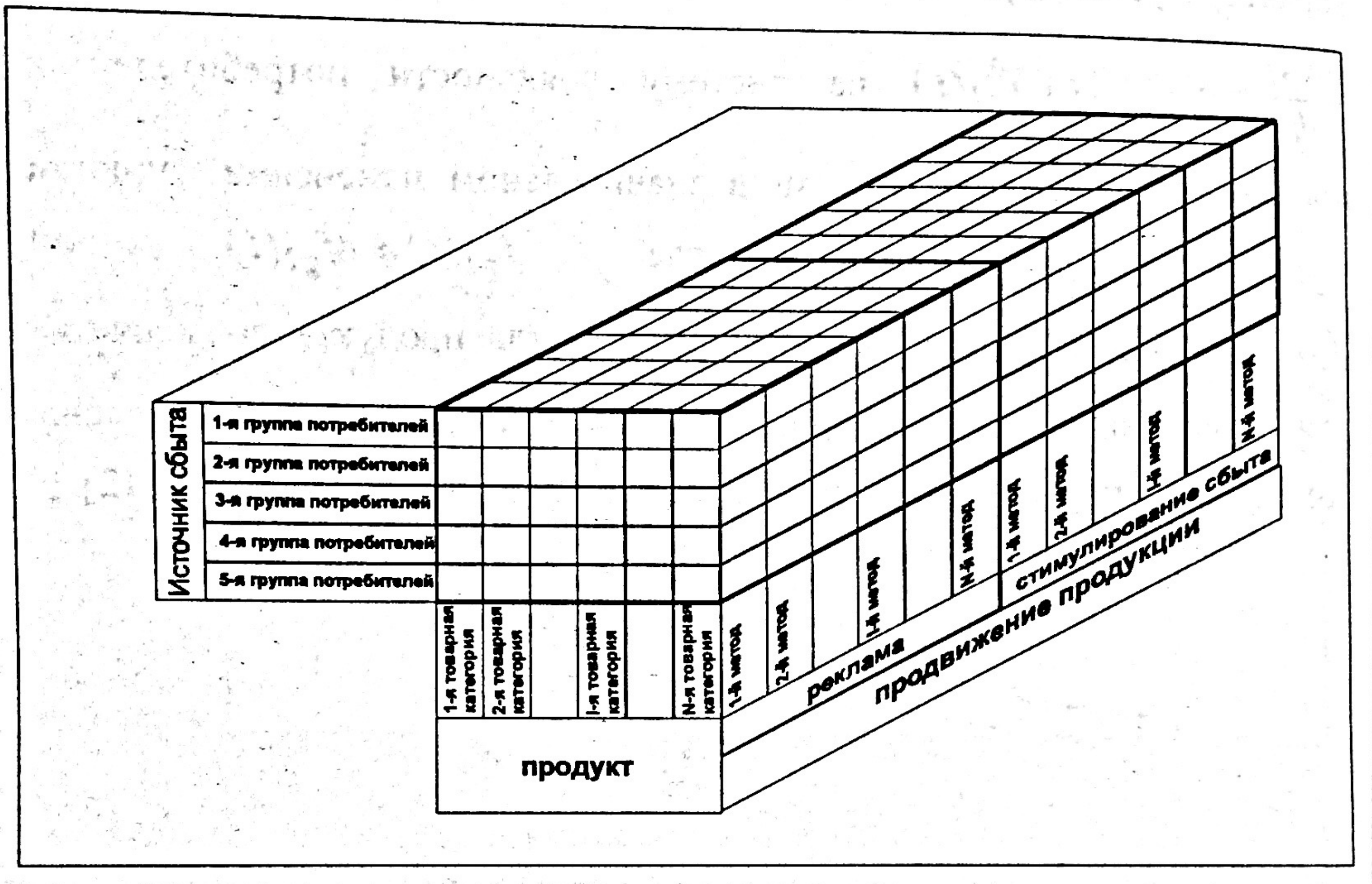

Рис.3.8. Модель управления продвижением продукции

Используя понятие «целевая аудитория» и «товарная категория», перейдем к построению математической модели управления продвижением продукции. Главной целью рекламы и стимулирования сбыта является увеличение или поддержание объемов сбыта. Точнее цель заключается в увеличении или поддержании темпов сбыта (количество проданной продукции в единицу времени). Введем в рассмотрение функцию χ_{pr_j}, описывающую эффективность вложения средств в продвижение продукции в j-ой группе потребителей. В виде переменных функции будем использовать переменные $S_{p\,j}$, $\mu_{p\,j} = \dfrac{dS_{p\,j}}{dt}$, $S_{st\,j}$, $\mu_{st\,j} = \dfrac{dS_{st\,j}}{dt}$, представляющие собой количество средств, вкладывающихся в рекламу (символ «*p*») и стимулирование сбыта (символ «*st*») продукта в единицу времени и скорость изменения количества средств, вкладывающихся в рекламу в единицу времени (закон изменения $S_{p\,j}$ или $S_{st\,j}$: не что иное, как график проведения рекламной компании или мероприятий по стимулированию сбыта продукта).

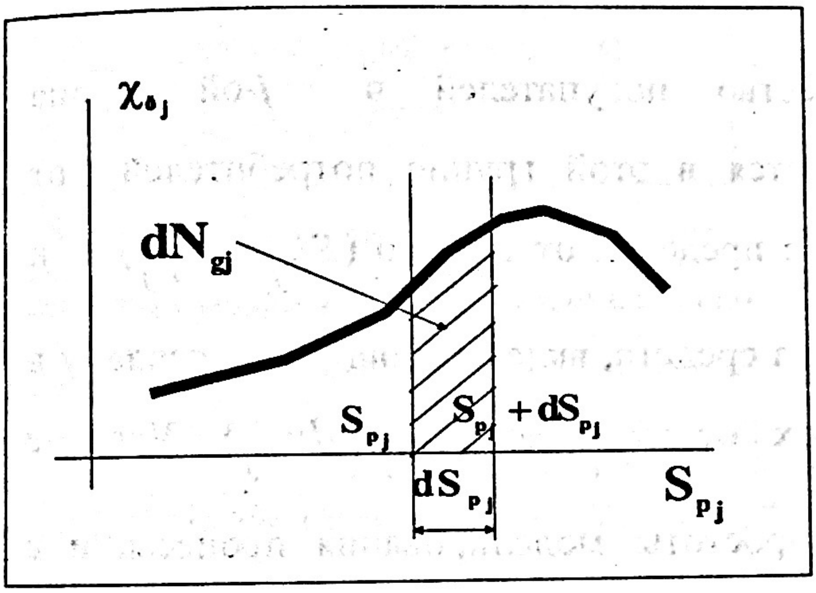

Рис.3.9.Функция, описывающая эффективность вложения средств в рекламную компанию по *j*-ой товарной категории

Функцию $\chi_{pr\,j}$ нормируем на N_{gj} - количество покупателей в *j*-ой группе потребителей.

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \chi_{pr\,j}(S_{p\,j},\mu_{p\,j},S_{st\,j},\mu_{st\,j})\cdot dS_{p\,j}\cdot d\mu_{p\,j}\cdot dS_{st\,j}\cdot d\mu_{st\,j}=$$

$$=\int\limits_{\Omega_{st\,j}} d\Omega_{st\,j}\int\limits_{\Omega_{p\,j}} d\Omega_{p\,j}\cdot\chi_{pr\,j}=\int\limits_{\Omega_{pr\,j}} d\Omega_{pr\,j}\cdot\chi_{pr\,j}=N_{gj},$$

где, например, $dS_{p\,j}\cdot d\mu_p\cdot\int\limits_{\Omega_{st\,j}} d\Omega_{st\,j}\cdot\chi_{pr\,j}(S_{p\,j},\mu_{p\,j},S_{st\,j},\mu_{st\,j})$

представляет собой количество покупателей в j-ой группе потребителей, которые остаются в этой группе потребителей от вложения в рекламу средств в пределах от $S_{p\,j}$ до $(S_{p\,j}+dS_{p\,j})$ и скорости изменения количества средств, вкладывающихся в рекламу в единицу времени в пределах от $\mu_{p\,j}$ до $(\mu_{p\,j}+d\mu_{p\,j})$. Условие нормировки выбирается из простоты моделирования процесса и в зависимости от поставленной задачи может иметь разный вид. При описании модели для простоты взяли переменные $S_{p\,j}$, $\mu_{p\,j}=\frac{dS_{p\,j}}{dt}$. Выбор переменных функции распределения в основном определяется макропараметрами системы, которые хотят наблюдать руководители компаний.

Условие нормировки представляет собой сходящийся интеграл $\int\limits_{\Omega_{pr_j}} d\Omega_{pr_j}\cdot\chi_{pr_j}=N_{g_j}$ к значению N_{gj}. Последнее говорит о том, что

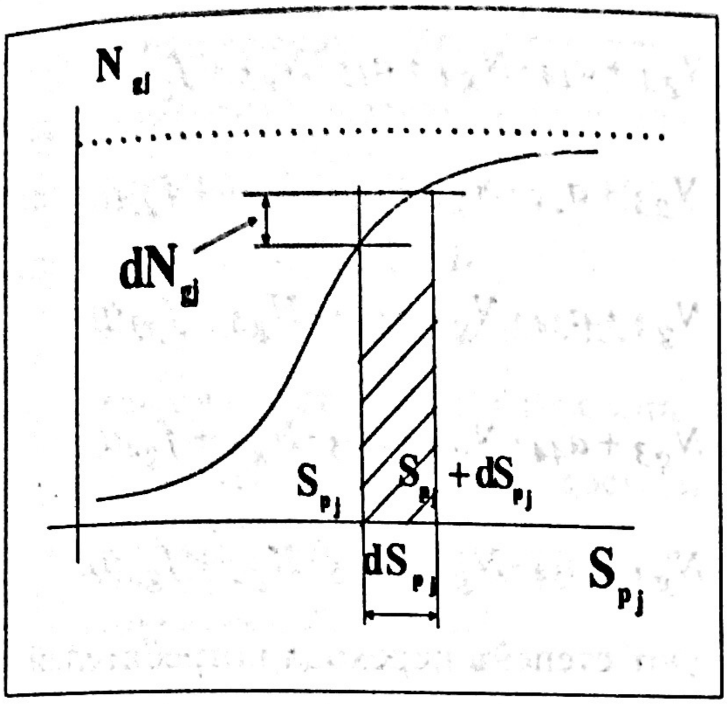

Рис.3.10. График, описывающая влияние вложения средств в рекламную компанию по j-ой товарной категории на количество покупателей N_{gj} в j-ой группе потребителей

результат от вложения средств в рекламу имеет свой оптимум, то есть имеет ту точку для переменных S_{p_j}, $\mu_{p_j}=\dfrac{dS_{p_j}}{dt}$, вложение выше которой не дает уже существенных результатов. Запишем уравнение баланса, характеризующее изменение количества покупателей N_{gj} в j-ой группе потребителей.

Количество покупателей N_{gj} в j-ой группе потребителей зависит как от внутренних факторов (например, необходимости увеличения значения переменной S_{p_j} для удержания количества потребителей продукта на прежнем уровне. Вариант смещения точки экстремума на графике функции χ_{p_j} в сторону больших значений S_{p_j}), так и внешних факторов, характеризующих собой процесс перехода потребителей от одной группы потребителей (группы лояльности) к другой группе потребителей (группе лояльности).

Система уравнений, описывающая взаимодействия между группами потребителей (группами лояльности) можно представить в виде:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dN_{g1}}{dt} = a_{11} \cdot N_{g1} + a_{12} \cdot N_{g2} + a_{13} \cdot N_{g3} + a_{14} \cdot N_{g4} + a_{15} \cdot N_{g5} + f_{g1}(t); \\
\dfrac{dN_{g2}}{dt} = a_{21} \cdot N_{g1} + a_{22} \cdot N_{g2} + a_{23} \cdot N_{g3} + a_{24} \cdot N_{g4} + a_{25} \cdot N_{g5} + f_{g2}(t); \\
\dfrac{dN_{g3}}{dt} = a_{31} \cdot N_{g1} + a_{32} \cdot N_{g2} + a_{33} \cdot N_{g3} + a_{34} \cdot N_{g4} + a_{35} \cdot N_{g5} + f_{g3}(t); \\
\dfrac{dN_{g4}}{dt} = a_{41} \cdot N_{g1} + a_{42} \cdot N_{g2} + a_{43} \cdot N_{g3} + a_{44} \cdot N_{g4} + a_{45} \cdot N_{g5} + f_{g4}(t); \\
\dfrac{dN_{g5}}{dt} = a_{51} \cdot N_{g1} + a_{52} \cdot N_{g2} + a_{53} \cdot N_{g3} + a_{54} \cdot N_{g4} + a_{55} \cdot N_{g5} + f_{g5}(t).
\end{cases}
$$

где коэффициенты a_{ij} характеризуют степень перехода потребителей из в i-ой группы в j-ую группу, $f_{g1}(t)$ характеризует жизненный цикл продукта (товарной категории).

3.6.Модель управления продвижением продукта или товарной категории на этапе выведения продукта на рынок и на этапе роста

Постановка задачи

Модель управления продвижением продукта или товарной категории на «этапе выведения продукта на рынок» и на «этапе роста» - это модель отрасли, находящейся в ранней стадии существования, стадии зарождения. Большинство компаний этой отрасли находится в стадии организации, привлечения персонала, строительства или приобретения производственных мощностей, расширения сбытовой сети и привлечения на свою сторону потенциального покупателя. Очень часто предприятия отрасли сталкиваются с проблемами разработки товара и с технологическими проблемами, которые должны быть разрешены. Это требует учитывать при разработке математической модели продвижениям продукта или товарной категории на «этапе выведения продукта на рынок» и на «этапе роста» следующие вопросы [15]:

- в связи с тем, что рынок плохо изучен, нельзя четко определить, как он будет функционировать, как быстро он будет расширяться и каких масштабов достигнет. Недостаток статистической информации не позволяет четко определить тенденции его развития в будущем;
- большинство ноу-хау, как правило, запатентовано, будучи разработано на фирмах, являющихся пионерами в этой области. Некоторые фирмы накапливают патенты для обеспечения себе конкурентного преимущества;
- очень часто не существует мнения о том, какая технология выиграет в конкурентной борьбе и какие товарные характеристики в наибольшей степени подойдут потребителю. Пока рынок не огласит свой вердикт, большие различия в качестве и характеристиках товара - типичное явление. Каждая фирма стремится заставить рынок признать ее собственный подход к технологии, разработке продукта, маркетингу и распределению продукции. Вокруг этого разворачивается конкурентная борьба;
- барьеры выхода на рынок относительно низки даже для новичков. Фирмы, обладающие устойчивым финансовым положением и ищущие для себя новые возможности, скорее всего присоединяться к отрасли, если ее перспективы благоприятны;

- с ростом производства существенно снижаются производственные издержки;
- предприятия ощущают недостаток информации о конкурентах и о том, как быстро продукция находит своего потребителя. Отсутствует обратная связь с потребителем. Не созданы торговые ассоциации, собирающие и распространяющие информацию;
- в связи с тем, что потребители впервые используют данный продукт, задача маркетинга – убедить потенциального потребителя в необходимости покупки и преодолеть его тревоги в отношении характеристик и возможностей товара, а также обойти на этом пути конкурентов;
- часто у предприятий возникают проблемы в связи с поисками надежных поставщиков сырья и материалов, пока последние не увеличат поставки, в полной мере удовлетворяющие потребности отрасли;
- большинство предприятий, ощущая нехватку денежных средств для поддержания необходимого уровня научных исследований и для того, чтобы продержаться несколько трудных лет, пока их продукция не получит признание, заканчивают тем, что сливаются с конкурентами или их приобретают пришедшие в отрасль аутсайдеры, желающие осуществить инвестиции в растущий рынок.

Отсюда математическую модель продвижения продукта или товарной категории на «этапе выведения продукта на рынок» и на «этапе роста» можно строить в двух направлениях: или на базе методики осуществления финансирования проекта (за основу берется финансовая модель) или на базе выбора методики рыночных сегментов и конкурентных преимуществ (за основу берется маркетинговая модель). Модели, ориентированные на низкие издержки либо дифференциацию, являются наиболее привлекательными. Для компаний, испытывающих финансовые затруднения, необходимо использовать модели стратегических союзов или совместных предприятий.

Одной из важных проблем при построении модели функционирования является то, что постоянно приходится сталкиваться с рисками и оценивать возможности отрасли. Молодые компании сталкиваются с проблемами управления быстрым собственным ростом и защиты от конкурентов, готовых воспользоваться их успехом. Все это требуется в той или иной мере отразить при построении модели.

Построение математической модели

Для рынка, на котором позиционируется продукт, емкость которого не заполнена и группы потребителей не сформированы, взаимодействие между группами мало по сравнению с движением в группе «новые пользователи товарной категории»:

$$f_{g1}(t) >> f_{gj}(t); \quad |a_{11}| >> |a_{ij}|, \quad j \geq 2; \qquad 2 \leq j \leq 5, \quad 1 \leq i \leq 5,$$

$$a_{11} \approx -(a_{21} + a_{31} + a_{41} + a_{51}), \qquad a_{11} < 0.$$

Подразумевается переход потребителей из одной группы в другую пренебрежительно мал по сравнению с потоком потребителей, поступающих в первую группу $f_{g1}(t)$. Дальнейшее распределение по группам будем полагать, что происходит из первой, за счет уменьшения количества потребителей в первой группе на величину $a_{11} \cdot N_{g1}$. Такой рынок будем называть ниже не сформировавшимся, а система уравнений для него можем быть получена из общей системы уравнений, описывающих взаимодействия между группами потребителей (группами лояльности):

$$\begin{cases} \dfrac{dN_{g1}}{dt} = a_{11} \cdot N_{g1} + a_{12} \cdot N_{g2} + a_{13} \cdot N_{g3} + a_{14} \cdot N_{g4} + a_{15} \cdot N_{g5} + f_{g1}(t); \\ \dfrac{dN_{g2}}{dt} = a_{21} \cdot N_{g1} + a_{22} \cdot N_{g2} + a_{23} \cdot N_{g3} + a_{24} \cdot N_{g4} + a_{25} \cdot N_{g5} + f_{g2}(t); \\ \dfrac{dN_{g3}}{dt} = a_{31} \cdot N_{g1} + a_{32} \cdot N_{g2} + a_{33} \cdot N_{g3} + a_{34} \cdot N_{g4} + a_{35} \cdot N_{g5} + f_{g3}(t); \\ \dfrac{dN_{g4}}{dt} = a_{41} \cdot N_{g1} + a_{42} \cdot N_{g2} + a_{43} \cdot N_{g3} + a_{44} \cdot N_{g4} + a_{45} \cdot N_{g5} + f_{g4}(t); \\ \dfrac{dN_{g5}}{dt} = a_{51} \cdot N_{g1} + a_{52} \cdot N_{g2} + a_{53} \cdot N_{g3} + a_{54} \cdot N_{g4} + a_{55} \cdot N_{g5} + f_{g5}(t). \end{cases}$$

путем введения указанных выше упрощений

$$f_{g1}(t) >> f_{gj}(t); \qquad a_{i1} >> a_{ij}, \qquad j \geq 2;$$

$$a_{11} \approx -(a_{21} + a_{31} + a_{41} + a_{51}), \quad a_{11} < 0,$$

характеризующих собою отношения между потоком потребителей от внешней среды и потоками между группами.

С учетом малости параметров общая система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dN_{g1}}{dt} = a_{11} \cdot N_{g1} + f_{g1}(t); \\ \dfrac{dN_{g2}}{dt} = a_{21} \cdot N_{g1}; \qquad a_{11} = -(a_{21} + a_{31} + a_{41} + a_{51}), \quad a_{11} < 0, \\ \dfrac{dN_{g3}}{dt} = a_{31} \cdot N_{g1}; \qquad a_{11} >> a_{ij}, \qquad a_{i1} >> a_{ij}, \quad j \geq 2 \\ \dfrac{dN_{g4}}{dt} = a_{41} \cdot N_{g1}; \qquad f_{g1}(t) >> f_{gj}(t) \\ \dfrac{dN_{g5}}{dt} = a_{51} \cdot N_{g1}. \qquad f_g(t) = \sum\limits_{j=1}^{5} f_{gj}(t) \end{cases}$$

Просуммируем уравнения системы

$$\begin{cases} \dfrac{dN_{g1}}{dt} + \dfrac{dN_{g2}}{dt} + \dfrac{dN_{g3}}{dt} + \dfrac{dN_{g4}}{dt} + \dfrac{dN_{g5}}{dt} = \\ = a_{11} \cdot N_{g1} + a_{21} \cdot N_{g1} + a_{31} \cdot N_{g1} + a_{41} \cdot N_{g1} + a_{51} \cdot N_{g1} + f_g(t); \\ u \\ a_{11} = -(a_{21} + a_{31} + a_{41} + a_{51}), \quad a_{11} < 0. \end{cases}$$

Используя равенства $N_g = \sum\limits_{j}^{5} N_{gj}$,

и $a_{11} = -(a_{21} + a_{31} + a_{41} + a_{51}), \quad a_{11} < 0$, получим

$$\begin{cases} \dfrac{dN_{g1}}{dt} + \dfrac{dN_{g2}}{dt} + \dfrac{dN_{g3}}{dt} + \dfrac{dN_{g4}}{dt} + \dfrac{dN_{g5}}{dt} = \dfrac{d\sum\limits_{1}^{5} N_{gj}}{dt} = \dfrac{dN_g}{dt} = \\ a_{11} \cdot N_{g1} + a_{21} \cdot N_{g1} + a_{31} \cdot N_{g1} + a_{41} \cdot N_{g1} + a_{51} \cdot N_{g1} + f_g(t) = \\ = [a_{11} + (a_{21} + a_{31} + a_{41} + a_{51})] \cdot N_{g1} = f_g(t) \end{cases}$$

получаем уравнение, характеризующее влияние внешних факторов на количество покупателей товарных категорий

$$
\begin{cases}
\dfrac{dN_g}{dt} = f_g(t); \\
\qquad |a_{11}| >> |a_{ij}|, \qquad j \geq 2 \\
|a_{i1}| >> |a_{ij}|
\end{cases}
$$

Функция $\dfrac{dN_g}{dt} = f_g(t)$ представляет собой плановое накопление потребителей продукта как функцию от времени, характеризует жизненный цикл продукта. Неравенство $\begin{matrix} |a_{11}| >> |a_{ij}|, \qquad j \geq 2 \\ |a_{i1}| >> |a_{ij}| \end{matrix}$ можно интерпретировать еще как положение, при котором в каждой группе потребителей есть вакансии для перехода из первой группы потребителей. Такой рынок может поглотить практически весь объем продукта, который выставляется на рынок. На практике при планировании выпуска продукта как функции от времени (планировании жизненного цикла продукта) часто используемым является относительный способ представления, когда результат за текущий характерный отрезок времени задается относительно предыдущего (например, ежемесячный 20%-ый рост объема продаж или ежемесячное 5% -ое сокращение издержек производства). Тогда вместо уравнения вида $\dfrac{dN_g}{dt} = f_g(t)$ можно использовать $\dfrac{dN_g}{dt} = \lambda_g(t) \cdot N_g$. Делая в последнем подстановки

$\frac{dN_g}{dt} = f_g(t)$, $N_g = \int\limits_{t_0}^{t} f_g(\tau)\cdot d\tau$, получаем

$$\frac{dN_g}{dt}(t) = \lambda_g(t)\cdot \int\limits_{t_0}^{t} f_g(\tau)\cdot d\tau$$

или

$$\lambda_g(t) = \frac{f_g(t)}{\int\limits_{t_0}^{t} f_g(\tau)\cdot d\tau}.$$

Зная выражение для $f_g(t)$, нетрудно осуществить переход к $\lambda_g(t)$ и наоборот, зная $\lambda_g(t)$, решаем однородное уравнение $\frac{dN_g}{dt} - \lambda_g(t)\cdot N_g = 0$: $N_g = C\cdot e^{\int_{t_0}^{t} \lambda_g(\tau)\cdot d\tau}$ и после подстановки в $\frac{dN_g}{dt} = \lambda_g(t)\cdot N_g$ вместо N_g окончательно получаем

$$f_g(t) = \lambda_g(t)\cdot C\cdot e^{\int_{t_0}^{t} \lambda_g(\tau)\cdot d\tau} = \frac{dN_g}{dt}.$$

Для случая $f_g(t) = t$ при начальных условиях $f_g(1) = 1$ выражение $\lambda_g(t)$ имеет вид $\lambda_g(t) = \frac{t}{\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}} \to \left.\frac{2}{t}\right|_{t\to\infty}$.

В дальнейшем будем использовать представление $\frac{dN_g}{dt} = \lambda_g(t)\cdot N_g$.

Используя условия нормировки

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \chi_{pr}(S_p,\mu_p,S_{st},\mu_{st})\cdot dS_p\cdot d\mu_p\cdot dS_{st}\cdot d\mu_{st} =$$

$$= \int\limits_{\Omega_{st}} d\Omega_{st} \int\limits_{\Omega_p} d\Omega_p\cdot \chi_{pr} = \int\limits_{\Omega_{pr}} d\Omega_{pr}\cdot \chi_{pr} = N_g$$

запишем уравнение баланса для источников сбыта в модели продвижения продукции

$$\frac{\partial \chi_{pr}}{\partial t}+\frac{\partial \chi_{pr}}{\partial S_p}\cdot\frac{dS_p}{dt}+\frac{\partial \chi_{pr}}{\partial \mu_p}\cdot\frac{d\mu_p}{dt}+\frac{\partial \chi_{pr}}{\partial S_{st}}\cdot\frac{dS_{st}}{dt}+\frac{\partial \chi_{pr}}{\partial \mu_{st}}\cdot\frac{d\mu_{st}}{dt}=\lambda_g(t)\cdot\chi_{pr}$$

$$\frac{dS_p}{dt}=\mu_p, \qquad \frac{dS_{st}}{dt}=\mu_{st}.$$

Уравнение баланса для источников сбыта в модели продвижения продукции дополняет уравнение относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат

$$\frac{\partial \chi}{\partial t}+\frac{\partial \chi}{\partial S}\cdot\mu+\frac{\partial \chi}{\partial \mu}\cdot f=$$

$$=\lambda_{оборуд}\cdot\int_0^{\infty}[\psi[\tilde{\mu}\to\mu]\cdot\tilde{\mu}\cdot\chi(t,S,\tilde{\mu})-\psi[\mu\to\tilde{\mu}]\cdot\mu\cdot\chi(t,S,\mu)]\cdot d\tilde{\mu};$$

$$f=\frac{d\mu}{dt}=\frac{1}{[\chi]_0}\cdot\frac{\partial[\mu_0\cdot\lambda_{оборуд}]}{\partial t}+\frac{1}{[\chi]_0^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial[\mu_0\cdot\lambda_{оборуд}]^2}{\partial S}$$

$$\chi(t,S,\mu)\big|_{t=0}=\chi(0,S,\mu); \quad \chi(t,S,\mu)\big|_{S=0}=\chi(t,0,\mu);$$

$$\chi(t,S,\mu)\big|_{\mu\to\infty}\to 0;$$

$$\int_0^{\infty}dS\cdot[\chi]_0=N_1; \qquad \int_0^{T_{план}}dt\cdot[\chi]_1\Bigg|_{S=Sd}=F_{план}(t).$$

В большинстве практических случаев функционирования предприятия функция $\lambda_g(t)$, характеризующая прирост/убыль кривой жизненного цикла N_g (или например $\langle N_g\cdot S_N\rangle$), является в большинстве практических функций медленноменяющейся функцией в пределах (0.0…..0.15) с размерностью $\frac{1}{месяц}$, может быть представлена в виде ряда:

$$\lambda_g(t)=\lambda_g(t)\Big|_0+\frac{\partial\lambda_g(t)}{\partial t}\Big|_0\cdot t+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2\lambda_g(t)}{\partial t^2}\Big|_0\cdot t^2+0(t^3),$$

что приводит к упрощению решения уравнения баланса для источников сбыта в модели продвижения продукции. Скорость изменения $\lambda_g(t)$ определяется банковскими ставками по кредитам, характеризующими темпы роста производства в отрасли. Не будем останавливаться детально на природе функции $\lambda_g(t)$. Для каждой конкретной модели функция $\lambda_g(t)$ имеет свой вид.

В большинстве практических случаев изменение функции $\lambda_g(t)$ пропорционально мероприятиям продвижения продукта, и может быть записано в виде:

$$d\lambda_g(t)\approx d\Omega_{pr}\cdot\chi_{pr}\cdot S_{pr}\cdot\mu_{pr}.$$

3.7.Модель управления продвижением продукта или товарной категории на этапе зрелости для рынка с квазистационарным случаем открытой системы

Постановка задачи

Быстрый рост новых отраслей не может продолжаться вечно. Хотя момент начала перехода в состояние зрелости точно спрогнозировать нельзя, его можно оттянуть на время путем использования технологических достижений, модернизации товара и проведения других мероприятий по поддержанию рыночного спроса. Тем не менее, когда темпы роста снижаются, переход в стадию зрелости обычно приводит к существенным изменениям в конкурентной среде отрасли [15]:

- Падение потребительского спроса порождает острую конкуренцию за долю рынка. Предприятия, желающие поддерживать существующие темпы роста, начинают искать новые способы переманивания клиентов у своих конкурентов. Дополнительно к этому на рынке, находящемся в стадии зрелости, довольно привлекательным является повышение продаж собственным потребителям. Мероприятия по увеличению продаж собственным клиентам могут включать в себя подарки от предприятия, поиск новых возможностей применения товаров и услуг. Приобретает большое значение ценовая конкуренция, рост рекламы и другие агрессивные методы борьбы. Огромное разнообразие товаров, их характеристик и возможностей положительно влияют на конкурентоспособность товаров на стадии, когда еще растут запросы потребителей. Но такое разнообразие становится очень дорогим, когда усиливается ценовая конкуренция и снижается максимальный уровень прибыли. Производство слишком большого числа подвидов и модификаций товара не дает возможности фирмам достигать экономии за счет длительного производства одного и того же изделия. Снятие с производства такой продукции сокращает издержки и позволяет концентрировать усилия на тех товарах, которые дают максимальный уровень прибыли или по которым можно достигнуть максимального конкурентного преимущества.

- Потребители становятся более привередливыми и требуют больших выгод при осуществлении повторных покупок. Потребители ознакомились с продукцией и аналогом конкурентов, они различают товарные марки и используют имеющуюся у них информацию для того, чтобы заставить продавцов сделать условия покупки более выгодными.

- Конкуренция оказывает большое влияние на издержки и уровень обслуживания. Производители начинают предлагать продукт с теми характеристиками, которые предпочитают покупатели. Выбор покупателей будет зависеть в большей степени от того, какой продавец предложит товар по оптимальному для покупателя соотношению цены и уровня обслуживания. В связи с этим предприятия вынуждены сокращать издержки на единицу продукции. Такие усилия могут быть направлены на различные сферы деятельности: добиться более выгодных цен у поставщиков, переключаться на использование дешевых компонентов, более экономично осуществлять разработку продукта, ликвидировать малоэффективные и дорогостоящие звенья в цепочке ценностей, увеличивать производственную и сбытовую эффективность и проводить реорганизацию внутрифирменного управления.

- Возникают серьезные проблемы при расширении производственных мощностей. Снижение темпов роста отрасли означает замедление развития производственных мощностей. Предприятия начинают отслеживать планы конкурентов по увеличению производственных мощностей и регулировать свои собственные объемы выпуска, чтобы не допустить перепроизводства по отрасли в целом и скопления на складах неликвидной продукции. В условиях медленного роста ошибка в определении того, насколько следует увеличить производственные мощности в течение короткого отрезка времени, отрицательно влияет на прибыли компании в будущем.

- Для производителей становится сложнее разрабатывать новые товарные модификации, находить новые способы применения товара и поддерживать заинтересованность потребителей.

- Усиливается международная конкуренция. Растущие национальные фирмы начинают поиск возможностей сбыта на зарубежных рынках. Некоторые компании ищут пути снижения издержек, переводят свои заводы в страны с дешевой рабочей силой. Усиленная стандартизация товара и распространение ноу-хау в области технологий снижают входные барьеры и дают возможность предприимчивым иностранным компаниям стать серьезными соперниками на рынках многих стран. Лидерства добиваются предприятия и организации, которые овладели самой большой долей на международном рынке и обладают сильными позициями среди конкурентов на большинстве из мировых географических рынков. Производители из развитых промышленных стран находят политику интернационализации весьма привлекательной, так как производственное оборудование, которое уже морально устарело на внутреннем рынке, может быть использовано на предприятиях менее развитых иностранных государств (путь, который позволяет снизить издержки при выходе на зарубежный рынок). Такая возможность возникает тогда, когда 1)иностранные потребители не слишком привередливы и не слишком требовательны к новизне и характеристикам товара; 2)иностранные конкуренты, не представляют большую угрозу и не в состоянии следовать в производстве последнему слову науки и техники. Политика интернационализации приобретает особый смысл, когда имя и репутация фирмы, а также ее товары уже известны на зарубежном рынке.

- Доходность отрасли падает периодически или постоянно. Замедляющийся рост, возросшая конкуренция, более изощренные покупатели и периодически возникающий избыток производственных мощностей оказывает свое негативное влияние на размер прибыли в отрасли. Самый тяжелый удар испытывают предприятия с низкой производительностью.

- Ужесточенная конкуренция порождает ряд слияний и поглощений среди бывших конкурентов, оставляет позади слабых, а в целом приводит к консолидации отрасли. Предприятия, работающие неэффективно, и фирмы со слабыми конкурентными стратегиями в состоянии выжить в быстрорастущей отрасли в условиях роста объемов продаж. Но усиливающаяся конкуренция, сопровождающая стадию зрелости, вынуждает второстепенных и третьестепенных конкурентов вести борьбу за выживание, где побеждает сильнейший.

По мере того, как развивается стадия зрелости и происходят изменения в условиях конкуренции в отрасли, предприятия могут направлять свои усилия на укрепление своих позиций среди конкурентов.

Построение математической модели

В стадии «этапа зрелости» предприятие разделяет рынок с преуспевающими в суровой борьбе конкурентами. «Этап зрелости» характеризуется замедлением роста продаж. Ряд организаций вынуждены покидать рынок вследствие конкуренции. Ценовая политика становится все более ожесточенной. Мероприятия по продвижению продукции на данном этапе базируются на задачах защиты и укрепления лояльности к торговой марке. Увеличение количества потребителей в товарной категории происходит за счет перераспределения рынка.

Рынок и группы потребителей сформированы. Функция $f_{gj}(t)$, характеризующая жизненный цикл продукта (товарной категории) для соответствующей группы потребителей, стремится к нулю $f_{gj}(t) \to 0$. Процесс перехода организации из одной группы потребителей в другую можно моделировать ординарным процессом, вероятность одновременного перехода из одной группы потребителей в другую и из другой в третью ничтожно мала. Такой рынок будем называть сформировавшимся.

Система уравнений, описывающая взаимодействия между группами потребителей (группами лояльности) представляется в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dN_{g1}}{dt} = a_{11} \cdot N_{g1} + a_{12} \cdot N_{g2} + a_{13} \cdot N_{g3} + a_{14} \cdot N_{g4} + a_{15} \cdot N_{g5} + f_{g1}(t); \\ \dfrac{dN_{g2}}{dt} = a_{21} \cdot N_{g1} + a_{22} \cdot N_{g2} + a_{23} \cdot N_{g3} + a_{24} \cdot N_{g4} + a_{25} \cdot N_{g5} + f_{g2}(t); \\ \dfrac{dN_{g3}}{dt} = a_{31} \cdot N_{g1} + a_{32} \cdot N_{g2} + a_{33} \cdot N_{g3} + a_{34} \cdot N_{g4} + a_{35} \cdot N_{g5} + f_{g3}(t); \\ \dfrac{dN_{g4}}{dt} = a_{41} \cdot N_{g1} + a_{42} \cdot N_{g2} + a_{43} \cdot N_{g3} + a_{44} \cdot N_{g4} + a_{45} \cdot N_{g5} + f_{g4}(t); \\ \dfrac{dN_{g5}}{dt} = a_{51} \cdot N_{g1} + a_{52} \cdot N_{g2} + a_{53} \cdot N_{g3} + a_{54} \cdot N_{g4} + a_{55} \cdot N_{g5} + f_{g5}(t). \end{cases}$$

где коэффициенты a_{ij} характеризуют степень перехода потребителей из i-ой группы в j-ую группу, $f_{gj}(t)$ характеризует жизненный цикл продукта (товарной категории).

Для удобства рассмотрения процесса перехода потребителей из одной категории лояльности в другую введем коэффициенты β_{ij} (рис.3.8), связанные с коэффициентом a_{ij} следующими равенствами:

$$a_{22} = -\beta_{32} \qquad a_{32} = \beta_{32} \qquad a_{43} = \beta_{43} \qquad a_{54} = \beta_{54}$$

$$a_{23} = -\beta_{23} \qquad a_{33} = (-\beta_{43} - \beta_{23}) \qquad a_{44} = (-\beta_{54} - \beta_{34}) \qquad a_{55} = -\beta_{45}$$

$$a_{45} = \beta_{45}$$

Коэффициент β_{ij} характеризует переход потребителей в i-ую группу лояльности из j-ой группы. Введение данных коэффициентов упрощает понимание протекания процессов перехода потребителей из категории в категорию, показывая, каким образом формируются значения коэффициентов a_{ij}.

В силу условия $f_{gj}(t) \to 0$ и ординарности процесса можно записать

$$\frac{dN_g}{dt} = f_g(t) \to 0, \qquad N_g(t) \approx const,$$

и система уравнений примет вид:

$$\begin{cases}
\dfrac{dN_{g2}}{dt} = -\beta_{32} \cdot N_{g2}; + \beta_{23} \cdot N_{g3}; \\
\dfrac{dN_{g3}}{dt} = \beta_{32} \cdot N_{g2} \; (-\beta_{43} - \beta_{23}) \cdot N_{g3} + \beta_{34} \cdot N_{g4}; \\
\dfrac{dN_{g4}}{dt} = \beta_{43} \cdot N_{g3} + (-\beta_{54} - \beta_{34}) \cdot N_{g4} + \beta_{45} \cdot N_{g5}; \\
\dfrac{dN_{g5}}{dt} = \beta_{54} \cdot N_{g4} - \beta_{45} \cdot N_{g5}.
\end{cases}$$

Отсутствие первого уравнения системы объясняется наличием условия $f_{gj}(t) \to 0$, $N_g(t) \approx const$ и, как следствие отсутствие перехода потребителей из первой группы потребителей в последующие. Рис.3.8 демонстрирует коэффициенты переходов $\beta_{ij} > 0$ описанной выше системы уравнений.

Группы лояльности N_{g3}(*непостоянные потребители торговой марки*) и N_{g4} (*непостоянные потребители торговой марки и непостоянные потребители других торговых марок*), представляющие собой группу более N_{g3} и менее лояльную N_{g4} к нашей торговой марке и торговой марке других поставщиков, часто объединяют в одну группу. Последнее обстоятельство позволяет уменьшить порядок системы дифференциальных уравнений:

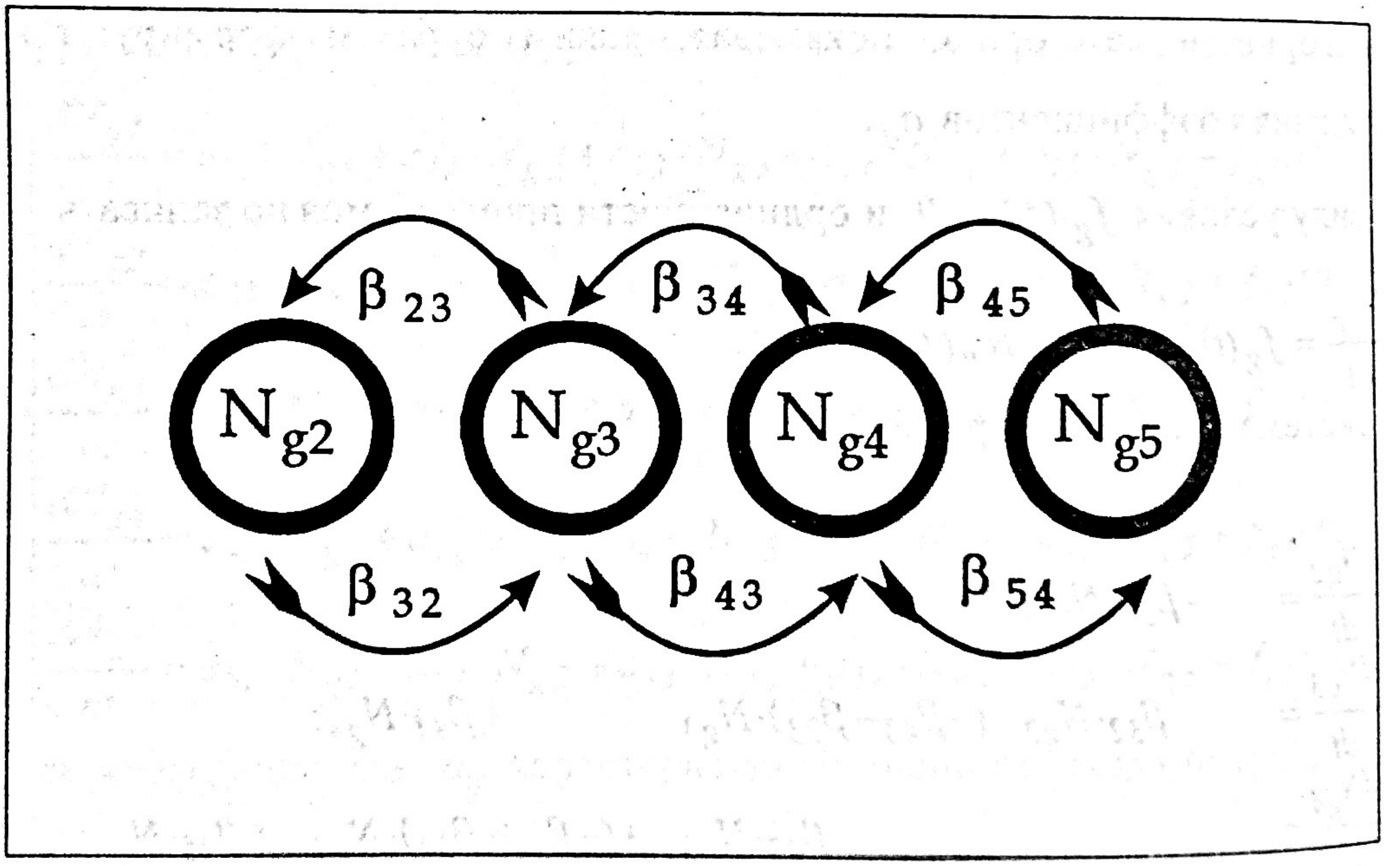

Рис.3.8. Схема возможных переходов потребителей из i-ой группы в j-ую группу вероятность перехода потребителей из i-ой группы в j-ую группу

$$\begin{cases} \dfrac{dN_{g2}}{dt} = & -\beta_{32} \cdot N_{g2}; & +\beta_{23} \cdot N_{g34}; & \\ \dfrac{dN_{g34}}{dt} = & \beta_{32} \cdot N_{g2} & +(-\beta_{23} - \beta_{54}) \cdot N_{g34} & +\beta_{45} \cdot N_{g5}; \\ \dfrac{dN_{g5}}{dt} = & & \beta_{54} \cdot N_{g34} & -\beta_{45} \cdot N_{g5}. \end{cases}$$

В силу равенства $N_g = N_{g2} + N_{g34} + N_{g5}$, одно из уравнений системы можно заменить указанным равенством, где $\dfrac{dN_g}{dt} = f_g(t)$.

тогда последнее приводит систему к виду:

$$\begin{cases} \dfrac{dN_{g2}}{dt} = & & -\beta_{32} \cdot N_{g2}; & +\beta_{23} \cdot (N_g - N_{g2} - N_{g5}); & \\ N_{g34} = & N_g & -N_{g2} & & -N_{g5}; \\ \dfrac{dN_{g5}}{dt} = & & & \beta_{54} \cdot (N_g - N_{g2} - N_{g5}) & -\beta_{45} \cdot N_{g5}. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} N_{g34} = & N_g & -N_{g2} & -N_{g5}; \\ \dfrac{dN_{g2}}{dt} = & \beta_{23} \cdot N_g & -(\beta_{32} + \beta_{23}) \cdot N_{g2}; & -\beta_{23} \cdot N_{g5}; \\ \dfrac{dN_{g5}}{dt} = & \beta_{54} \cdot N_g & -\beta_{54} \cdot N_{g2} & -(\beta_{45} + \beta_{54}) \cdot N_{g5}. \end{cases}$$

Решение системы ищем в виде:

$$N_{g2} = c_1 \cdot k_{11} \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + c_2 \cdot k_{12} \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} + \omega_1 \;;$$

$$N_{g5} = c_1 \cdot k_{21} \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + c_2 \cdot k_{22} \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} + \omega_2;$$

$\omega_1 = const$; $\omega_2 = const$.

Данное решение является решением открытой системы, которая регулируется приблизительным равенством $N_g = N_{g2} + N_{g34} + N_{g5} \approx const$. Первые два правых члена

$$c_1 \cdot k_{11} \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + c_2 \cdot k_{12} \cdot e^{\lambda_2 \cdot t}$$
$$c_1 \cdot k_{21} \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + c_2 \cdot k_{22} \cdot e^{\lambda_2 \cdot t}$$

получаются в результате решения однородной системы уравнений (общее решение однородной системы уравнений). Последние два члена $\omega_1 = const$; $\omega_2 = const$ представляют собой частное решение неоднородной системы уравнений.

Величины двух корней λ_1 и λ_2 получаем из характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} [-(\beta_{32}+\beta_{23})-\lambda] & [-\beta_{23}] \\ [-\beta_{54}] & [-(\beta_{45}+\beta_{54})-\lambda] \end{vmatrix} = 0$$

$$[-(\beta_{32}+\beta_{23})-\lambda] \cdot [-(\beta_{45}+\beta_{54})-\lambda] - [-\beta_{54}] \cdot [-\beta_{23}] = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda \cdot [(\beta_{32}+\beta_{23}) + (\beta_{45}+\beta_{54})] + [(\beta_{32}+\beta_{23}) \cdot (\beta_{45}+\beta_{54}) - \beta_{23} \cdot \beta_{54}] = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-[(\beta_{32}+\beta_{23})+(\beta_{45}+\beta_{54})]}{2} \pm$$

$$\pm \frac{\sqrt{[(\beta_{32}+\beta_{23})+(\beta_{45}+\beta_{54})]^2 - 4 \cdot [(\beta_{32}+\beta_{23}) \cdot (\beta_{45}+\beta_{54}) - \beta_{23} \cdot \beta_{54}]}}{2} =$$

$$= \frac{-[(\beta_{32}+\beta_{23})+(\beta_{45}+\beta_{54})]}{2} \pm$$

$$\pm \frac{\sqrt{[(\beta_{32}+\beta_{23})-(\beta_{45}+\beta_{54})]^2 + 4 \cdot [\beta_{23} \cdot \beta_{54}]}}{2}.$$

При $t \to \infty$ значения N_{g2} и N_{g5} стремятся к своим постоянным величинам

$N_{g2} \to \omega_1$;

$N_{g5} \to \omega_2$,

вычисление которых имеет интерес как основной показатель распределения рынка между производителями продукта.

Подставляя частное решение ω_1, ω_2 в систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} N_{g34} = N_g - N_{g2} - N_{g5}; \\ \dfrac{dN_{g2}}{dt} = \beta_{23} \cdot N_g - (\beta_{32} + \beta_{23}) \cdot N_{g2}; - \beta_{23} \cdot N_{g5}; \\ \dfrac{dN_{g5}}{dt} = \beta_{54} \cdot N_g - \beta_{54} \cdot N_{g2} - (\beta_{45} + \beta_{54}) \cdot N_{g5}. \end{cases}$$

получаем систему уравнений для нахождения ω_1, ω_2:

$$\begin{cases} (\beta_{32} + \beta_{23}) \cdot \omega_1 + \beta_{23} \cdot \omega_2 = \beta_{23} \cdot N_g; \\ \beta_{54} \cdot \omega_1 + (\beta_{45} + \beta_{54}) \cdot \omega_2 = \beta_{54} \cdot N_g \end{cases}$$

откуда

$$\omega_1 = \frac{N_g \cdot \beta_{23} \cdot \beta_{45}}{(\beta_{32} + \beta_{23}) \cdot (\beta_{45} + \beta_{54}) - \beta_{54} \cdot \beta_{23}} =$$

$$\frac{N_g \cdot \beta_{23} \cdot \beta_{45}}{\beta_{32} \cdot \beta_{45} + \beta_{32} \cdot \beta_{54} + \beta_{23} \cdot \beta_{45}} = N_g \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{\beta_{32}}{\beta_{23}} \cdot \left[1 + \dfrac{\beta_{54}}{\beta_{45}} \right]};$$

$$\omega_2 = \frac{N_g \cdot \beta_{32} \cdot \beta_{54}}{(\beta_{32} + \beta_{23}) \cdot (\beta_{45} + \beta_{54}) - \beta_{54} \cdot \beta_{23}} =$$

$$= \frac{N_g \cdot \beta_{32} \cdot \beta_{54}}{\beta_{32} \cdot \beta_{45} + \beta_{32} \cdot \beta_{54} + \beta_{23} \cdot \beta_{45}} = N_g \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{\beta_{45}}{\beta_{54}} \cdot \left[1 + \dfrac{\beta_{23}}{\beta_{32}} \right]}.$$

Полученные выражения показывают, что распределение рынка по продукту среди производителей описывается соотношениями, характеризующими действиями по продвижению продукта со стороны организации по отношению к действиями по продвижению продукта со стороны конкурентов: $\eta_{32}=\dfrac{\beta_{32}}{\beta_{23}}$, $\eta_{54}=\dfrac{\beta_{54}}{\beta_{45}}$.

В случае активных мер со стороны предприятия производителя по лоялизации рынка: $\eta_{32}\to 0$, $\eta_{54}\to 0$ получаем упрощенные выражения для нахождения ω_1, ω_2 с точностью до членов третьего порядка малости:

$$\omega_1 = N_g\cdot\left[1-\eta_{32}-\eta_{32}\cdot\eta_{54}+\frac{1}{2}\cdot\eta_{32}^{\ 2}\right]+\varepsilon(0^3);$$

$$\omega_2 = N_g\cdot\eta_{32}\cdot\eta_{54}+\varepsilon(0^3).$$

В случае активных мер со стороны конкурентов предприятия производителя по лоялизации рынка: $\eta_{32}\to\infty$, $\eta_{54}\to\infty$ упрощенные выражения для нахождения ω_1, ω_2 с точностью до членов третьего порядка малости:

$$\omega_1 = \frac{N_g}{\eta_{32}\cdot\eta_{54}}+\varepsilon(0^3);$$

$$\omega_2 = N_g\cdot\left[1-\frac{1}{\eta_{54}}-\frac{1}{\eta_{32}\cdot\eta_{54}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\eta_{32}^{\ 2}}\right]+\varepsilon(0^3).$$

Запишем уравнение баланса для источников сбыта в модели продвижения продукции

$$\frac{\partial\chi_{pr2}}{\partial t}+\frac{\partial\chi_{pr2}}{\partial S_{p2}}\cdot\frac{dS_{p2}}{dt}+\frac{\partial\chi_{pr2}}{\partial\mu_{p2}}\cdot\frac{d\mu_{p2}}{dt}+\frac{\partial\chi_{pr2}}{\partial S_{st2}}\cdot\frac{dS_{st2}}{dt}+\frac{\partial\chi_{pr2}}{\partial\mu_{st2}}\cdot\frac{d\mu_{st2}}{dt}=$$
$$=\beta_{23}\cdot k_{pr2}\cdot\chi_{pr2}-(\beta_{32}+\beta_{23})\cdot\chi_{pr2}-\beta_{23}\cdot\chi_{pr5}$$

$$\frac{\partial\chi_{pr5}}{\partial t}+\frac{\partial\chi_{pr5}}{\partial S_{p5}}\cdot\frac{dS_{p5}}{dt}+\frac{\partial\chi_{pr5}}{\partial\mu_{p5}}\cdot\frac{d\mu_{p5}}{dt}+\frac{\partial\chi_{pr5}}{\partial S_{st5}}\cdot\frac{dS_{st5}}{dt}+\frac{\partial\chi_{pr5}}{\partial\mu_{st5}}\cdot\frac{d\mu_{st5}}{dt}=$$
$$=\beta_{54}\cdot k_{pr5}\cdot\chi_{pr5}-\beta_{54}\cdot\chi_{pr2}-(\beta_{45}+\beta_{54})\cdot\chi_{pr5}$$

при условии нормировки

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \chi_{pr2}(S_{p2},\mu_{p2},S_{st2},\mu_{st2})\cdot dS_{p2}\cdot d\mu_{p2}\cdot dS_{st2}\cdot d\mu_{st2} =$$

$$= \int_{\Omega_{st2}} d\Omega_{st2} \int_{\Omega_{p2}} d\Omega_{p2}\cdot\chi_{pr2} = \int_{\Omega_{pr2}} d\Omega_{pr2}\cdot\chi_{pr2} = N_{g2}$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \chi_{pr5}(S_{p5},\mu_{p5},S_{st5},\mu_{st5})\cdot dS_{p5}\cdot d\mu_{p5}\cdot dS_{st5}\cdot d\mu_{st5} =$$

$$= \int_{\Omega_{st5}} d\Omega_{st5} \int_{\Omega_{p5}} d\Omega_{p5}\cdot\chi_{pr5} = \int_{\Omega_{pr5}} d\Omega_{pr5}\cdot\chi_{pr5} = N_{g5}\ .$$

Уравнение баланса для источников сбыта в модели продвижения продукции дополняет уравнение относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат

$$\frac{\partial\chi}{\partial t}+\frac{\partial\chi}{\partial S}\cdot\mu+\frac{\partial\chi}{\partial\mu}\cdot f =$$

$$=\lambda_{оборуд}\cdot\int_0^\infty\left[\psi[\tilde{\mu}\to\mu]\cdot\tilde{\mu}\cdot\chi(t,S,\tilde{\mu})-\psi[\mu\to\tilde{\mu}]\cdot\mu\cdot\chi(t,S,\mu)\right]\cdot d\tilde{\mu};$$

$$f=\frac{d\mu}{dt}=\frac{1}{[\chi]_0}\cdot\frac{\partial\left[\mu_0\cdot\lambda_{оборуд}\right]}{\partial t}+\frac{1}{[\chi]_0^{\,2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial\left[\mu_0\cdot\lambda_{оборуд}\right]^2}{\partial S};$$

$$\chi(t,S,\mu)\big|_{t=0}=\chi(0,S,\mu);\quad \chi(t,S,\mu)\big|_{S=0}=\chi(t,0,\mu);$$

$$\chi(t,S,\mu)\big|_{\mu\to\infty}\to 0;$$

$$\int_0^{\infty} dS \cdot [\chi]_0 = N_1; \qquad \int_0^{T_{план}} dt \cdot [\chi]_1 \Bigg|_{S=Sd} = F_{план}(t),$$

где под лояльными покупателями, т.е. покупателями, способными к повторным покупкам, подразумевается разность $N_л = N_g - N_{g5}$. Группы потребителей, входящие в число лояльных к продукту, устанавливают из модели агрегирования с имеющимися потребителями продукта.

3.8.Модель управления продвижением продукта или товарной категории на этапе стагнации отрасли или этапе упадка отрасли для рынка со случаем открытой системы

Постановка задачи

Многие организации действуют в отраслях, где спрос растет более медленными темпами, чем в среднем по промышленности, а иногда наблюдается даже его падение. Хотя в данной ситуации наиболее привлекательной является модель «сбора урожая», обеспечивающая максимальное поступление денежных средств на расчетный счет за короткий промежуток времени и дальнейшее прекращение деятельности, предприятия, прочно стоящие на ногах, при использовании модели управления продвижением продукта или товарной категории на «этапе стагнации отрасли» или «этапе упадка отрасли» могут добиться внушительных результатов [15]. Только стагнирующего спроса недостаточно, чтобы сделать отрасль непривлекательной. Компании, конкурирующие в отраслях, находящиеся в стадиях медленного роста или спада, должны направить свои усилия на решения задач, соответствующих существующим возможностям рынка. Показатели, характеризующие движения денежных средств и рентабельность инвестиций, более приемлемы, чем абсолютные показатели роста, хотя изменение роста объема продаж и изменение доли рынка занимают основополагающее значение. Сильные организации в состоянии увеличить объем продаж за счет слабых конкурентов, а уход последних с рынка или их слияние с другими организациями позволят оставшимся захватить большую часть рынка.

При построении математической модели управления продвижением продукта или товарной категории на «этапе стагнации отрасли» или «этапе упадка отрасли» следует обращать внимание на следующие аспекты:

- Рынки в стадии стагнации или падения спроса, как и все другие рынки, состоят из множества сегментов. Часто один или более сегментов растут быстрыми темпами, в то время как отрасль в целом переживает застой. Концентрация внимания на данных сегментах не только позволит избежать спада в объемах продаж и доходах, но и достигнуть конкурентных преимуществ на целевом сегменте.
- Улучшенное качество и инновации могут оживить спрос путем создания новых растущих сегментов или путем завоевания большего доверия у потребителей. Удачное новшество открывает путь для неценовой конкуренции. Дифференциация, базирующаяся на успешной инновации, дает еще одно

преимущество: другим фирмам в течение определенного периода будет сложно и дорого самим разработать нововведение.

- Когда рост объема продаж не приводит к росту доходов, организация может увеличить размер своей прибыли и доход от капиталовложений путем постоянного сокращения текущих расходов и увеличения производительности. Сокращение издержек возможно за счет 1) отказа от функций и видов деятельности, которые могут быть выполнены другими организациями с меньшими издержками; 2) планирования внутренних процессов; 3) консолидации неиспользованных производственных площадей; 4) использования большего количества сбытовых каналов для достижения объема продаж, необходимого для снижения уровня издержек; 5) выделение из цепи ценностей прибыльных видов деятельности.

Эти аспекты не являются взаимоисключающимися. Вывод на рынок модернизированного продукта может создать быстрорастущий рыночный сегмент. Аналогично увеличение производительности позволит снизить цены, что вызовет рост сегмента, который составляют потребители, чуткие к изменению цен. Следует отметить, что названые выше аспекты являются производными общих моделей управления продвижением продукта или товарной категории на «этапе стагнации отрасли» или «этапе упадка отрасли» и должны быть приспособлены к сложным внешним условиям отрасли. Наиболее привлекательными для построения математических моделей отраслями, находящимися в стадии спада, являются те отрасли, где объем продаж сокращается медленными темпами: там всегда существует «встроенный спрос» и прибыльные ниши. Наиболее типичными ошибками при построении математических моделей можно назвать модели, построенные на вовлеченности в убыточную конкурентную борьбу, слишком быстрое изъятие денежных средств, приводящее к неустойчивому режиму функционирования модели, и пассивное ожидание, представленное в виде отсутствия управляющего воздействия при отклонении системы от имеющегося динамического равновесия.

Построение математической модели

Запишем систему уравнений, характеризующей взаимодействие между группами лояльности, полученную для модели управления продвижением продукта или товарной категории на «этапе зрелости» для рынка с квази стационарным случаем открытой системы:

$$\begin{cases} N_{g34} = N_g - N_{g2} - N_{g5}; \\ \dfrac{dN_{g2}}{dt} = \beta_{23} \cdot N_g - (\beta_{32} + \beta_{23}) \cdot N_{g2} - \beta_{23} \cdot N_{g5}; \\ \dfrac{dN_{g5}}{dt} = \beta_{54} \cdot N_g - \beta_{54} \cdot N_{g2} - (\beta_{45} + \beta_{54}) \cdot N_{g5}. \end{cases}$$

Представим количество потребителей $N_g(t)$ как суперпозицию функций $e^{\lambda_1 \cdot t}$, $e^{\lambda_2 \cdot t}$:

$$\beta_{23} \cdot N_g(t) = g_{11} \cdot e^{\alpha_1 \cdot t} + g_{12} \cdot e^{\alpha_2 \cdot t}$$

$$\beta_{54} \cdot N_g(t) = g_{21} \cdot e^{\alpha_1 \cdot t} + g_{22} \cdot e^{\alpha_2 \cdot t}$$

Решение ищем в виде:

$$N_{g2} = c_1 \cdot k_{11} \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + c_2 \cdot k_{12} \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} + \omega_{11} \cdot e^{\alpha_1 \cdot t} + \omega_{12} \cdot e^{\alpha_2 \cdot t};$$

$$N_{g5} = c_1 \cdot k_{21} \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + c_2 \cdot k_{22} \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} + \omega_{21} \cdot e^{\alpha_1 \cdot t} + \omega_{22} \cdot e^{\alpha_2 \cdot t}.$$

Общее решение имеет вид, полученный для модели управления продвижением продукта или товарной категории на «этапе зрелости» для рынка с квази стационарным случаем открытой системы, и на нем останавливаться не будем.

Рассмотрим вклад частного решения системы дифференциальных уравнений:

$$N_{g2\_ч} = \omega_{11} \cdot e^{\alpha_1 \cdot t} + \omega_{12} \cdot e^{\alpha_2 \cdot t} \quad ;$$

$$N_{g5\_ч} = \omega_{21} \cdot e^{\alpha_1 \cdot t} + \omega_{22} \cdot e^{\alpha_2 \cdot t}.$$

Подставим эти значения и соответствующие значения производных от них в систему уравнений, получим

$$\omega_{11} = \frac{g_{11} \cdot [(\beta_{45} + \beta_{54}) + \alpha_1] + g_{21} \cdot [-\beta_{23}]}{[(\beta_{32} + \beta_{23}) + \alpha_1] \cdot [(\beta_{45} + \beta_{54}) + \alpha_1] - [-\beta_{23}] \cdot [-\beta_{54}]};$$

$$\omega_{21} = \frac{g_{21} \cdot [(\beta_{32} + \beta_{23}) + \alpha_1] + g_{11} \cdot [-\beta_{54}]}{[(\beta_{32} + \beta_{23}) + \alpha_1] \cdot [(\beta_{45} + \beta_{54}) + \alpha_1] - [-\beta_{23}] \cdot [-\beta_{54}]};$$

$$\omega_{12} = \frac{g_{12} \cdot [(\beta_{45} + \beta_{54}) + \alpha_2] + g_{22} \cdot [-\beta_{23}]}{[(\beta_{32} + \beta_{23}) + \alpha_2] \cdot [(\beta_{45} + \beta_{54}) + \alpha_2] - [-\beta_{23}] \cdot [-\beta_{54}]};$$

$$\omega_{21} = \frac{g_{22} \cdot [(\beta_{32} + \beta_{23}) + \alpha_2] + g_{12} \cdot [-\beta_{54}]}{[(\beta_{32} + \beta_{23}) + \alpha_2] \cdot [(\beta_{45} + \beta_{54}) + \alpha_2] - [-\beta_{23}] \cdot [-\beta_{54}]}.$$

Постоянные интегрирования c_1, c_2 находим из начальных условий.

В данной модели частное решение в значительной мере может влиять на общее решение системы дифференциальных уравнений, давая рост количества потребителей по группам лояльности при одновременном сокращении для организации доли рынка.

Дополним модель уравнением баланса для источников сбыта в модели продвижения продукции, вид которой получен в предыдущем параграфе

$$\frac{\partial\chi_{pr2}}{\partial t}+\frac{\partial\chi_{pr2}}{\partial S_{p2}}\cdot\frac{dS_{p2}}{dt}+\frac{\partial\chi_{pr2}}{\partial\mu_{p2}}\cdot\frac{d\mu_{p2}}{dt}+\frac{\partial\chi_{pr2}}{\partial S_{st2}}\cdot\frac{dS_{st2}}{dt}+\frac{\partial\chi_{pr2}}{\partial\mu_{st2}}\cdot\frac{d\mu_{st2}}{dt}=$$

$$=\beta_{23}\cdot k_{pr2}\cdot\chi_{pr2}-(\beta_{32}+\beta_{23})\cdot\chi_{pr2}-\beta_{23}\cdot\chi_{pr5}$$

$$\frac{\partial\chi_{pr5}}{\partial t}+\frac{\partial\chi_{pr5}}{\partial S_{p5}}\cdot\frac{dS_{p5}}{dt}+\frac{\partial\chi_{pr5}}{\partial\mu_{p5}}\cdot\frac{d\mu_{p5}}{dt}+\frac{\partial\chi_{pr5}}{\partial S_{st5}}\cdot\frac{dS_{st5}}{dt}+\frac{\partial\chi_{pr5}}{\partial\mu_{st5}}\cdot\frac{d\mu_{st5}}{dt}=$$

$$=\beta_{54}\cdot k_{pr5}\cdot\chi_{pr5}-\beta_{54}\cdot\chi_{pr2}-(\beta_{45}+\beta_{54})\cdot\chi_{pr5}$$

при условии нормировки

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\chi_{pr2}(S_{p2},\mu_{p2},S_{st2},\mu_{st2})\cdot dS_{p2}\cdot d\mu_{p2}\cdot dS_{st2}\cdot d\mu_{st2}=$$

$$=\int_{\Omega_{st2}}d\Omega_{st2}\int_{\Omega_{p2}}d\Omega_{p2}\cdot\chi_{pr2}=\int_{\Omega_{pr2}}d\Omega_{pr2}\cdot\chi_{pr2}=N_{g2}$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\chi_{pr5}(S_{p5},\mu_{p5},S_{st5},\mu_{st5})\cdot dS_{p5}\cdot d\mu_{p5}\cdot dS_{st5}\cdot d\mu_{st5}=$$

$$=\int_{\Omega_{st5}}d\Omega_{st5}\int_{\Omega_{p5}}d\Omega_{p5}\cdot\chi_{pr5}=\int_{\Omega_{pr5}}d\Omega_{pr5}\cdot\chi_{pr5}=N_{g5}$$

Уравнение баланса для источников сбыта в модели продвижения продукции дополняет уравнение относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат.

$$\frac{\partial \chi}{\partial t}+\frac{\partial \chi}{\partial S}\cdot \mu+\frac{\partial \chi}{\partial \mu}\cdot f=$$

$$=\lambda_{оборуд}\cdot \int\limits_0^\infty \left[\psi[\tilde{\mu}\to\mu]\cdot\tilde{\mu}\cdot\chi(t,S,\tilde{\mu})-\psi[\mu\to\tilde{\mu}]\cdot\mu\cdot\chi(t,S,\mu)\right]\cdot d\tilde{\mu};$$

$$f=\frac{d\mu}{dt}=\frac{1}{[\chi]_0}\cdot\frac{\partial[\mu_0\cdot\lambda_{оборуд}]}{\partial t}+\frac{1}{[\chi]_0{}^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial[\mu_0\cdot\lambda_{оборуд}]^2}{\partial S}$$

$$\chi(t,S,\mu)\big|_{t=0}=\chi(0,S,\mu);\quad \chi(t,S,\mu)\big|_{S=0}=\chi(t,0,\mu);$$

$$\chi(t,S,\mu)\big|_{\mu\to\infty}\to 0;$$

$$\int\limits_0^\infty dS\cdot[\chi]_0=N_1;\qquad \int\limits_0^{T_{план}} dt\cdot[\chi]_1\Bigg|_{S=Sd}=F_{план}(t).$$

где под лояльными покупателями, т.е. покупателями, способными к повторным покупкам, подразумевается разность $N_л=N_g-N_{g5}$.

Аналогичная процедура осуществляется при решении системы дифференциальных уравнений, количество потребителей $N_g(t)$ для которой представляется в виде:

$$\beta_{23}\cdot N_g(t)=\omega_{10}+\omega_{11}\cdot t+\omega_{12}\cdot t^2;$$
$$\beta_{54}\cdot N_g(t)=\omega_{20}+\omega_{21}\cdot t+\omega_{22}\cdot t^2.$$

Существование открытой системы (что выражено наличием в решении системы уравнений вклада частного решения N_{g2_4}, N_{g5_4}) говорит о том, что для поддержания существующих темпов сбыта недостаточно сохранить долю рынка. Темпы расширения рынка должны превышать темпы стагнации по отрасли.

РАЗДЕЛ 4. МЕТОДИКА ИСПОЛЬЗОВАНИЯ САМОСОГЛАСОВАННОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫМ ПРОЦЕССОМ НА ПРИМЕРЕ МОДЕЛИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ РАБОТУ МАШИНОСТРОИТЕЛЬНОГО ПРЕДПРИЯТИЯ

Рассмотрим машиностроительное предприятие с массовым выпуском продукции. Состояние производственной системы будет определяться состоянием множества базовых продуктов системы. Поведение отдельного базового продукта задается инженерно-производственной функцией. Это поведение определяется установленными на предприятии технологическими процессами изготовления конкретно взятой продукции. Состояние базового продукта в виде изделия будем описывать микровеличинами (S_j, μ_j), где S_j(грн) - сумма общих затрат, понесенных предприятием на изготовление j-го базового продукта на текущий момент времени, выраженных в гривнах ; $\mu_j = \dfrac{\Delta S_j}{\Delta t}$; $\Delta t \to 0$ (грн/час) - сумма затрат в единицу времени, которые несет предприятие на изготовление j-го базового продукта в текущий момент времени.

Запишем уравнение, описывающее модель функционирования производственной системы для однономенклатурного предприятия. Состояние производственной системы будем описывать уравнением относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\chi(t,S,\mu)$:

$$\frac{\partial\chi}{\partial t}+\frac{\partial\chi}{\partial S}\cdot\mu+\frac{\partial\chi}{\partial\mu}\cdot f=$$

$$=\lambda_{оборуд}\cdot\int_0^\infty\left[\psi[\tilde{\mu}\to\mu]\cdot\tilde{\mu}\cdot\chi(t,S,\tilde{\mu})-\psi[\mu\to\tilde{\mu}]\cdot\mu\cdot\chi(t,S,\mu)\right]\cdot d\tilde{\mu};$$

$$f=\frac{d\mu}{dt}=\frac{1}{[\chi]_0}\cdot\frac{\partial[\mu_0\cdot\lambda_{оборуд}]}{\partial t}+\frac{1}{[\chi]_0{}^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial[\mu_0\cdot\lambda_{оборуд}]^2}{\partial S}$$

Так как, уравнение относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат содержит частные производные функции $\chi(t,S,\mu)$ по t,S,μ, то для его решения необходимо задать начальные условия

$$\chi(t,S,\mu)\big|_{t=0}=\chi(0,S,\mu)$$

и краевые условия

$$\chi(t,S,\mu)\big|_{S=0}=\chi(t,0,\mu);$$

$$\chi(t,S,\mu)\big|_{\mu\to\infty}\to 0.$$

Систему уравнений дополним условием нормировки функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\int_0^\infty dS\cdot[\chi]_0=N_1$, где $\int_0^\infty d\mu\cdot\chi(t,S,\mu)=[\chi]_0$ концентрация базовых продуктов на элементарном технологическом участке, условием планового выпуска продукции, определяемым спросом:

$$\int_0^\infty d\mu \ \mu \cdot \chi(t,S,\mu)\Big|_{S=Sd} = [\chi]_1\big|_{S=Sd};$$

$$\int_0^{\dot{T}_{план}} dt \cdot [\chi]_1\Big|_{S=Sd} = \Theta(t) = \beta_\Theta \cdot t,$$

$\beta_\Theta = const$.

Как уже отмечалось, решение и анализ уравнения относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\chi(t,S,\mu)$ в фазовом пространстве (S,μ):

$$\frac{\partial\chi}{\partial t} + \frac{\partial\chi}{\partial S}\cdot\mu + \frac{\partial\chi}{\partial\mu}\cdot f =$$

$$= \lambda_{оборуд} \cdot \int_0^\infty [\psi[\tilde{\mu} \to \mu]\cdot\tilde{\mu}\cdot\chi(t,S,\tilde{\mu}) - \psi[\mu \to \tilde{\mu}]\cdot\mu\cdot\chi(t,S,\mu)]\cdot d\tilde{\mu}$$

связано со значительными трудностями. Весьма точный класс точных решений представляется равновесными функциями, которые будем обозначать посредством $\chi_{оборуд}(t,S,\mu)$. Данные функции определяются параметрами технологического процесса, описывающими процесс воздействия оборудования на базовый продукт. Для того, чтобы описать более реальные неравновесные состояния, когда имеется существенное влияние дисперсии

$$\int_0^\infty d\mu \cdot [\mu - \langle\mu\rangle]^2 \cdot \chi(t,S,\mu) = P(t,S) = \sigma^2(t,S) \cdot [\chi]_0$$

и функции $\psi[\mu \to \tilde{\mu}]$ посредством интеграла

$$\lambda_{оборуд} \cdot \int_0^\infty [\psi[\tilde{\mu} \to \mu] \cdot \tilde{\mu} \cdot \chi(t,S,\tilde{\mu}) - \psi[\mu \to \tilde{\mu}] \cdot \mu \cdot \chi(t,S,\mu)] \cdot d\tilde{\mu},$$

- представим функцию распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\chi(t,S,\mu)$ в виде ряда по ε:

$$\chi(t,S,\mu) = \sum_{k=0}^\infty \varepsilon^k \chi_k(t,S,\mu) \;, \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon \chi_{k+1}(t,S,\mu)}{\chi_k(t,S,\mu)} \to 0.$$

Вычислим для рассматриваемой производственной системы безразмерные параметры

$$Pm = \frac{\xi}{\tau \cdot \eta} \quad \text{и} \quad \frac{1}{Kv} = \frac{\xi}{\left[\dfrac{1}{\lambda_{оборуд}}\right]},$$

где τ, η, ξ - характерные время, скорость изменения затрат и шаг по переменной S. Для этого рассмотрим ведомости учетного документооборота на предприятии согласно последовательности операций технологического процесса и построим зависимость затрат, понесенных на продукт, от его места в технологической цепочке:

Таблица 4.1.

Операционные расценки

Вид операции	наименование операции	сменная норма, шт	ФОТ, грн/месяц	кол.дней в месяце	рассценка за операцию, грн/шт
1	2	3	4	5	6
гильотинная порезка	Операция Ш0501	4000	561,2	21,5	0,00816
гильотинная порезка	Операция Ш0502	28000	561,2	21,5	0,00093
штамповка	Операция Ш0503	3500	561,2	21,5	0,00746
штамповка	Операция Ш0504	2800	561,2	21,5	0,00932
штамповка	Операция Ш0505	3000	561,2	21,5	0,00870
штамповка	Операция Ш0506	2800	561,2	21,5	0,00932
сборка	Операция Ш0507	1000	488	21,5	0,02270
штамповка	Операция Ш0508	8000	561,2	21,5	0,00326
штамповка	Операция Ш0509	5000	561,2	21,5	0,00522
штамповка	Операция Ш0510	3700	561,2	21,5	0,00705
штамповка	Операция Ш0511	3700	561,2	21,5	0,00705
штамповка	Операция Ш0512	3800	561,2	21,5	0,00687
штамповка	Операция Ш0513	3200	561,2	21,5	0,00816
штамповка	Операция Ш0514	3200	561,2	21,5	0,00816
штамповка	Операция Ш0515	3200	561,2	21,5	0,00816
токарная	Операция Ш0516	640	760	21,5	0,05523
штамповка	Операция Ш0517	3200	561,2	21,5	0,00816
штамповка	Операция Ш0518	3000	561,2	21,5	0,00870
сварка	Операция Ш0519	680	732	21,5	0,05007
сборка	Операция Ш0520	1200	600	21,5	0,02326
покраска	Операция Ш0521	680	650	21,5	0,04446
упаковка	Операция Ш0522	480	561,2	21,5	0,05438

Таблица 4.2.

Нормы расхода комплектующих на изделие

Материал	Расход материала	Ед.изм	Примечание	Цена за единицу ресурса, грн/шт	Сумма, грн
Лист г/к 2 мм	0,794	кг	см. нормы раскроя	1,250	0,993
Лист г/к 3 мм	0,18115	кг	см. нормы раскроя	1,250	0,226
Проволока ф8мм (Варианты: круг ф8мм)	0,0986	кг	длина 250 мм	1,292	0,127
Сварочная проволока (Варианты: ф1мм, ф1,2мм)	0,016	кг		2,325	0,037
Краска ПФ-115	0,00323	кг		4,000	0,013
Сольвент	0,00321	кг		2,667	0,009
Масло (Варианты: Масло М10Г2К)	0,0005	кг	0,0005556 л	1,292	0,001
Углекислота	0,0006	бал	0,012 кг	17,500	0,011
Гофротара (Варианты: 370х250х520;)	0,05	шт	1 ящик на 20 изделий	1,917	0,096
Ручка ф8 пластиковая	1	шт		0,064	0,064
Фасовка № 9 (18*35*4)	1	шт		0,006	0,006
Скотч (Варианты: упаковочная лента 48х60 табачная)	0,0025	шт	1 шт на 20 ящиков	1,817	0,005

Таблица 4.3.

Технологическое оборудование для изготовления изделия

№	Наименование оборудования на программе	Количество штук на программе
1	Гильотина	Две
2	Пресс 100 тонн К116Е	Три
3	Пресс 67 тонн	Один
4	Пресс 40 тонн	Один
5	Пресс 16 тонн	Один
6	Пресс 6 тонн	Один
7	Токарный станок 16К20	Один
8	Сварочный полуавтомат	Три
9	Заточной станок	Один
10	Сборочное приспособление	Одно
11	Покрасочный участок	Один
12	Упаковочный участок	Один
13	Участок склада хранения готовой продукции	Один

Таблица 4.4.

Сводная ведомость для однопоточной линии

Вид операции	наименование операции	основное время, требуемое на выполнение операции, час	Сумма затрат на сырье и материалы, использовавшиеся на данной технологической операции, грн/шт	Расценка за операцию, грн/шт	Итого за операцию, грн	Итого, грн	Итого время, час	Кол-во оборудования на операцию, шт/грн	Плотность оборудования, шт/грн
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
						0,00000	0,00000		
гильотинная порезка	Операция Ш0501	0,00200	0,99250	0,01427	1,00677	1,00677	0,00200	1	0,993271
штамповка	Операция Ш0502	0,00229	0,00000	0,01631	0,01631	1,02309	0,00429	0,5	30,64861
штамповка	Операция Ш0503	0,00286	0,00000	0,02039	0,02039	1,04348	0,00714	0,5	24,51889
штамповка	Операция Ш0504	0,00267	0,00000	0,01903	0,01903	1,06251	0,00981	0,5	26,27024
штамповка	Операция Ш0505	0,00286	0,00065	0,02039	0,02104	1,08355	0,01267	0,5	23,76619
сборка	Операция Ш0506	0,00800	0,00000	0,04965	0,04965	1,13320	0,02067	1,5	30,21077
Гильотинная порезка	Операция Ш0507	0,00029	0,22643	0,00204	0,22847	1,36168	0,02095	1	4,376885
штамповка	Операция Ш0508	0,00211	0,00000	0,01503	0,01503	1,37670	0,02306	0,5	33,27563
штамповка	Операция Ш0509	0,00250	0,00000	0,01784	0,01784	1,39455	0,02556	0,5	28,02159
штамповка	Операция Ш0510	0,00250	0,00000	0,01784	0,01784	1,41239	0,02806	0,5	28,02159
штамповка	Операция Ш0511	0,00250	0,00000	0,01784	0,01784	1,43023	0,03056	0,5	28,02159
токарная	Операция Ш0512	0,01250	0,00000	0,12082	0,12082	1,55105	0,04306	1	8,276692
штамповка	Операция Ш0513	0,00250	0,00000	0,01784	0,01784	1,56890	0,04556	0,5	28,02159

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
штамповка	Операция Ш0514	0,00267	0,00000	0,01903	0,01903	1,58793	0,04822	0,5	26,27024
сварка	Операция Ш0515	0,01176	0,04770	0,10952	0,15722	1,74515	0,05999	3	19,08098
штамповка	Операция Ш0516	0,00100	0,12736	0,00714	0,13450	1,87965	0,06099	0,5	3,717582
штамповка	Операция Ш0517	0,00160	0,00000	0,01142	0,01142	1,89107	0,06259	0,5	43,78373
штамповка	Операция Ш0518	0,00216	0,00000	0,01543	0,01543	1,90650	0,06475	0,5	32,39996
штамповка	Операция Ш0519	0,00216	0,00000	0,01543	0,01543	1,92193	0,06691	0,5	32,39996
сборка	Операция Ш0520	0,00667	0,00000	0,05087	0,05087	1,97281	0,07358	1,5	29,48571
покраска	Операция Ш0521	0,01176	0,02148	0,09726	0,11874	2,09154	0,08534	1	8,422083
упаковка	Операция Ш0522	0,01667	0,17040	0,11896	0,28936	2,38090	0,10201	2	6,911833

Ниже приведены графики затрат, которые переносятся на базовый продукт при его движении вдоль технологической цепочки.

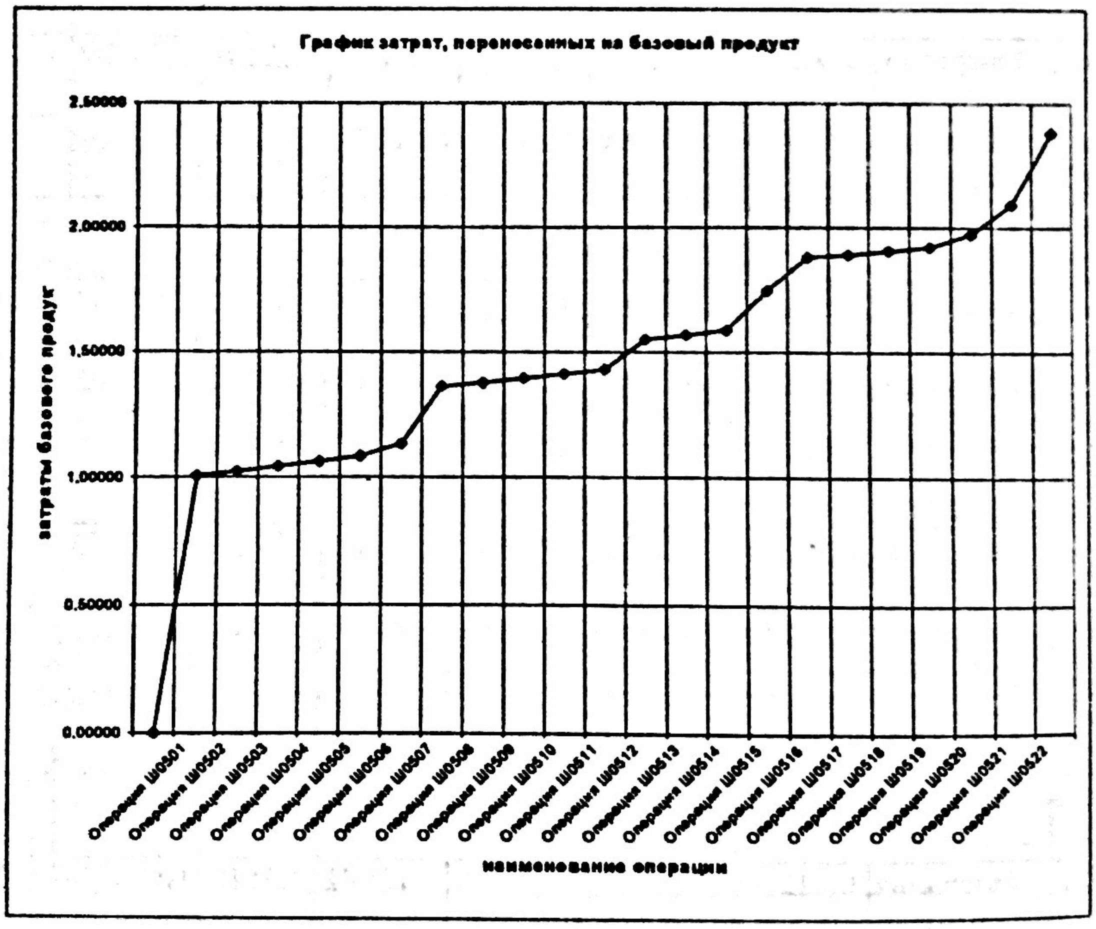

Рис.4.1.График затрат, перенесенных на базовый продукт, в зависимости от его места в технологической цепочке

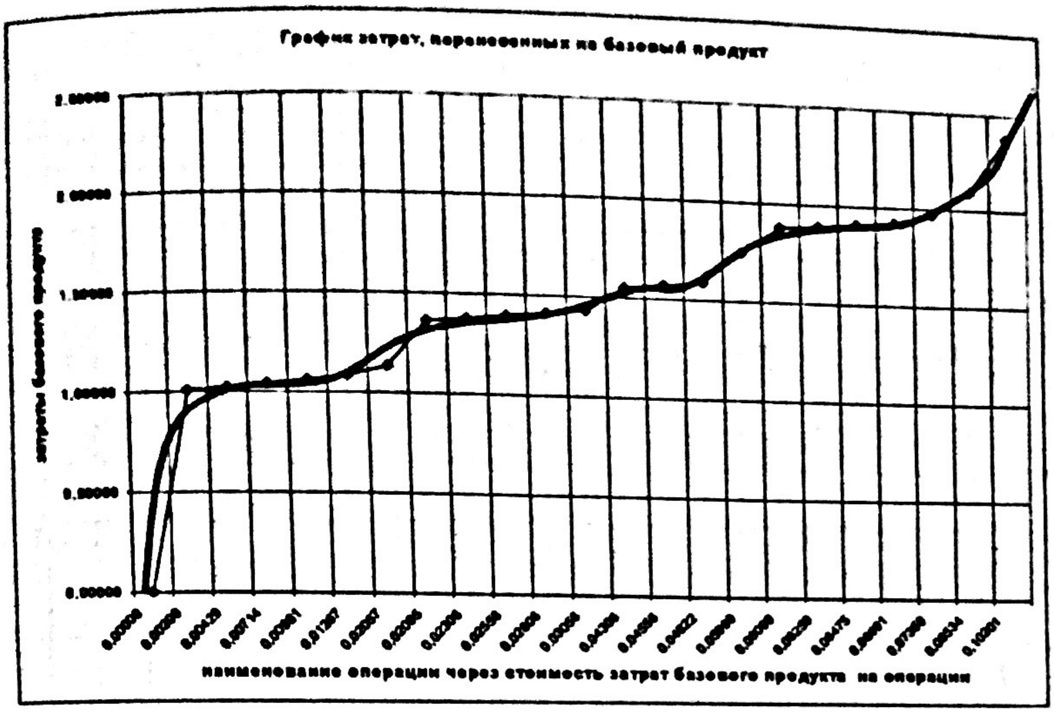

Рис.4.2. График затрат, перенесенных на базовый продукт, в зависимости от его места в технологической цепочке

В нашем случае максимальное время основной операции является 0,0125 часа и относится к операции «Операция Ш0512». Общее время на изготовление базового продукта 0,102 часа. Последнее говорит о том, что одновременно у нас находится в изготовлении $N_{потоков} \approx \dfrac{0{,}102 час а}{0{,}0125 \dfrac{часа}{операция}} \approx 8\_потоков$ базовых продуктов. С учетом этого скорость изменения затрат базового продукта за время основной операции является усредненной по восьми потокам и можно считать постоянной вдоль технологической цепочки со значением, равным

$$\mu_0 = \frac{2{,}38\_грн}{0{,}102\_часа} = 23{,}33 \frac{грн}{час}.$$

Плотность расположения оборудования представлена на графике

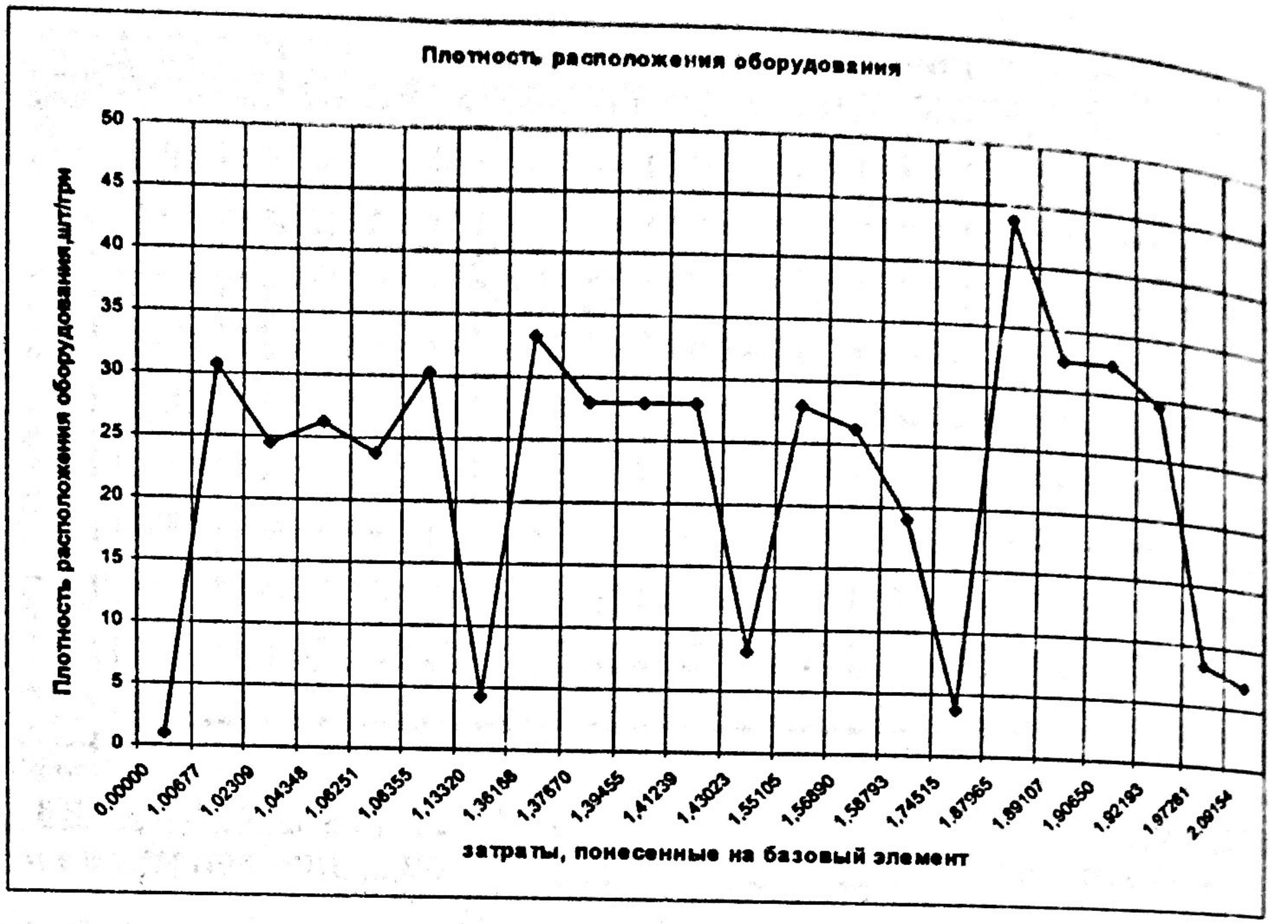

Рис. 4.3. Плотность расположения оборудования

и может быть также усреднена по восьми потокам. Среднее значение приблизительно равно 8-ми единицам оборудования на одну гривну изменения затрат базового элемента.

Значения характерных величин:

$\tau = 0{,}0125\_час$ - характерно время;

$$\eta = \mu_0 = \frac{2{,}38\_грн}{0{,}102\_часа} = 23{,}33\frac{грн}{час}$$ характерная скорость изменения затрат;

$$\xi = 0{,}23\frac{грн}{операция}$$ шаг по переменной S;

и безразмерных параметров:

$$Pm = \frac{\xi}{\tau \cdot \eta} = \frac{0{,}23 \dfrac{грн}{операция}}{[0{,}0125\_час] \cdot \left[23{,}33 \dfrac{грн}{час}\right]} \approx 0{,}8$$

$$\frac{1}{Kv} = \frac{0{,}23 \dfrac{грн}{операция}}{\left[\dfrac{1}{8 \dfrac{шт}{грв}}\right]} = 0{,}23 \frac{грн}{операция} \cdot 8 \frac{шт}{грв} = 1{,}84, \quad Kv = 0{,}54.$$

Решения системы уравнений математической модели управления производством продукции для однопродуктового предприятия для малых чисел Kv (предельный случай $Kv << 1$) при $Pm \approx 1$ будет иметь вид

$$\chi(t,S,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} [Kv]^k \chi_k(t,S,\mu)$$

Откуда

$$0 = \widehat{J}_0;$$

$$\frac{\partial \chi_0}{\partial \widehat{t}} + \frac{\partial \chi_0}{\partial \widehat{S}} \cdot \mu + \frac{\partial \chi_0}{\partial \widehat{\mu}} \cdot \widehat{f} = \widehat{J}_1;$$

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial \widehat{t}} + \frac{\partial \chi_1}{\partial \widehat{S}} \cdot \mu + \frac{\partial \chi_1}{\partial \widehat{\mu}} \cdot \widehat{f} = \widehat{J}_2.$$

Ограничимся нулевым приближением

$$\chi(t,S,\mu) = \sum_{k=0}^{0} [Kv]^k \chi_k(t,S,\mu) = \chi_0(t,S,\mu)$$

для решения уравнения, описывающее поведение функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат

$$\frac{\partial\chi}{\partial t}+\frac{\partial\chi}{\partial S}\cdot\mu+\frac{\partial\chi}{\partial\mu}\cdot f=$$

$$=\lambda_{оборуд}\cdot\int_0^{\infty}\left[\psi[\tilde{\mu}\to\mu]\cdot\tilde{\mu}\cdot\chi(t,S,\tilde{\mu})-\psi[\mu\to\tilde{\mu}]\cdot\mu\cdot\chi(t,S,\mu)\right]\cdot d\tilde{\mu};$$

Решение в нулевом приближении имеет вид

$$\chi(t,S,\mu)=A(t,S)\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{\sigma}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\mu-\frac{\lambda_{оборуд}}{[\chi]_0}\mu_0\right)^2}{\sigma^2}};$$

с начальным

$$\chi(t,S,\mu)\big|_{t=0}=\chi(0,S,\mu)$$

и краевыми условиями

$$\chi(t,S,\mu)\big|_{S=0}=\chi(t,0,\mu);$$

$$\chi(t,S,\mu)\big|_{\mu\to\infty}\to 0.$$

После подстановки

$$\chi(0,S,\mu)=A(0,S)\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{\sigma(0,S)}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\mu-\frac{\lambda_{оборуд}(0,S)}{[\chi]_0(0,S)}\mu_0(0,S)\right)^2}{\sigma^2(0,S)}}$$

$$\chi(t,0,\mu)=A(t,0)\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{\sigma(t,0)}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\mu-\frac{\lambda_{оборуд}(t,0)}{[\chi]_0(t,0)}\mu_0(t,0)\right)^2}{\sigma^2(t,0)}}$$

находим константу интегрирования $A(t,S)$.

Для упрощения будем полагать, что производственный процесс рассматриваемого предприятия не зависит от времени, является стационарным с равномерной плотностью распределения $[\chi]_0$ вдоль технологической цепочки в начальный момент времени. Принимая это во внимание, найдем нормировочную константу A , которую будем считать из описанных выше условий работы предприятия постоянной. Используя равенство:

$$\int_0^{\infty} A_{\Psi} \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\tilde{\mu} - \frac{\lambda_{оборуд}}{[\chi]_0} \mu_0\right)^2}{\sigma^2}} \cdot d\tilde{\mu} = 1 \qquad \text{при} \qquad A_{\Psi} \approx 1$$

получаем

$$\int_0^{\infty} d\mu \cdot \chi(t, S, \mu) = \frac{A}{A_{\Psi}} = [\chi]_0, \qquad A = const$$

Количество базовых продуктов, находящихся в незавершенном производстве на текущий момент времени в цеху рассматриваемого предприятия:

$$\int_0^{\infty} dS \cdot A = N_1 = 30тыс.\_шт.$$

Откуда $A \approx \frac{30000шт}{2{,}38грн} = 12605 \frac{шт}{грн}$

Зная нормировочную константу A , находим:

- темп поточной линии

$$Темп = \frac{1}{r} = [\chi]_1 \left[\frac{штук}{час}\right] = \int_0^{\infty} d\mu \cdot \mu \cdot \chi(t, S, \mu) =$$

$$= A \cdot \frac{\lambda_{оборуд}(t,S)}{A} \mu_0(t,S) = \lambda_{оборуд}(t,S)\mu_0(t,S) =$$

$$= 23{,}33 \frac{грн}{час} \cdot 8 \frac{шт}{грв} = 186{,}64 \frac{шт}{час}.$$

- Такт производственного процесса

$$r = \frac{1}{[\chi]_1}\left[\frac{час}{штук}\right] = \frac{1}{\int_0^{\infty} d\mu \cdot \mu \cdot \chi(t,S,\mu)} = \frac{1}{\lambda_{оборуд}(t,S)\mu_0(t,S)} =$$

$$= \frac{1}{23{,}33 \frac{грн}{час} \cdot 8 \frac{шт}{грв}} = 0{,}0053 \left[\frac{час}{штук}\right]$$

- Ритм передачи заготовок от операции к операции R,

$R = \frac{n'}{[\chi]_1}[час]$, где $n' = 400[штук]$ - размер транспортной партии

$$R = \frac{n'}{[\chi]_1}[час] = \frac{400}{\lambda_{оборуд}(t,S)\mu_0(t,S)}[час] =$$

$$= \frac{400}{23{,}33 \frac{грн}{час} \cdot 8 \frac{шт}{грв}} = 2{,}15[час]$$

- Количество рабочих мест по каждой операции

$$c = t_{шт} \cdot [\chi]_1 [штук]$$

Таблица 4.5.

Вид операции	Наименование операции	Основное время, требуемое на выполнение операции, час	Количество рабочих, требующих на операцию, чел/операция
1	2	3	4
гильотинная порезка	Операция Ш0501	0,00200	0,37328
штамповка	Операция Ш0502	0,00229	0,426606
штамповка	Операция Ш0503	0,00286	0,533257
штамповка	Операция Ш0504	0,00267	0,497707
штамповка	Операция Ш0505	0,00286	0,533257
сборка	Операция Ш0506	0,00800	1,49312
гильотинная порезка	Операция Ш0507	0,00029	0,053326
штамповка	Операция Ш0508	0,00211	0,392926
штамповка	Операция Ш0509	0,00250	0,4666
штамповка	Операция Ш0510	0,00250	0,4666
штамповка	Операция Ш0511	0,00250	0,4666
токарная	Операция Ш0512	0,01250	2,333
штамповка	Операция Ш0513	0,00250	0,4666
штамповка	Операция Ш0514	0,00267	0,497707
сварка	Операция Ш0515	0,01176	2,195765
штамповка	Операция Ш0516	0,00100	0,18664
штамповка	Операция Ш0517	0,00160	0,298624
штамповка	Операция Ш0518	0,00216	0,403546

	3	4
ция 19	0,00216	0,403546
ция 20	0,00667	1,244267
ция 21	0,01176	2,195765
ция 22	0,01667	3,110667
	0,10201	19,0394

і задел

$$= (S_{i+1} - S_i) \cdot [\chi]_0 = \Delta S_i \cdot [\chi]_0$$

Таблица 4.6.

ование ции	Основное время, требуемое на выполнение операции, час	Итого за операцию, грн	Межоперационный задел шт/операция
	3	4	5
перация Ш0501	0,00200	1,00677	12690,4
перация Ш0502	0,00229	0,01631	205,6374
перация Ш0503	0,00286	0,02039	257,0467
перация Ш0504	0,00267	0,01903	239,9103
перация Ш0505	0,00286	0,02104	265,1877
перация Ш0506	0,00800	0,04965	625,8529
перация Ш0507	0,00029	0,22847	2879,902
перация Ш0508	0,00211	0,01503	189,4029

1	2	3	4	5
штамповка	Операция Ш0509	0,00250	0,01784	224,9159
штамповка	Операция Ш0510	0,00250	0,01784	224,9159
штамповка	Операция Ш0511	0,00250	0,01784	224,9159
токарная	Операция Ш0512	0,01250	0,12082	1522,951
штамповка	Операция Ш0513	0,00250	0,01784	224,9159
штамповка	Операция Ш0514	0,00267	0,01903	239,9103
сварка	Операция Ш0515	0,01176	0,15722	1981,816
штамповка	Операция Ш0516	0,00100	0,13450	1695,322
штамповка	Операция Ш0517	0,00160	0,01142	143,9462
штамповка	Операция Ш0518	0,00216	0,01543	194,5218
штамповка	Операция Ш0519	0,00216	0,01543	194,5218
сборка	Операция Ш0520	0,00667	0,05087	641,2427
покраска	Операция Ш0521	0,01176	0,11874	1496,661
упаковка	Операция Ш0522	0,01667	0,28936	3647,368
		0,10201		30011,26

Получив основные макроскопические параметры производственной системы, рассмотрим влияние возмущающих факторов на функционирование системы базовых продуктов для рассматриваемого предприятия (насколько устойчиво рассматриваемое предприятие к возмущающим воздействиям). Под возмущающими факторами будем понимать силы, не учитываемые при описании производственного процесса вследствие их малости по сравнению их с основными силами, влияющими на производство и выпуск продукции. Используя макроскопические параметры производственной системы для невозмущенного состояния, получим систему уравнений состояния производственной системы через малые возмущения макропараметров $[\chi]_0$ и $\langle\mu\rangle$.

Линеаризуем систему уравнений

$$\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t}+\frac{\partial([\chi]_0\cdot\langle\mu\rangle)}{\partial S}=0;$$

$$\frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial t}+\langle\mu\rangle\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial S}=-\frac{1}{[\chi]_0}\cdot\frac{\partial P(t,S)}{\partial S}+f$$

в окрестности невозмущенного движения (в дальнейшем будем называть "плановым движением") макропараметров системы, подставив

$$[\chi]_0=[\chi]_0^*+[y]_0; \qquad \langle\mu\rangle=\langle\mu\rangle^*+\langle y\rangle$$

и разложив функции $\frac{1}{[\chi]_0}\cdot\frac{\partial P(t,S)}{\partial S}$ и $f=\frac{1}{[\chi]_0}\cdot\frac{\partial[\mu_0\cdot\lambda_{оборуд}]}{\partial S}\cdot\mu_0$ в окрестности планового движения макропараметров $[\chi]_0$ и $\langle\mu\rangle$:

$$\frac{1}{[\chi]_0}\cdot\frac{\partial P(t,S)}{\partial S}=\frac{1}{[\chi]_0}\cdot\frac{\partial P(t,S)}{\partial S}\bigg|^*+a_1\cdot[y]_0+\Delta(0^2);$$

$$f=f^*+b_1\cdot[y]_0+\Delta(0^2),$$

где посредством $\Delta(0^2)$ обозначены члены более высокого порядка малости.

Подставляя указанное выше в систему уравнений, получаем

$$\frac{\partial[\chi]_0^*}{\partial t}+\frac{\partial[y]_0}{\partial t}+\frac{\partial\left(\left\{[\chi]_0^*+[y]_0\right\}\cdot\left\{\langle\mu\rangle^*+\langle y\rangle\right\}\right)}{\partial S}=0;$$

$$\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial t}+\frac{\partial\langle y\rangle}{\partial t}+\left\{\langle\mu\rangle^*+\langle y\rangle\right\}\cdot\frac{\partial\left\{\langle\mu\rangle^*+\langle y\rangle\right\}}{\partial S}=-\frac{1}{[\chi]_0}\cdot\left.\frac{\partial P(t,S)}{\partial S}\right|^*+a_1\cdot[y]_0+$$

$$+f^*+b_1\cdot[y]_0+\Delta(0^2).$$

Для невозмущенного состояния производственной системы имеем:

$$\frac{\partial[\chi]_0^*}{\partial t}+\frac{\partial\left([\chi]_0^*\cdot\langle\mu\rangle^*\right)}{\partial S}=0;$$

$$\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial t}+\langle\mu\rangle^*\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle^*}{\partial S}=-\frac{1}{[\chi]_0}\cdot\left.\frac{\partial P(t,S)}{\partial S}\right|^*+f^*.$$

Используя систему уравнений невозмущенного состояния, получим систему уравнений состояния производственной системы через малые возмущения макропараметров $[\chi]_0$ и $\langle\mu\rangle$:

$$\frac{\partial[y]_0}{\partial t}+[\chi]_0^*\cdot\frac{\partial\langle y\rangle}{\partial S}+\frac{\partial[y]_0}{\partial S}\cdot\langle\mu\rangle^*=0;$$

$$\frac{\partial\langle y\rangle}{\partial t}+\langle\mu\rangle^*\cdot\frac{\partial\langle y\rangle}{\partial S}=a_1\cdot[y]_0+b_1\cdot[y]_0,$$

где было использовано условие равномерного распределения заделов для (планового) невозмущенного состояния:

$\frac{\partial[\chi]_0^*}{\partial S}=0$ при

$$\left.\int_0^{T_{план}}dt\cdot[\chi]_1\right|_{S=Sd}=\Theta(t)=\beta_\Theta\cdot t,\qquad \beta_\Theta=const,$$

$$[\chi]_l = \frac{d\Theta}{dt} = \beta_\Theta .$$

Разложим малое возмущение макропараметров $[\chi]_0$ и $\langle\mu\rangle$ в ряд Фурье:

$$[y]_0 \approx \alpha_{01} + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{j1} \cdot sin\left[\frac{2\cdot\pi\cdot j}{S_d}\cdot S\right] + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{j1} \cdot cos\left[\frac{2\cdot\pi\cdot j}{S_d}\cdot S\right];$$

$$\langle y\rangle \approx \alpha_{02} + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{j2} \cdot sin\left[\frac{2\cdot\pi\cdot j}{S_d}\cdot S\right] + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{j2} \cdot cos\left[\frac{2\cdot\pi\cdot j}{S_d}\cdot S\right],$$

где α_{01}, $\alpha_{02}, \alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \beta_{j1}, \beta_{j2}$ коэффициенты разложения в ряд Фурье макропараметров $[\chi]_0$ и $\langle\mu\rangle$. Подставляя вместо малых возмущений их разложение в ряд Фурье, можно получить уравнения в малых возмущениях для каждой из гармоник. Для нулевой гармоники уравнения в малых возмущениях имеют вид:

$$\frac{d\alpha_{01}}{dt} = 0;$$

$$\frac{d\alpha_{02}}{dt} = a_1 \cdot \alpha_{01} + b_1 \cdot \alpha_{01}.$$

Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} [-\lambda] & [0] \\ [-a_1 - b_1] & [-\lambda] \end{vmatrix} = 0;$$

$$\lambda^2 = 0,$$

что говорит о неустойчивости производственной системы относительно первой гармоники случайного возмущения для рассматриваемой производственной системы.

Дополним уравнение межоперационных заделов и уравнение для такта производственного процесса управляющей функцией $v_0(t,S)$ и $v_1(t,S)$:

$$\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t}+\frac{\partial([\chi]_0\cdot\langle\mu\rangle)}{\partial S}=v_0(t,S);$$

$$\frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial t}+\langle\mu\rangle\cdot\frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial S}=-\frac{1}{[\chi]_0}\cdot\frac{\partial P(t,S)}{\partial S}+f+v_1(t,S)$$

описывающими процесс управления межоперационными заделами и тактом производственного процесса.

Пусть u_0, u_1 - управляющие воздействия диспетчерской службы на отклонения производственной системы от планового (невозмущенного) состояния.

Полученные таким образом уравнения управления производственной системой имеют вид

$$\frac{\partial[y]_0}{\partial t}+[\chi]_0^*\cdot\frac{\partial\langle y\rangle}{\partial S}+\frac{\partial[y]_0}{\partial S}\cdot\langle\mu\rangle^*=u_0;$$

$$\frac{\partial\langle y\rangle}{\partial t}+\langle\mu\rangle^*\cdot\frac{\partial\langle y\rangle}{\partial S}=a_1\cdot[y]_0+b_1\cdot[y]_0+u_1.$$

Предполагается, что в ходе управления можно измерять текущие значения макропараметров $[\chi]_0$ (уровень межоперационных заделов), $\langle\mu\rangle$ (аналог такта производственной системы), которые поступают в диспетчерский пункт, например, посредством производственной сигнализации. На основе этого измерения управляющее устройство должно вырабатывать воздействие $u_0(t,[y]_0,\langle y\rangle)$, $u_1(t,[y]_0,\langle y\rangle)$ на объект. Эти воздействия должны обеспечить асимптотическую устойчивость заданного планового (невозмущенного) состояния: $[\chi]_0^* = [\chi]_0^*(t,S)$; $[\chi]_1^* = \langle\mu\rangle^* \cdot [\chi]_0^*$; $\langle\mu\rangle^* = \langle\mu\rangle^*(t,S)$.

Переходим теперь к исследованию задачи об управлении производственным процессом для уравнений первого приближения:

$$\frac{\partial[y]_0}{\partial t} + [\chi]_0^* \cdot \frac{\partial\langle y\rangle}{\partial S} + \frac{\partial[y]_0}{\partial S} \cdot \langle\mu\rangle^* = u_0;$$

$$\frac{\partial\langle y\rangle}{\partial t} + \langle\mu\rangle^* \cdot \frac{\partial\langle y\rangle}{\partial S} = a_1 \cdot [y]_0 + b_1 \cdot [y]_0 + u_1$$

Разложим малое возмущение макропараметров $[\chi]_0$ и $\langle\mu\rangle$ в ряд Фурье:

$$[y]_0 \approx \alpha_{01} + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{j1} \cdot sin\left[\frac{2\cdot\pi\cdot j}{S_d} \cdot S\right] + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{j1} \cdot cos\left[\frac{2\cdot\pi\cdot j}{S_d} \cdot S\right];$$

$$\langle y\rangle \approx \alpha_{02} + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{j2} \cdot sin\left[\frac{2\cdot\pi\cdot j}{S_d} \cdot S\right] + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{j2} \cdot cos\left[\frac{2\cdot\pi\cdot j}{S_d} \cdot S\right];$$

$$u_0 \approx \eta_{01} + \sum_{j=1}^{\infty} \eta_{j1} \cdot sin\left[\frac{2\cdot\pi\cdot j}{S_d} \cdot S\right] + \sum_{j=1}^{\infty} \phi_{j1} \cdot cos\left[\frac{2\cdot\pi\cdot j}{S_d} \cdot S\right];$$

$$u_1 \approx \eta_{02} + \sum_{j=1}^{\infty} \eta_{j2} \cdot sin\left[\frac{2\cdot\pi\cdot j}{S_d} \cdot S\right] + \sum_{j=1}^{\infty} \phi_{j2} \cdot cos\left[\frac{2\cdot\pi\cdot j}{S_d} \cdot S\right],$$

где α_{01}, $\alpha_{02}, \alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \beta_{j1}, \beta_{j2}$, η_{j1}, ϕ_{j1}, η_{j2}, ϕ_{j2} коэффициенты разложения в ряд Фурье малых возмущений макропараметров $[\chi]_0$ и $\langle\mu\rangle$ управляющих воздействий диспетчерской службы на отклонения производственной системы от планового (невозмущенного) состояния u_0, u_1. Подставляя вместо малых возмущений их разложение в ряд

Фурье, можно получить уравнения в малых возмущениях для каждой из гармоник. Для нулевой гармоники уравнения в малых возмущениях имеют вид:

$$\frac{d\alpha_{01}}{dt} = \eta_{01};$$

$$\frac{d\alpha_{02}}{dt} = a_1 \cdot \alpha_{01} + b_1 \cdot \alpha_{01} + \eta_{02}.$$

Критерием качества будет служить интеграл:

$$I = \int_{t_0}^{\infty} \left[d_{11} \cdot \alpha_{01}^2 + d_{22} \cdot \alpha_{02}^2 + g_{11} \cdot \eta_{01}^2 \right] \cdot dt,$$

характеризующий управление производственной системой с минимумом отклонения заделов и такта $\left(d_{11} \cdot \alpha_{01}^2 + d_{22} \cdot \alpha_{02}^2 \right)$ от своего планового состояния при условии оказания минимума воздействия $g_{11} \cdot \eta_{01}^2$. Коэффициенты d_{11}, d_{22}, g_{11} характеризуют соотношения долей параметров оптимизации $[y]_0, \langle y \rangle, u_1$ в интеграле качества $I = \int_{t_0}^{\infty} \left[d_{11} \cdot \alpha_{01}^2 + d_{22} \cdot \alpha_{02}^2 + g_{11} \cdot \eta_{01}^2 \right] \cdot dt.$

Оптимальную функцию Ляпунова $V^0(t, \alpha_{01}, \alpha_{02})$ будем искать в виде квадратичной формы:

$$V^0(t, [y]_0, \langle y \rangle) = c_{11} \cdot \alpha_{01}^2 + c_{22} \cdot \alpha_{02}^2.$$

Составим выражение $B[V^0, t, \alpha_{01}, \alpha_{02}, \eta_{01}, \eta_{02}]$:

$$B[V^0,t,\alpha_{01},\alpha_{02},\eta_{01},\eta_{02}]=\frac{\partial V^0}{\partial t}+\frac{\partial V^0}{\partial \alpha_{01}}\cdot\frac{d\alpha_{01}}{dt}+\frac{\partial V^0}{\partial \alpha_{02}}\cdot\frac{d\alpha_{02}}{dt}+$$

$$+d_{11}\cdot\alpha_{01}^2+d_{22}\cdot\alpha_{02}^2+g_{11}\cdot\eta_{01}^2$$

и запишем первое уравнение

$$\frac{\partial V^0}{\partial t}+\frac{\partial V^0}{\partial \alpha_{01}}\cdot\frac{d\alpha_{01}}{dt}+\frac{\partial V^0}{\partial \alpha_{02}}\cdot\frac{d\alpha_{02}}{dt}+d_{11}\cdot\alpha_{01}^2+d_{22}\cdot\alpha_{02}^2+g_{11}\cdot\eta_{01}^2=0$$

или

$$\frac{dc_{11}}{dt}\cdot\alpha_{01}^2+\frac{dc_{22}}{dt}\cdot\alpha_{02}^2+2\cdot c_{11}\cdot\alpha_{01}\cdot\eta_{01}+$$

$$+2\cdot c_{22}\cdot\alpha_{02}\cdot(a_1\cdot\alpha_{01}+b_1\cdot\alpha_{01}+\eta_{02})+$$

$$+d_{11}\cdot\alpha_{01}^2+d_{22}\cdot\alpha_{02}^2+g_{11}\cdot\eta_{01}^2=0$$

Дополним первое уравнение уравнениями для нахождения оптимальных воздействий

$$\frac{\partial B[V^0,t,\alpha_{01},\alpha_{02},\eta_{01},\eta_{02}]}{\partial \eta_{01}}=2\cdot c_{11}\cdot\alpha_{01}+2\cdot g_{11}\cdot\eta_{01}=0;$$

$$\frac{\partial B[V^0,t,\alpha_{01},\alpha_{02},\eta_{01},\eta_{02}]}{\partial \eta_{02}}=2\cdot c_{22}\cdot\alpha_{02}\cdot\eta_{02}=0.$$

Последние уравнения можно разрешить относительно η_{01},η_{02}:

$$\eta_{01}=-\frac{c_{11}}{g_{11}}\cdot\alpha_{01}; \qquad \eta_{02}=0.$$

Внося полученные значения η_{01}, η_{02} в равенство $B[V^0,t,\alpha_{01},\alpha_{02},\eta_{01},\eta_{02}]=0$, получим уравнение для определения оптимальной функции Ляпунова $V^0(t,\alpha_{01},\alpha_{02})$:

$$\frac{dc_{11}}{dt}\cdot\alpha_{01}{}^2+\frac{dc_{22}}{dt}\cdot\alpha_{02}{}^2+2\cdot c_{11}\cdot\alpha_{01}\cdot\left(-\frac{c_{11}}{g_{11}}\cdot\alpha_{01}\right)+$$

$$+2\cdot c_{22}\cdot\alpha_{02}\cdot(a_1\cdot\alpha_{01}+b_1\cdot\alpha_{01})+$$

$$d_{11}\cdot\alpha_{01}{}^2+d_{22}\cdot\alpha_{02}{}^2+g_{11}\cdot\left(\frac{c_{11}}{g_{11}}\cdot\alpha_{01}\right)^2=0.$$

Приравнивая коэффициенты к нулю при произведениях $\alpha_{0i}\cdot\alpha_{0j}$, получим уравнения для определения величин $c_{ij}(t)$:

при $\alpha_{01}{}^2$: $$\frac{dc_{11}}{dt}-2\cdot\frac{c_{11}{}^2}{g_{11}}+d_{11}+\frac{c_{11}{}^2}{g_{11}}=0$$

при $\alpha_{02}{}^2$: $$\frac{dc_{22}}{dt}+d_{22}=0$$

при $\alpha_{01}\cdot\alpha_{02}$: $$c_{22}\cdot(a_1+b_1)=0$$

Откуда

$$c_{22}=0;$$

$$\frac{dc_{11}}{dt}-\frac{c_{11}{}^2}{g_{11}}+d_{11}=0.$$

С достаточной степенью точности производственный процесс на предприятии можно считать установившимся.

Отсюда $$\frac{dc_{11}}{dt}=0$$

и $$\frac{c_{11}{}^2}{g_{11}}=d_{11}\quad\Rightarrow\quad c_{11}=\sqrt{g_{11}\cdot d_{11}}>0,$$

что дает возможность записать оптимальную функцию Ляпунова $V^0(t,\alpha_{01},\alpha_{02})$ в виде определенно положительной квадратичной формы:

$$V^0(t,[y]_0,\langle y\rangle) = c_{11}\cdot\alpha_{01}^2 = \sqrt{g_{11}\cdot d_{11}}\cdot\alpha_{01}^2 > 0.$$

Наличие оптимальной функцию Ляпунова $V^0(t,\alpha_{01},\alpha_{02})$ в виде определенно положительной квадратичной формы говорит о том, что уравнения, описывающие поведение нулевой гармоники уравнения в малых возмущениях с управляющим воздействием $u_0 \approx \eta_{01}, u_1 \approx \eta_{02}$:

$$\eta_{01} = -\frac{c_{11}}{g_{11}}\cdot\alpha_{01} = -\frac{\sqrt{g_{11}\cdot d_{11}}}{g_{11}}\cdot\alpha_{01} = -\sqrt{\frac{d_{11}}{g_{11}}}\cdot\alpha_{01}; \qquad \eta_{02} = 0$$

для уравнений в малых возмущениях относительно нулевой гармоники:

$$\frac{d\alpha_{01}}{dt} = \eta_{01};$$

$$\frac{d\alpha_{02}}{dt} = a_1\cdot\alpha_{01} + b_1\cdot\alpha_{01} + \eta_{02}.$$

обеспечивают асимптотическую устойчивость производственного процесса относительно возмущений макропараметров $[\chi]_0$ и $\langle\mu\rangle$ при критерии качества управляющего переходного процесса:

$$I = \int_{t_0}^{\infty}\left[d_{11}\cdot\alpha_{01}^2 + d_{22}\cdot\alpha_{02}^2 + g_{11}\cdot\eta_{01}^2\right]\cdot dt.$$

Управляющее воздействие $\eta_{01} = -\sqrt{\frac{d_{11}}{g_{11}}}\cdot\alpha_{01}$, как и следовало ожидать, по знаку противоположно возникшему отклонению $[y]_0 \approx \alpha_{01}$ межоперационного задела $[\chi]_0$, а по величине пропорционально возникшему отклонению $[y]_0 \approx \alpha_{01}$ с коэффициентом пропорциональности, определяемым критерием качества управляющего переходного процесса. Диспетчер предприятия, получив, сведения о состоянии межоперационных заделов, сравнивает их с плановым состоянием заделов. Результат сравнения представляется в виде отклонений $[y]_0 \approx \alpha_{01}$ межоперационного задела $[\chi]_0$. По результату сравнения диспетчер предприятия дает распоряжение на соответствующий участок об устранение отклонения $[y]_0 \approx \alpha_{01}$ посредством изменения межоперационного задела на величину $\eta_{01} = -\sqrt{\frac{d_{11}}{g_{11}}} \cdot \alpha_{01}$, противоположную по знаку возникшему отклонению $[y]_0 \approx \alpha_{01}$. Интересен тот факт, что через управляющее воздействие $\eta_{01} = -\sqrt{\frac{d_{11}}{g_{11}}} \cdot \alpha_{01}$ возникшем отклонением $[y]_0 \approx \alpha_{01}$ межоперационного задела $[\chi]_0$ диспетчер предприятия обеспечивает асимптотическую устойчивость производственного процесса относительно возмущений макропараметров:

межоперационного задела $[\chi]_0$ и темпа $[\chi]_1 = \langle\mu\rangle \cdot [\chi]_0$

при критерии качества управляющего переходного процесса: $I = \int_{t_0}^{\infty} \left[d_{11} \cdot \alpha_{01}{}^2 + d_{22} \cdot \alpha_{02}{}^2 + g_{11} \cdot \eta_{01}{}^2 \right] \cdot dt$. Обеспечивая управление возникшим отклонением $[y]_0 \approx \alpha_{01}$ межоперационного задела $[\chi]_0$, диспетчер предприятия автоматически обеспечивает управление возникающим отклонением темпа $[\chi]_1 = \langle\mu\rangle \cdot [\chi]_0$ производственного процесса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В книге рассмотрены важные элементы теории управления предприятием и основы их использования в экономическом анализе и планировании.

В последнее время теория управления предприятием претерпевает бурный рост. Разработка моделей функционирования предприятия опережает уровень их практического использования. Само по себе опережение научных исследований закономерно, однако оно полезно лишь в том случае, когда внедрение в практику результатов научных исследований идет достаточно быстрыми темпами. В этих условиях всегда существует «спрос» на продукцию науки, что стимулирует ее дальнейшее развитие.

Проводя анализ данных исследований, следует отметить, что при построении моделей описания предприятия довольно часто используется подход, когда случайные параметры функционирования предприятия рассматриваются детерминированными или описываются наперед заданной функцией. Такая постановка задачи, которую можно назвать интегральным подходом, создает впечатление, что удается найти оптимальное единственное решение. Однако, решение задачи определяется исходными данными и введенными интегральными параметрами системы, точность выбора которых желает лучшего. Обычно при построении интегральных характеристик предприятия используется экспертный метод или накопившаяся статистика, на основании которой идет прогноз. Как альтернатива в разрешении вышеописанной проблемы – использование в описании управлением предприятия имитационного моделирования. Такой подход позволяет получить интегральные характеристики системы на основе обобщения большого количества различных вариантов поведения системы. Последнее требует обычно значительных затрат машинного времени и не дает прозрачной зависимости между исходными данными и конечным результатом.

Принципиальной новый подход к решению проблемы рассмотрен в настоящей монографии. Предприятие представлено в виде большого множества элементов, каждый из которых обладает своими микропараметрами. Поведение каждого элемента подчиняется конкретным законам функционирования предприятия, которые определяются установленными на предприятии технологическим процессом, наличием оборудования, трудовых ресурсов и т.д. Состояние системы определяется состоянием элементов системы и может быть описано через функцию распределения случайной величины. Последнее дает возможность получить интегральные характеристики системы и уравнения поведения наблюдаемых макровеличин исходя из моментов функции распределения случайной величины на основании инженерно-технологических расчетов. Наличие уравнений поведения макровеличин позволяет исследовать поведение предприятия в динамике, что является важным инструментом планирования и исследования развития предприятия. Большая свобода маневра, многовариантность выбора элемента системы и координат пространства, в котором рассматривается его движение, открывает широкие возможности для использования предложенной теории в оперативном управлении и стратегическом планировании развития предприятия.

Предложенная в монографии теория описания экономического объекта рассмотрена на основе моделирования деятельности предприятия. Это дало возможность использования математического аппарата на примере функционирования предприятия и сравнить полученные результаты с экспериментальными данными. Однако применение предложенной теории может быть более обширно. В качестве большой системы может быть выбрана, например, отрасль народного хозяйства или, например, экономика отдельно взятой страны. Последнее вызывает интерес к более углубленному развитию предложенной теории.

Каковы же главные направления научных работ по развитию самого математического метода применительно к экономическим объектам? Это методика выбора базового продукта системы (агрегирование, разагрегирование), построение нелинейных динамических моделей функционирования экономических объектов в самосогласованной постановке, учет неопределенности в параметрах модели, исследование системы на устойчивость и получение оптимальной функции управления системой. Работы по этим направлениям продолжаются. Но они находятся не в такой степени завершения, чтобы обеспечить нужные практические результаты. Предстоит сделать еще многое как по решению научных задач, так и по практическому использованию метода. Широкая разработка автоматизированных систем управления предприятием является мощным ускорителем этих процессов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вакуленко Р.Я., Гудименко Г.И. Методологическое обоснование системного управления производственными ресурсами в промышленности. //Справочник. Инженерный журнал №4, 2003. С. 28-34.
2. Сухов С.В. // Системный подход к управлению коммерческим предприятием. «Менеджмент в России и за рубежом», №6, 2001. С. 34-39.
3. Математическое моделирование. Процессы в нелинейных средах. М.: Наука, 1986. - 312 с.
4. Балашевич В.А. Математические методы в управлении производством. – Минск: Вышэйш. школа, 1976. – 334 с.
5. Рыжиков Ю.И. Теория очередей и управление запасами. – СПб: Питер, 2001. – 384 с.
6. Методы оптимизации в экономико-математическом моделировании. – М.: Наука, 1991. - 445 с.
7. Летенко В.А., Родионов Б.Н. Организация, планирование и управление машиностроительным предприятием. Часть 2, Внутризаводское планирование. - М.: Высшая школа, 1979. - 232с.
8. И.Г.Малкин. Теория устойчивости движения. Изд-во “Наука”, М.,1966г, 532стр.
9. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. Перевод с английского Мышкиса А.Д. – М.: Издательство иностранной литературы, 1954. - 215 с.

10. Гальперин Е.А., Красовский Н.Н., О стабилизации установившихся движений нелинейных управляемых систем, ПММ, т.27, вып.6 1963г.

11. Росситер Д.Р., Перси Л. Реклама и продвижение товаров. - СПб.: Питер, 2001. - 656 с.

12. Котлер Филипп. Основы маркетинга. - М.: Прогресс, 1991. - 733 с.

13. Benson Shapiro. Industrial Product Policy: Managing the Existing Product Line. - Cambridge, Mass: Marketing Science Institute, 1977. - p. 9-10.

14. Theodore Levitt, Exploit the Product Life Cycle, Harvard Business Review, December, 1965, p.81-84.

15. Томпсон А.А., Стрикленд А.Дж. Стратегический менеджмент искусство разработки и реализации стратегии. Перевод с английского под редакцией Л.Г.Зайцева, М .И. Соколовой. - М.: ЮНИТИ, 1998. - 576 с.

16. Котляров С.А. Управление затратами. - Санкт-Петербург-Москва-Харьков-Минск: , 2001. - 159 с.

17. БОСС. Бизнес: организация стратегия системы №1 2001 г. Владимир Николаев. Что такое управленческий учет.64 стр.

18. Ковалев В.В. Финансовый анализ. - М.: Финансы и статистика, 1998. - 511 с.

19. Коссов В.В. Межотраслевой баланс. – М.: Экономика, 1966. - 223 с.

20. Гмурман В.Е. Теория вероятности и математическая статистика. - М.: Высшая школа, 1972. - 368 с.

21. Леонтеьв В. Исследования структуры американской экономики. – М.: Государственное статистическое издательство, 1958. - 640 с.

22. Кузьмичев В.Е. Законы и формулы физики. - К.: Наук. думка, 1989. – 864 с.

23. Управление исследованиями, разработками и внедрением новой техники. Под ред. Трапезникова В.А., М.: Экономика, 1977. - 287 с.

24. Кредитование. пер. с англ., Под ред. д.э.н. Гольцберга М.А., ТИБ BHV, К., 1994. - 384 с.

25. Галасюк В., Кабаченко Д., Бобырь О., Расчет коэффициентов, характеризующих финансовую устойчивость предприятия, на основе новой формы бухгалтерского баланса согласно Положению (стандарту) бухгалтерского учета2 «Баланс»., Бизнес№16(379) Бухгалтерия, 2000г., стр 65-70.

26. Положение (стандарт) бухгалтерского учета 2 «Баланс»., Бизнес№28(339) Бухгалтерия. 1999г., стр.53-58.

27. Справочное пособие по математическому анализу, ч.2. Ряды, функции нескольких переменных, кратные и криволинейные интегралы. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Голавач Г.П. – К.: Вища школа, 1979. - 736 с.

28. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. Перевод с английского под редакцией и с предисловием А.А.Конюса. – М.: Прогресс, 1975. - 605 с.

29. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. - М.: Наука, 1985. - 640 с.

30. Новая корпоративная стратегия. Игорь Ансофф. При содействии Эдварда Дж. Макдоннела. – СПб.: Питер, 1999. - 413 с.

31. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. Перевод с английского Г.П.Бабенко под редакцией К.И.Бабенко. – М.: Мир, 1980. - 607 с.

32. Бланк. А.И. Управление активами. – К.: Ника-Центр, 2000. - 720 с.

33. Бочкарев Андрей, Кондратьев Вячеслав и др. Семь нот менеджмента. – М.: Журнал Эксперт, 1998. – 424 с.

34. Уильям Уэллс, Джон Бернет, Сандра Мориарти. Реклама: принципы и практика. – СПб: Питер, 2001. – 736 с.

35. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М.: Мир, 1990. – 512 с.

36. Бланк И.А. Управление прибылью. – К.: Ника-Центр, 1998. – 544 с.

37. Курс для высшего управленческого персонала. – М.: Экономика, 1970. – 807 с.

38. Уткин Э.А. Банковский маркетинг. – М.: ИНФРА-М, Матаинформ, 1994. – 304 с.

39. Вазов В. и Форсайт Дж. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. Перевод с английского Б.М. Будака и Н.П. Жидкова. – М.: Издательство иностранной литературы, 1963. - 487 с.

40. Мазур И.И., Шапиро В.Д. и др. Управление проектами. Справочное пособие. – М.: Высшая школа, 2001. – 875 с.

41. Экономико-математическое обеспечение управленческих решений в менеджменте /В.М. Вартанян, Д.В. Дмитришин, А.И. Лысенко, А.Г. Осиевский и др. – Под ред. В.М. Вартаняна. – Харьков: ХГЭУ, 2001. – 288 с.

42. Саркисян С.А., Ахундов В.М., Минаев Э.С. Большие технические системы. Анализ и прогноз развития. - М.: Наука, 1977. - с. 350.

43. Прицкер А. Введение в имитационное моделирование и язык СЛАМ II: Пер. с англ. – М.: Мир, 1987. – 646 с.

44. Основы моделирования систем / А.С. Кулик. – Учеб. Пособие. Харьков: Харьк. авиац. ин-т, 1998. – 95 с.

45. Синергетика: Сб. статей. Пер. с англ./ Сост. А. И. Рязанов, А.Д Суханов. Под ред. Б.Б. Кадомцева. – М.: Мир, 1984 с.

46. Морозов М.А., Пушкарь А.И., Тридед А.Н. Стратегия и тактика продвижения товара на рынок. – Х.: Основа, 1998. – 176 с.

47. Hicks J.R., Value and Capital. Second edition, London, Oxford University Press, Inc., 1946.

48. Samuelson P.A., Foundations of Economic Analysis, Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1947.

49. Cohen K.J. and Cyert R.M., The Theory of the Firm, Englewood Cliffs N.J., Prentice-Hall, Inc., 1965.

50. Кузин Б., Юрьев В., Шахдинаров Г. Методы и модели управления фирмой. – СПб: Питер, 2001. – 432 с.

51. Кобиляцький Л.С. Управління проектами. - К.: МАУП, 2002. - 200 с.

52. Райзберг А.М. Управление экономикой. - СПб.: ПИТЕР, 2003. - 528 с.

53. Мазур И.И., Шапиро В.Д. и др. Управление проектами. М.: Союзиздат, 2001. – 574с.

54. Багриновский К.А., Рубцов В.А. Модели и методы прогнозирования и долгосрочного планирования. М.: Наука, 1992. – 181 с.

55. Ричард Лэйард. "Макроэкономика". - Москва.: 1994.-357с.

56. Н. Грегори Мэнкью. "Макроэкономика". - М.: МГУ, 1994.-511с.

57. Стиглиц Дж. Ю. Экономика государственного сектора. - М.: Наука, 1997.-256с.

58. Агапова Т.Н., Серёгина Н.В. Макроэкономика: Учебник для ВУЗов. –М.: МГУ, 1997. - 357с.

59. Макконнел К.Р., Брю А.К. Экономика: принципы, проблемы и политика. - М.: Наука, 1993.- 850с.

60. Эдвин Дж. Долан. Макроэкономика. - С.-Петербург: Радиотехника, 1996. –456 с.

61. Фаддеев В.К., Фаддеева Т.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. - М.: Наука, 1974. - 541 с.

62. Ланкастер К., Математическая экономика. - М.: Экономика, 1968. - 490с.

63. Кругман П. Свободная экономика и ценообразование//Вопросы экономики. - 2001. - №3. - С.38-43.

64. Пикулькин А.В. Система государственного управления: Учебник. - М.: МГУ, 2000. – 330 с.

65. Пронкин С.В., Петрунина О.Е. Государственное управление зарубежных стран. - М.: МГУ, 2001. – 219 с.

66. Б.М. Базров. Новый метод организации производства.//Справочник. Инженерный журнал №3, 2003. – С.40-46.

СОДЕРЖАНИЕ

Научное издание

В.П. Демуцкий, В.С. Пигнастая, О.М. Пигнастый

ТЕОРИЯ ПРЕДПРИЯТИЯ: УСТОЙЧИВОСТЬ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ МАССОВОГО ПРОИЗВОДСТВА И ПРОДВИЖЕНИЯ ПРОДУКЦИИ НА РЫНОК

Ответственный за выпуск Попович Д.В.

Редактор Пробоев Е.В.

Подписано к печати 26.12.2003 г.
Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Гарнитура Таймс. Усл. печ. л. 15,81. Уч.-изд. л. 6,03.
Заказ № 2/14.11. Тираж 20 000 экз. (1 завод 1000 экз.). Цена договорная

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина,
61077, г. Харьков, площадь Свободы 4, ХГУ. Издательский центр