



УДК 658.51.012

© 2009

О. М. Пигнастый, В. Д. Ходусов

Расчет производственного цикла с применением статистической теории производственно-технических систем

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Н. А. Азаренковым)

У фазовому технологічному просторі визначено стан виробничої системи. Технологія виробництва задана нормативною технологічною траєкторією. Технологічний процес на кожній технологічній операції представлений технологічними чинниками з нормативними параметрами виробництва і допустимими відхиленнями від них. З використанням цільової функції виробничо-технічної системи записаний вираз для розрахунку тривалості виробничого циклу партії базових продуктів. Одержано умови синхронізації технологічного процесу для безперервного виробничого процесу з розчленовуванням періоду виробничого циклу на фази.

Современное предприятие является сложной стохастической производственно-технической системой [1], элементы которой целенаправленно перемещаются в фазовом технологическом пространстве [2, 3]. Координирование в пространстве и во времени производственно-технологических процессов предприятия требует применения специальных календарно-плановых нормативов. Основным календарно-плановым нормативом производственно-технической системы является продолжительность производственного цикла T_d изготовления базового продукта [4], которая положена в основу расчета остальных календарно-плановых и объемно-календарных нормативов производственной программы и устанавливается как постоянно действующий норматив оперативного планирования производственного процесса. В заводской практике длительность производственного цикла часто определяют без должного обоснования [4], основываясь на статистических данных прошлых периодов. Наиболее точно длительность производственного цикла обработки партии деталей может быть рассчитана на основании планов-графиков работы производственных участков. Определение продолжительности производственного цикла сводится к построению циклового графика выполнения заказа и является трудоемкой процедурой. Для повышения обоснованности и точности расчетов производственного цикла воспользуемся математическим аппаратом и методами статистической теории производственно-технических систем.

Функционирование производственно-технической системы может быть представлено в виде стохастического процесса, в ходе которого элементы производственно-технической системы (базовые продукты или предметы труда) переходят из одного состояния в другое [2, 3, 5]. Состояние производственно-технической системы определяется как состояние всех базовых продуктов. Состояние j -го базового продукта в момент времени t может быть описано микроскопическими величинами S_j, μ_j в технологическом фазовом пространстве (S, μ) [2], где S_j , грн и $\mu_j = dS_j/dt$, грн/ч — соответственно сумма общих затрат d и затрат в единицу времени, перенесенные производственной системой на j -й базовый продукт ($0 < j \leq N$). Микроскопические величины S_j и μ_j определяют технологические траектории базовых продуктов $S_j = S_j(t)$ и $\mu_j = \mu_j(t)$ в окрестности нормативной технологической траектории $S_\psi = S_\psi(t)$ и $\mu_\psi = \mu_\psi(t)$ [6]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial J}{\partial \mu_\psi} - \frac{\partial J}{\partial S_\psi} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial J}{\partial \mu_j} - \frac{\partial J}{\partial S_j} = 0. \quad (1)$$

Здесь $J = J(t, S_j(t), \mu_j(t), S_\psi(t), \mu_\psi(t))$ — целевая функция производственно-технической системы [6]. Нормативная технологическая траектория представляет собой траекторию движения базового продукта со значениями микроскопических величин, равными нормативным технологическим параметрам процесса изготовления базового продукта. Будем полагать, что j -й базовый продукт обрабатывается на каждой технологической операции с незначительными отклонениями от нормативных параметров обработки, заданных технологией производства:

$$\frac{S_j(t)}{S_\psi(t)} \rightarrow 1, \quad \frac{\mu_j(t)}{\mu_\psi(t)} \rightarrow 1. \quad (2)$$

Тогда целевая функция производственно-технической системы J в пренебрежении слагаемыми более высокого порядка малости примет вид [6]:

$$J = J_{\psi 0}(S_\psi, \mu_\psi) = \frac{1}{2} \left(\mu_\psi - \alpha_{\psi V}(S_\psi) \frac{\vartheta_{1\psi}(S_\psi)}{\vartheta_0(S_\psi)} - \alpha_{\psi C}(S_\psi) k_{\psi C}(S_\psi) \right)^2, \quad (3)$$

где $\vartheta_{1\psi}(S_\psi)$ (шт./ч) — производительность технологического оборудования; $\vartheta_0(S_\psi)$ (шт./грн) — плотность межоперационных заделов; $k_{\psi C}(S_\psi)$ (грн/ч) — средняя интенсивность переноса условно-постоянных затрат от оборудования на базовые продукты; $\alpha_{\psi V}(S_\psi)$, $\alpha_{\psi C}(S_\psi)$ — коэффициенты пропорциональности между интенсивностью передачи затрат производственным оборудованием на элементы производственной системы и интенсивностью потребления затрат базовыми продуктами в ходе их технологической обработки.

Будем полагать, что все ресурсы от технологического оборудования переносятся на базовые продукты полностью (отсутствует нецелевое использование ресурсов, брак) и условно-постоянные затраты, необходимые для функционирования производственно-технической системы, много меньше условно-переменных. С учетом этих допущений целевая функция J (3) производственно-технической системы может быть представлена в виде [6]

$$J = \frac{1}{2} \left(\mu_\psi - \alpha_{\psi V}(S_\psi) \frac{\vartheta_{1\psi}(S_\psi)}{\vartheta_0(S_\psi)} \right)^2. \quad (4)$$

Так как время изменения характеристик и параметров технологического процесса значительно превышает время изготовления базового продукта (на протяжении производствен-

ного цикла технологический процесс не меняется), то целевая функция J производственно-технической системы не зависит явно от времени t , допускает интеграл движения

$$H = \mu_\psi \frac{\partial J(S_\psi, \mu_\psi)}{\partial \mu_\psi} - J(S_\psi, \mu_\psi) = \frac{1}{2} \mu_\psi^2 - \frac{1}{2} \left(\alpha_{\psi V}(S_\psi) \frac{\vartheta_{1\psi}(S_\psi)}{\vartheta_0(S_\psi)} \right)^2 = H_0. \quad (5)$$

Интеграл движения (5) есть дифференциальное уравнение первого порядка, интегрируется методом разделения переменных

$$dt = \frac{dS_\psi}{\sqrt{2 \left(H_0 + \frac{1}{2} \left(\alpha_{\psi V}(S_\psi) \frac{\vartheta_{1\psi}(S_\psi)}{\vartheta_0(S_\psi)} \right)^2 \right)}}. \quad (6)$$

Константа интегрирования H_0 определяется начальными условиями технологического процесса обработки партии базовых продуктов

$$\mu_\psi|_{t=0} = \alpha_{\psi V}(0) \frac{\vartheta_{1\psi}(0)}{\vartheta_0(0)}. \quad (7)$$

Начальное условие (7) соответствует допущению, что затраты на хранение базового продукта на момент его обработки равны нулю (пренебрегаем складскими затратами на хранение), следовательно, можно положить $H_0 = 0$. Произведем интегрирование вдоль всей технологической цепочки производственного процесса, найдем длительность производственного цикла T_d базового продукта, на протяжении которой затраты, перенесенные на базовый продукт, меняются от нуля до себестоимости S_d :

$$T_d = \int_0^{T_d} dt = \int_0^{S_d} \frac{dS_\psi}{\alpha_{\psi V}(S_\psi) \left(\frac{\vartheta_{1\psi}(S_\psi)}{\vartheta_0(S_\psi)} \right)}. \quad (8)$$

Заменим в (8) процедуру интегрирования суммированием по всем технологическим операциям $m = 1, \dots, M$ (где M — общее количество технологических операций в технологическом процессе) с использованием выражения для плотности межоперационных заделов

$$\vartheta_0(S_{\psi_m}) \approx \frac{N_{\psi_m}}{\Delta S_{\psi_m}}, \quad (9)$$

получаем

$$T_d \approx \sum_{m=1}^M \frac{1}{\alpha_{\psi V}(S_{\psi_m})} \frac{N_{\psi_m}}{\vartheta_{1\psi}(S_{\psi_m})}. \quad (10)$$

Через N_{ψ_m} обозначена величина межоперационных заделов между $(m-1)$ -й и m -й технологическими операциями. Известно [4], что для технологической операции производительность технологического оборудования $\vartheta_{1\psi}(S_{\psi_m})$ пропорциональна числу рабочих мест c_m , параллельно занятых на выполнении одной технологической операции, и обратно пропорциональна среднему операционному времени $\Delta\tau_{\psi O_m}$

$$\vartheta_{1\psi}(S_{\psi_m}) \approx \frac{c_m}{\Delta\tau_{\psi O_m}}. \quad (11)$$

Для нормативной технологической траектории в случае серийного или массового производства справедливо соотношение

$$\left(\frac{\Delta\tau_{\psi O_m}}{c_m} + \Delta\tau_{\psi C_m} \right) \approx N_{\psi m} \frac{\Delta\tau_{\psi O_m}}{c_m}, \quad (12)$$

где $\Delta\tau_{\psi C_m}$ — время пребывания базового продукта в межоперационном задела между $(m-1)$ -й и m -й технологическими операциями. Подставляя (11) и (12) в (10), получаем привычный вид для расчета длительности производственного цикла T_d технологического процесса в пренебрежении временем естественных процессов $\Delta\tau_{\psi\text{ест}_m}$

$$T_d \approx \sum_{m=1}^M \frac{\frac{\Delta\tau_{\psi O_m}}{c_m} + \Delta\tau_{\psi C_m}}{\alpha_{\psi V}(S_{\psi m})} \approx \sum_{m=1}^{N_m} \frac{\left(\frac{\Delta\tau_{\psi O_m}}{c_m} + \Delta\tau_{\psi C_m} \right)}{s_m q_m} K_{\text{пар}_m}, \quad (13)$$

где s_m (шт./сутки) — число смен в сутках; q_m (сутки) — длительность рабочей смены, выраженной в единицах измерения — сутки; $K_{\text{пар}_m}$ — коэффициент параллельности выполнения $(m-1)$ -й и m -й технологических операций [3].

Коэффициент пропорциональности $\alpha_{\psi V}(S_{\psi m})$ в выражении для целевой функции производственно-технической системы (3) несет следующий технологический смысл:

$$\alpha_{\psi V_m} = \frac{s_m q_m}{K_{\text{пар}_m}}. \quad (14)$$

Для технологического процесса с серийным или массовым выпуском продукции количество базовых продуктов, находящихся в межоперационном заделе, много больше единицы $N_{\psi m} \gg 1$. Используем соотношение (12), запишем

$$T_d \approx \sum_{m=1}^{N_m} \frac{\Delta\tau_{\psi O_m}}{s_m q_m} \frac{N_{\psi m}}{c_m} K_{\text{пар}_m}. \quad (15)$$

Межоперационное время $\Delta\tau_{\psi C_m}$ для технологического процесса с серийным или массовым выпуском продукции является наиболее сложным элементом в расчете длительности производственного цикла T_d , устанавливается без должного обоснования [4, с. 170]. Последнее обстоятельство связано с тем, что количество базовых продуктов $N_{\psi m}$, находящихся в межоперационном заделе на каждой m -й технологической операции, постоянно меняется. Изменение количества базовых продуктов, находящихся в межоперационном заделе, может быть представлено через производительность работы технологического оборудования (14)

$$\begin{aligned} \frac{dN_{\psi m}(t)}{dt} &= \vartheta_{1\psi(m-1)} \Theta_{(m-1)}(t, t_{1(m-1)}, t_{2(m-1)}) - \vartheta_{1\psi m} \Theta_m(t, t_{1m}, t_{2m}), \\ N_{\psi m}(0) &= N_{\psi m0}, \quad \frac{d\vartheta_{1\psi m}}{dt} = 0, \quad m = 1, N_m \quad (0 \leq t_{1m} < t_{2m} \leq T_d). \end{aligned} \quad (16)$$

Функция $\Theta_m(t, t_{1m}, t_{2m})$ определяет членение периода производственного цикла T_d на фазы [4, с. 206] с временами начала t_{1m} и окончания t_{2m} технологической обработки базового продукта на m -й технологической операции:

$$\begin{aligned} \Theta_m(t, t_{1m}, t_{2m}) &= 1 \quad \text{при} \quad t_{1m} \leq t \leq t_{2m}, \\ \Theta_m(t, t_{1m}, t_{2m}) &= 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq t < t_{1m} \quad \text{или} \quad t_{2m} < t \leq T_d. \end{aligned} \quad (17)$$

Добавив систему уравнений (16) к выражению для определения длительности производственного цикла T_d , получаем полную систему уравнений для расчета длительности производственного цикла T_d

$$T_d \approx \sum_{m=1}^M \frac{N_{\psi m}}{\alpha_{\psi V m} \vartheta_{1\psi m}}, \quad m = 1, N_m, \quad N_{\psi m}(0) = N_{\psi m0}, \quad (18)$$

$$\frac{dN_{\psi m}(t)}{dt} = \vartheta_{1\psi(m-1)} \Theta_{(m-1)}(t, t_{1(m-1)}, t_{2(m-1)}) - \vartheta_{1\psi m} \Theta_m(t, t_{1m}, t_{2m}).$$

Система уравнений (16) позволяет получить условия синхронизации производственного процесса, усредненные по периоду $T_{\psi m}$ цикла работы технологического оборудования

$$\int_0^{T_{\psi m}} \left(\frac{dN_{\psi m}(t)}{dt} \right) dt \approx \langle N_{\psi m}(t) \rangle \approx \text{const}, \quad (19)$$

$$\vartheta_{1\psi(m-1)} \int_0^{T_{\psi m}} \Theta_{(m-1)}(t, t_{1(m-1)}, t_{2(m-1)}) dt \approx \vartheta_{1\psi m} \int_0^{T_{\psi m}} \Theta_m(t, t_{1m}, t_{2m}) dt.$$

Произведем интегрирование (19) по периоду $T_{\psi m}$ цикла работы технологического оборудования. Учитывая, что характеристики работы производственного оборудования $\vartheta_{1\psi(m-1)}$ и $\vartheta_{1\psi m}$ за период производственного цикла не меняются со временем (16), используем свойства функции $\Theta_m(t, t_{1m}, t_{2m})$ (17), получим приближительное равенство

$$\vartheta_{1\psi(m-1)}(t_{2(m-1)} - t_{1(m-1)}) = \vartheta_{1\psi m}(t_{2m} - t_{1m}). \quad (20)$$

Условия синхронизации производственного процесса (20) можно выразить через основное операционное время (11):

$$\frac{c_{(m-1)}}{\Delta\tau_{\psi O(m-1)}}(t_{2(m-1)} - t_{1(m-1)}) = \frac{c_m}{\Delta\tau_{\psi O m}}(t_{2m} - t_{1m}). \quad (21)$$

Для технологического процесса с непрерывной работой оборудования

$$(t_{2(m-1)} - t_{1(m-1)}) = (t_{2m} - t_{1m}) = T_{\psi m} \quad (22)$$

условие синхронизации может быть записано в более привычном для управления производством виде [4, с. 192]

$$\frac{\Delta\tau_{\psi O1}}{c_1} = \frac{\Delta\tau_{\psi O2}}{c_2} = \frac{\Delta\tau_{\psi O3}}{c_3} = \dots = \frac{\Delta\tau_{\psi O m}}{c_m} = \dots = \frac{\Delta\tau_{\psi O N_m}}{c_m}. \quad (23)$$

Условие синхронизации (23) используется для расчета работы поточных технологических линий. Для обеспечения бесперебойной работы поточной линии в заданном темпе необходимо насыщение всех стадий производственного процесса заделами, уровень которых должен быть строго регламентирован (19). Квазистационарное значение операционных заделов

$\langle N_{\psi m}(t) \rangle \approx \text{const}$ (19) в течение периода $T_{\psi m}$ работы технологического оборудования позволяет определить усредненную по периоду $T_{\psi m}$ цикла работы оборудования длительность производственного цикла $\langle T_d \rangle$:

$$\langle T_d \rangle \approx \sum_{m=1}^M \frac{\langle N_{\psi m} \rangle}{\alpha_{\psi} V_m \vartheta_{1\psi m}}, \quad m = 1, M. \quad (24)$$

Величина межоперационных заделов $N_{\psi m}$ определяется ограничениями, обусловленными особенностями технологического процесса, размерами транспортных партий, страховыми заделами и т. д. Условие синхронизации (23) в общем случае построения технологического процесса производственно-технических систем трудно реализуемо.

Произведем интегрирование выражения (16) по периоду производственного цикла T_d и, учитывая, что характеристики работы производственного оборудования $\vartheta_{1\psi(m-1)}$ и $\vartheta_{1\psi m}$ за период производственного цикла не меняются со временем, получаем изменения межоперационного задела за период производственного цикла T_d в привычном для управления производством виде [4, с. 206]

$$N_{\psi m}(T_d) - N_{\psi m}(0) \approx \frac{(t_{2(m-1)} - t_{1(m-1)})c_{(m-1)}}{\Delta\tau_{\psi O(m-1)}} - \frac{(t_{2m} - t_{1m})c_m}{\Delta\tau_{\psi Om}}. \quad (25)$$

Таким образом, с использованием целевой функции для партии базовых продуктов производственно-технической системы записано выражение для длительности производственного цикла T_d , которое получено с учетом предположений, что ресурсы от технологического оборудования переносятся на базовые продукты полностью, условно-постоянные затраты много меньше условно-переменных и время естественных процессов много меньше длительности производственного цикла T_d . Показано, что выражение, записанное с учетом указанных выше допущений, совпадает с общепринятым выражением для расчета календарно-плановых нормативов производственно-технических систем [4]. Сформированы условия синхронизации технологического процесса для непрерывного производственного процесса и производственного процесса с членением периода производственного цикла T_d на фазы. Условие синхронизации совпадает с общепринятым выражением в производственной практике [4, с. 192]. Ценность полученных результатов в том, что они не только повторили ранее известные результаты, но и подтвердили условия их применимости.

Материалы работы проработаны на совместных семинарах кафедр экономической кибернетики и прикладной экономики, теоретической ядерной физики Харьковского национального университета им. В. Н. Каразина и Производственного отдела НПФ Технология ООО, г. Харьков в рамках гранта № 14-07 (Фонд фундаментальных исследований Харьковского национального университета).

1. Бир С. Кибернетика и управление производством / Пер. с англ. В. Я. Алтаева / Под ред. А. Б. Челюсткина. – Москва: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963. – 274 с.
2. Демуцкий В. П., Пигнастая В. С., Пигнастый О. М. Стохастическое описание экономико-производственных систем с массовым выпуском продукции // Доп. НАН України. – 2005. – № 7. – С. 66–71.
3. Пряткин Б. В. Техничко-экономический анализ производства. – Москва: ЮНИТИ-ДАНА, 2000. – 399 с.
4. Летенко В. А., Родионов Б. Н. Организация, планирование и управление машиностроительным предприятием. Ч. 2. Внутризаводское планирование. – Москва: Высш. шк., 1979. – 232 с.
5. Демуцкий В. П., Пигнастый О. М. Вопросы устойчивости макроскопических параметров технологических процессов массового производства // Доп. НАН України. – 2006. – № 3. – С. 63–67.

6. Пигнастый О. М. О построении целевой функции производственной системы // Доп. НАН України. – 2007. – № 5. – С. 50–55.

Харьковский национальный университет
им. В. Н. Каразина

Поступило в редакцию 15.06.2009

O. M. Pignasty, V. D. Khodusov

The calculation of a production cycle with application of the statistical theory of industrial-technical systems

In the phase technological space, the state of an industrial system is defined. The production engineering is set by a normative technological trajectory. The technological process on each technological operation is presented by technological factors with normative parameters of production and permissible deviations from them. Using the target function of the technological system, the expression for calculations of a production cycle duration of a batch of base products is given. Conditions of synchronization of a technological process for continuous production with the partitioning of the period of a production cycle into phases are obtained.