Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

5 • 2006

ІНФОРМАТИКА

УДК 658.51.012

О. М. Пигнастый

Задача оптимального оперативного управления макропараметрами производственной системы с массовым выпуском продукции

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. Ф. Клепиковым)

A model of the control over the operative activity of an enterprise is proposed.

Развитие естественных наук приводит к распространению характерных для них методов решения задач на смежные области знания [1]. К настоящему времени современная методология анализа нелинейных динамических систем оформилась в новое научное направление, называемое синергетикой [2, 3]. Эта междисциплинарная наука нацелена на выявление общих принципов эволюции и самоорганизации сложных систем в различных областях науки и техники. Динамические математические модели, хорошо зарекомендовавшие себя в физике, все чаще и чаще находят применение в экономике [4–6]. Исключительное значение приобретают математические методы в планировании и управлении массовым производством, огромные масштабы которого в сочетании с качественными изменениями в производительных силах ставят перед обществом новые задачи и требуют новых методов их решения [7–9].

Функционирование современного массового производства может быть представлено в виде стохастического процесса, в ходе которого производственная система переходит из одного состояния в другое [9]. Макропараметрами такой системы являются заделы базовых продуктов $[\chi]_0$ между технологическими операциями цепочки производственного процесса и темп перемещения базовых продуктов $[\chi]_1$ от одной технологической операции к другой [10]. Под базовым продуктом (или предметом труда) понимается элемент производственной системы, на который происходит перенос стоимости живого труда, сырья и амортизации орудий труда при его движении по операционной цепочке технологических карт. В ходе такого движения происходит превращение исходного сырья в готовый продукт путем целенаправленного воздействия на предмет труда технологического оборудования. Состояние j-базового продукта описывается микроскопическими величинами (S_j, μ_j), где S_j(грн) и $\mu_j = \lim\limits_{\Delta t \to 0} (\Delta S_j/\Delta t)$ (грн/ч) — соответственно сумма общих затрат и затрат в единицу времени, перенесенных производственной системой на j-й базовый продукт. Макропараметры для описания функционирования производственной системы представляют собой нулевой $[\chi]_0$ и первый $[\chi]_1$ моменты функции распределения $\chi(t, S, \mu)$ базовых продуктов по скоростям изменения затрат μ в фазовом пространстве (S, μ), удовлетворяющей кинетическому уравнению [11]:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial \chi}{\partial S}\mu + \frac{\partial \chi}{\partial \mu} f(S) = J(t, S, \mu). \tag{1}$$

Инженерно-производственная функция $f_j(S)$ определяется из документооборота предприятия, характеризует установленный на предприятии технологический процесс изготовления продукции в соответствии с производственным планом, а генераторная функция $j(t, S, \mu)$ задается плотностью расположения оборудования вдоль технологической цепочки и его техническими характеристиками [12]. Замкнутая система уравнений для макропараметров производственной системы $[\chi]_0$, $[\chi]_1$ в нулевом приближении по малому параметру $Kv = (l_{\text{св}}/\xi) \ll 1$, представляющая собой отношение длины $l_{\text{св}}$ свободного перемещения базовых продуктов между единицами оборудования к характерному размеру технологической цепочки ξ, имеет вид [11]:

$$\frac{\partial [\chi]_0}{\partial t} + \frac{\partial [\chi]_1}{\partial S} = 0, \qquad \frac{\partial [\chi]_1}{\partial t} + \frac{\partial [\chi]_2}{\partial S} = f(t, S)[\chi]_0, \qquad [\chi]_2 = [\chi]_1 \frac{[\chi]_{1\psi}}{[\chi]_0}, \tag{2}$$

где $[\chi]_2$ — второй момент функции распределения $\chi(t, S, \mu)$ базовых продуктов по скоростям изменения затрат μ, а макровеличина $[\chi]_{1\psi}$ задается паспортными данными оборудования [12]. Системе уравнений (2) с заданными начальными и граничными условиями соответствует решение

$$[\chi]_n^* = [\chi]_n^*(t, S), \tag{3}$$

которое является производственным планом. Дополним уравнение заделов и уравнение темпа движения базовых продуктов вдоль технологической цепочки (2) функциями управления межоперационными заделами $\Upsilon_0(t, S)$ и темпом производственного процесса $\Upsilon_1(t, S)$:

$$\frac{\partial [\chi]_0}{\partial t} + \frac{\partial [\chi]_1}{\partial S} = \Upsilon_0(t, S); \qquad \frac{\partial [\chi]_1}{\partial t} + \frac{\partial [\chi]_2}{\partial S} = f(t, S)[\chi]_0 + \Upsilon_1(t, S);$$
$$[\chi]_2 = [\chi]_1 \frac{[\chi]_{1\psi}}{[\chi]_0}. \tag{4}$$

Пусть макропараметры производственной системы $[\chi]_0$ и $[\chi]_1$ в ходе производственной деятельности получат малые возмущения $[y]_0$ и $[y]_1$ относительно своего планового (невозмущенного) состояния:

$$[y]_n = [\chi]_n - [\chi]_n^*, \tag{5}$$

для ликвидации которых от диспетчерской службы предприятия требуются управляющие воздействия u_0, u_1:

$$Y_n(t, S) - Y_n^*(t, S) = \sum_{m=0}^{1} q_{nm} u_m + (O^2). \tag{6}$$

С учетом (3), (5) и (6) линеаризованные уравнения оперативного управления производственной системой принимают вид:

$$\frac{\partial[y]_0}{\partial t} + \frac{\partial[y]_1}{\partial S} = \sum_{m=0}^{1} q_{0m}u_m + R_0(t, [y]_n, u_m),$$

$$\frac{\partial[y]_1}{\partial t} + \frac{\partial[y]_1}{\partial S}B_1 + [y]_1 A_1 + \frac{\partial[y]_0}{\partial S}B_0 + [y]_0 A_0 = \sum_{m=0}^{1} q_{1m}u_m + R_1(t, [y]_n, u_m), \tag{7}$$

где

$$A_0 = -\frac{\partial B_0}{\partial S} - \frac{\partial(f(t,S)[\chi]_0)}{\partial[\chi]_0}\bigg|_{[\chi]_n=[\chi]_n^*}, \qquad B_0 = -\frac{[\chi]_1^*[\chi]_{1\psi}^*}{([\chi]_0^*)^2},$$

$$A_1 = \frac{\partial \mathrm{B}_1}{\partial S} - \frac{\partial(f(t,S)[\chi]_0)}{\partial[\chi]_1}\bigg|_{[\chi]_n=[\chi]_n^*}, \qquad B_1 = \frac{[\chi]_{1\psi}}{[\chi]_0^*}. \tag{8}$$

Функции q_{nm} представляют собой ограниченные и непрерывные функции времени; $R_j(t, [y]_n, u_m)$ — функции, разлагающиеся в области $t \geqslant 0$, $|[y]_n| < H_n$ в ряд по переменным (5), причем разложения начинаются членами не ниже второго порядка малости; H_n — наперед заданные сколь угодно малые величины. Период существования возмущения $T_{\text{возм}}$ производственных макроскопических показателей на практике составляет от нескольких дней до нескольких недель, что много меньше периода изменения коэффициентов (8), определяемого стратегическим управлением предприятия:

$$\frac{B_1}{T_{\text{возм}}} \gg \frac{\partial B_1}{\partial t}, \qquad \frac{\mathrm{B}_0}{T_{\text{возм}}} \gg \frac{\partial \mathrm{B}_0}{\partial t}, \qquad \frac{A_1}{T_{\text{возм}}} \gg \frac{\partial A_1}{\partial t}, \qquad \frac{A_0}{T_{\text{возм}}} \gg \frac{\partial A_0}{\partial t}. \tag{9}$$

Прикладные задачи оперативного управления макропараметрами производственной системы с массовым выпуском продукции наряду с требованиями асимптотической устойчивости заданного планового состояния (3) содержат обычно пожелания о наименьшей затрате производственных ресурсов (энергии, сырья, трудовых ресурсов и т. д.), расходуемых на формирование управляющих воздействий $u_m(t, [y]_n)$. Такие пожелания можно выразить в виде условия минимальности некоторого интеграла:

$$I = \int_{t_0}^{\infty} \omega(t, [y]_n, u_m)\, dt. \tag{10}$$

Здесь $\omega(t, [y]_n, u_m)$ — неотрицательная функция, которая должна обеспечивать достаточно быстрое затухание возникших возмущений $[y]_n$ макропараметров производственной системы, удовлетворительно оценивать ресурсы, затрачиваемые на формирование управляющих воздействий $u_m(t, [y]_n)$ и дать возможность представить решение задачи в простой и замкнутой форме. Этим требованиям в большинстве практических случаев удовлетворяет функция в виде определенно положительной квадратичной формы

$$\omega = \sum_{n,m=0}^{1} \alpha_{n,m}[y]_n[y]_m + \sum_{n,m=0}^{1} \beta_{n,m}u_n u_m. \tag{11}$$

Задачу об управлении макропараметрами производственной системы с массовым выпуском продукции при условии минимума критерия качества (11) будем называть задачей об оптимальном оперативном управлении производственной системой с массовым выпуском продукции. Пусть выбран критерий качества производственного процесса в виде интеграла (10). Требуется найти такие управляющие воздействия $u_m(t,[y]_n)$, которые обеспечат асимптотическую устойчивость планового состояния производственной системы (3) в силу уравнений в малых возмущениях (7). При этом, какие бы ни были другие управляющие воздействия $u_m^*(t,[y]_n)$, решающие задачу, должно выполняться неравенство

$$I = \int\limits_{t_0}^{\infty} \omega(t,[y]_n^0,u_m^0)dt \leqslant \int\limits_{t_0}^{\infty} \omega(t,[y]_n^*,u_m^*)dt \tag{12}$$

для всех начальных условий в области существования решений системы уравнения (7). Как правило, функции $u_m^0(t,[y]_n)$, разрешающие задачу об оптимальном оперативном управлении производственной системой с массовым выпуском продукции, определяются однозначно [14]. Представим критерии качества в виде:

$$I = \int\limits_{t_0}^{\infty}\left[\frac{1}{S_d}\int\limits_{0}^{S_d}\left(\sum_{n,m=0}^{1}\alpha_{nm}[y]_n[y]_m + \sum_{n,m=0}^{1}\beta_{nm}u_m u_n\right)dS\right]dt, \tag{13}$$

где S_d — средняя себестоимость изготовления базового продукта.

Для задач об оптимальном оперативном управлении процессами массового производства, как и для общей задачи устойчивости, может быть развита теория исследования по первому приближению [13]. Используя разложение малых возмущений $[y]_n$ макропараметров $[\chi]_n$ и управляющих воздействий u_m в ряд Фурье с коэффициентами $\{y_n\}_0$, $\{y_n\}_j$, $[y_n]_j$, $\{u_n\}_0$, $\{u_n\}_j$, $[u_n]_j$:

$$\begin{gathered}[y]_n = \{y_n\}_0 + \sum_{j=1}^{\infty}\{y_n\}_j\sin[k_jS] + \sum_{j=1}^{\infty}[y_n]_j\cos[k_jS], \qquad k_j = \frac{2\pi j}{S_d}, \\ [u]_n \approx \{u_n\}_0 + \sum_{j=1}^{\infty}\{u_n\}_j\sin[k_jS] + \sum_{j=1}^{\infty}[u_n]_j\cos[k_jS],\end{gathered} \tag{14}$$

получим вид подынтегральной функции (12) для интеграла качества (14):

$$\begin{gathered}\omega = \sum_{n,m=0}^{1}\alpha_{n,m}\left(\{y_n\}_0\{y_m\}_0 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\{y_n\}_j\{y_m\}_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}[y_n]_j[y_m]_j\right) + \\ + \sum_{n,m=0}^{1}\beta_{n,m}\left(\{u_n\}_0\{u_m\}_0 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\{u_n\}_j\{u_m\}_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}[u_n]_j[u_m]_j\right),\end{gathered} \tag{15}$$

$$\beta_{mn} = \beta_{nm}.$$

Для установившегося процесса в силу неравенств (9) оптимальную функцию Ляпунова V^0 будем искать в виде квадратичной формы с постоянными коэффициентами $c_{n,m} = \mathrm{const}$:

$$V^0 = \frac{1}{S_d}\int\limits_0^{S_d}\sum_{n,m=0}^{1}\alpha_{nm}[y]_n[y]_m dS =$$

$$= \sum_{n,m=0}^{1} c_{n,m}\left(\{y_n\}_0\{y_m\}_0 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\{y_n\}_j\{y_m\}_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}[y_n]_j[y_m]_j\right). \quad (16)$$

Составим выражение $B[V^0]$ для рассматриваемой производственной системы:

$$B[V^0] = \sum_{n=0}^{1}\frac{\partial V^0}{\partial\{y_n\}_0}\frac{\partial\{y_n\}_0}{dt} + \sum_{n=0}^{1}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\partial V^0}{\partial\{y_n\}_j}\frac{d\{y_n\}_j}{dt} + \sum_{n=0}^{1}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\partial V^0}{\partial[y_n]_j}\frac{d[y_n]_j}{dt} + \omega. \quad (17)$$

При $u_m = u_m^0(t,[y]_n)$ величина $B[V^0]$ должна иметь минимум и обращаться при этом в ноль:

$$B[V^0] = 0. \quad (18)$$

Подставляя вместо малых возмущений и соответствующих управляющих воздействий их разложение (14), можно получить новый вид уравнений (7):

$$\frac{d\{y_0\}_0}{dt} - \sum_{m=0}^{1} q_{0m}\{u_m\}_0 = 0; \qquad \frac{d\{y_1\}_0}{dt} + \sum_{n=0}^{1} A_n\{y_n\}_0 - \sum_{m=0}^{1} q_{1m}\{u_m\}_0 = 0 \quad (19)$$

и

$$\frac{d\{y_0\}_j}{dt} - [y_1]_j k_j - \sum_{m=0}^{1} q_{0m}\{u_m\}_j = 0; \qquad \frac{d[y_0]_j}{dt} + \{y_1\}_j k_j - \sum_{m=0}^{1} q_{0m}[u_m]_j = 0;$$

$$\frac{d\{y_1\}_j}{dt} - \sum_{n=0}^{1}(A_n\{y_n\}_j - B_n[y_n]_j k_j) - \sum_{m=0}^{1} q_{1m}\{u_m\}_j = 0; \qquad k_j = \frac{2\pi j}{S_d}, \quad (20)$$

$$\frac{d[y_1]_j}{dt} + \sum_{n=0}^{1}(A_n[y_n]_j + B_n\{y_n\}_j k_j) - \sum_{m=0}^{1} q_{1m}[u_m]_j = 0.$$

Дифференцируя $B[V^0]$ по $\{u_m\}_0$, $\{u_m\}_j$, $[u_m]_j$ и приравнивая результаты нулю, получим недостающие уравнения для определения оптимальной функции Ляпунова V^0 и оптимальных управляющих воздействий u_m^0:

$$\sum_{m=0}^{1}\frac{\partial V^0}{\partial\{y_n\}_0}\frac{\partial\left[\frac{d\{y_m\}_0}{dt}\right]}{\partial\{u_n\}_0} + 2\sum_{m=0}^{1}\beta_{mn}\{u_m\}_0 = 0; \qquad j = 1;\infty,$$

$$\sum_{m=0}^{1}\frac{\partial V^0}{\partial\{y_n\}_j}\frac{\partial\left[\frac{d\{y_m\}_j}{dt}\right]}{\partial\{u_n\}_0} + \sum_{m=0}^{1}\beta_{mn}\{u_m\}_j = 0; \quad (21)$$

$$\sum_{m=0}^{1}\frac{\partial V^0}{\partial[y_m]_j}\frac{\partial\left[\frac{d[y_m]_j}{dt}\right]}{\partial[u_n]_0} + \sum_{m=0}^{1}\beta_{mn}[u_m]_j = 0.$$

Последние уравнения можно разрешить относительно $\{u_m\}_0$, $\{u_m\}_j$, $[u_m]_j$, так как вследствие определенно-положительности формы (15) детерминант этой системы $\Delta = \beta_{00}\beta_{11} - \beta_{10}\beta_{01}$ отличен от нуля:

$$\{u_m\}_0 = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1}\frac{\Delta_{km}}{\Delta}\sum_{n=0}^{1}\frac{\partial V^0}{\partial\{y_n\}_0}\frac{\partial\left[\dfrac{d\{y_n\}_0}{dt}\right]}{\partial\{u_k\}_0},$$

$$\{u_m\}_j = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1}\frac{\Delta_{km}}{\Delta}\sum_{n=0}^{1}\frac{\partial V^0}{\partial\{y_n\}_j}\frac{\partial\left[\dfrac{d\{y_n\}_j}{dt}\right]}{\partial\{u_k\}_j}, \tag{22}$$

$$[u_m]_j = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1}\frac{\Delta_{km}}{\Delta}\sum_{n=0}^{1}\frac{\partial V^0}{\partial[y_n]_j}\frac{\partial\left[\dfrac{d[y_n]_j}{dt}\right]}{\partial[u_k]_j}.$$

Здесь Δ_{km} — алгебраическое дополнение элемента k-й строки и m-й колонки. Подставив значения $\{u_m\}_0$, $\{u_m\}_j$, $[u_m]_j$ в уравнения (19), (20), получим уравнение для определения оптимальной функции Ляпунова V^0:

$$\sum_{n,m=0}^{1} c_{nm}\left(2\{y_n\}_0\frac{d\{y_m\}_0}{dt} + \sum_{j=1}^{\infty}\{y_n\}_j\frac{d\{y_m\}_j}{dt} + \sum_{j=1}^{\infty}[y_n]_j\frac{d[y_m]_j}{dt}\right) +$$
$$+ \sum_{n,m=0}^{1}\alpha_{n,m}\left(\{y_n\}_0\{y_m\}_0 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\{y_n\}_j\{y_m\}_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}[y_n]_j[y_m]_j\right) +$$
$$+ \sum_{n,m=0}^{1}\beta_{n,m}\left(\{u_n\}_0\{u_m\}_0 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\{u_n\}_j\{u_m\}_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}[u_n]_j[u_m]_j\right) = 0. \tag{23}$$

Приравнивая коэффициенты при произведениях $\{y_n\}_0\{y_m\}_0$, $\{y_n\}_j\{y_m\}_j$, $[y_n]_j[y_m]_j$ линейно независимых величин $\{y_n\}_0$, $\{y_n\}_j$, $[y_n]_j$ к нулю, получим уравнения для определения величин c_{nm}. Если удастся найти c_{nm}, такие, что форма (16) окажется определенно положительной, то задача об оптимальном оперативном управлении будет решена. Достаточные условия разрешимости задачи об определенно-положительности формы (19) определяются рангом матрицы $W = \{Q, QB_j\}$, $W = \{Q, QB_j\}$, где Q — матрица $\{q_{nm}\}$, B_j — матрица коэффициентов при $\{y_n\}_0$, $\{y_n\}_j$, $[y_n]_j$ в уравнениях (19), (20). Если матрица $W = \{Q, QB_j\}$ имеет ранг, равный порядку систем (19), (20), то задача об оптимальном управлении производственным процессом имеет единственное решение.

Сформулирована задача об оптимальном оперативном управлении производственной системой с массовым выпуском продукции. Предполагается, что управляющие функции определены и непрерывны в рассматриваемой области и не стеснены никакими дополнительными ограничениями. При использовании метода функций Ляпунова получен вид оптимальной функции управления производственным процессом предприятия с массовым выпуском продукции. Оптимальная функция управления обеспечивает асимптотическую устойчивость заданного планового (невозмущенного) состояния и содержит пожелания о наилучшем возможном качестве переходного процесса при ликвидации возмущений производственных макропараметров.

Автор искренне благодарен В. П. Демуцкому за помощь при подготовке материалов работы.

1. *Леонтьев В. В.* Исследования структуры американской экономики. – Москва: Гос. стат. изд-во, 1958. – 640 с.
2. *Синергетика*: Сб. статей. Пер. с англ. / Сост. А. И. Рязанов, А. Д. Суханов. Под ред. Б. Б. Кадомцева. – Москва: Мир, 1984 с.
3. *Занг В.-Б.* Синергетическая экономика. – Москва: Мир, 1999. – 335 с.
4. *Юхновский И. Р.* Термодинамические аналогии в экономике // Междунар. конф. НАН Украины "Статистическая физика: Общие проблемы и новые применения". – Львов, 2005. – С. 51.
5. *Гончар Н. С.* Информационная модель в экономике. – Там же. – С. 33.
6. *Чернавский Д. С., Старков Н. И., Щербаков А. В.* О проблемах физической экономики // Усп. физ. наук. – 2002. – **172**, № 12. – С. 1045–1066.
7. *Канторович Л. В.* Математические методы организации и планирования производства. – Ленинград: Изд. ЛГУ, 1939.
8. *Форрестер Дж.* Основы кибернетики предприятия. – Москва: Прогресс, 1961. – 341 с.
9. *Прыкин Б. В.* Технико-экономический анализ производства. – Москва: ЮНИТИ-ДАНА, 2000. – 399 с.
10. *Летенко В. А., Родионов Б. Н.* Организация, планирование и управление машиностроительным предприятием. Ч. 2. Внутризаводское планирование. – Москва: Высш. шк., 1979. – 232 с.
11. *Демуцкий В. П., Пигнастая В. С., Пигнастый О. М.* Стохастическое описание экономико-производственных систем с массовым выпуском продукции // Доп. НАН України. – 2005. – № 7. – С. 66–71.
12. *Демуцкий В. П., Пигнастая В. С., Пигнастый О. М.* Теория предприятия: Устойчивость функционирования массового производства и продвижения продукции на рынок. – Харьков, 2003. – 272 с.
13. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений/ Пер. с англ. Мышкиса А. Д. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1954. – 215 с.
14. *Гальперин Е. А., Красовский Н. Н.* О стабилизации установившихся движений нелинейных управляемых систем // Прикл. мех. и мат. – 1963. – **27**, вып. 6.

Поступило в редакцию 10.01.2006

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина