МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В СУЧАСНІЙ ЕКОНОМІЦІ

Монографія

Суми
УАБС НБУ
2007

УДК 330.4
ББК 65.050
М34

Рекомендовано до друку вченою радою
Української академії банківської справи
Національного банку України,
протокол № 8 від 28.04.2006

Рецензенти:
доктор економічних наук, професор
С.М. Козьменко;
доктор економічних наук, професор
О.М. Теліженко

М34 **Математичні моделі та інформаційні технології в сучасній економіці** / Під редакцією доктора економічних наук, професора А.О. Єпіфанова. – Суми: УАБС НБУ, 2007. – 246 с.

ISBN 978-966-8958-07-6

У колективній монографії розглядаються проблеми моделювання систем управління соціально-економічними об'єктами та процесами в економіці України, подані практичні рекомендації щодо створення ефективних моделей на основі використання сучасних підходів Fuzzy-технології, нейронних мереж, методу аналізу ієрархій, байєсівського аналізу, інтервальної арифметики та синергетики. Описано економіко-математичні методи і моделі прийняття ризикованих фінансових рішень.
Видання розраховане на широке коло економістів, менеджерів, студентів, аспірантів економічних спеціальностей, тих, хто цікавиться питаннями моделювання в економіці та створення автоматизованих інформаційних систем.

УДК 330.4
ББК 65.050

ISBN 978-966-8958-07-6

ЗМІСТ

2 РОЗДІЛ МОДЕЛІ ТА ЗАСОБИ УПРАВЛІННЯ ВИРОБНИЦТВОМ

ТЕОРИЯ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ПРОЦЕССА С СЕРИЙНЫМ ИЛИ МАССОВЫМ ВЫПУСКОМ ПРОДУКЦИИ*

Современная экономическая теория останавливается на четких последовательных стадиях эволюции экономического анализа. П.А. Самуэльсон разделяет развитие аналитической экономики на пять больших ступеней [17]. Во-первых, у Вальраса представлено описание детерминированных равновесий на статическом уровне. Парето и другими сделан второй шаг, который был положен в основу теории сравнительной статики. Третий шаг, сделанный Джонсоном, Слуцким, Хиксом, Алленом и др. экономистами, охарактеризован минимизацией действия в рамках экономической единицы [22]. Четвертое достижение представляет собой открытие принципа соответствия. Естественным пятым шагом, который следует предпринять после того, как мы исследовали отклик системы на изменение заданных параметров, состоит в том, чтобы исследовать поведение системы как функцию времени [17]. Далее П.А. Самуэльсон подчеркивает, что "польза любого теоретического построения заключена в том свете, который она проливает на ход изменения экономических данных – самих величин, либо параметров, от которых они зависят. Это общее положение справедливо как в сфере динамики, так и статики. Таким образом, следующий логический шаг – приступить к созданию теории сравнительной динамики. Эта теория включает в себя теорию сравнительной статики и каждую из предыдущих пяти частей как частные случаи, и в то же время быть значительно шире". Этот шаг осуществляется спустя

*_**В.П. Демуцкий**_, Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, физико-технический факультет; _**О.М. Пигнастый**_, НПФ "Технология"

столь долгое время потому, что только сейчас математика обеспечила нас мощными аналитическими методами, необходимыми для понимания сути динамического поведения. В основе любого продвижения вперед всегда лежит сконцентрированное знание, на которое опирается работа.

1. Микроскопическое описание функционирования производственного процесса с серийным или массовым выпуском продукции

Системный подход к организации и управлению производством является способом мышления, способом соединения отдельных составляющих в единую композицию. Предприятие – это социально-экономическая система, конкретные элементы которой обладают присущими только им свойствами, закономерно связанные между собой и составляют определенную целостность. При этом система обладает свойствами, отсутствующими у составляющих ее элементов, как делимость, сложность, адаптивность, мобильность, гибкость [14, с. 16]. Состояние системы определяется множеством различных факторов, описывающих как внешнюю, так и внутреннюю среду системы. Чтобы управлять системой и достигать заданных конечных результатов, необходимо использовать современные формы и методы теории управления сложными системами, т.е. описывать систему кибернетическими моделями [14, с. 20].

Модель микроскопического описания производственного предприятия будем строить на понятиях добавочной стоимости базового продукта. Под базовым продуктом будем понимать элемент производственной системы, на который в ходе движения вдоль технологической цепочки происходит перенос производственных затрат (затрат сырья, материалов, электроэнергии, вещественного труда) через орудия труда посредством увеличения его стоимости. Другими словами, базовый продукт представляет собой заготовку или некий полуфабрикат, постепенно превращающийся в готовое изделие в ходе своего движения по операциям технологической цепочки. Состояние производственной системы будем определять как состояние множества базовых продуктов, каждый из которых находится на конкретной технологической операции. Параметры и величины, описывающие состояние базового продукта системы, будем называть микроскопическими параметрами и величинами, а подход к описанию производственной системы через микроскопические параметры и величины – микроскопическим описанием. При построении модели производственного процесса для однопродуктового предприятия с серийным или массовым выпуском продукции за базовый продукт модели принимаем выпускаемое производством изделие. Подобный подход применим и для производственного предприятия, выпускающего несколько наименований продукции, каждое из которых характеризуется своими законами продвижения по этапам технологической цепочки. Выбор базового продукта производственно-сбытовой системы определяется, с одной стороны, получением наиболее простой с точки зрения описания и решения систем уравнений модели производственного процесса, с другой стороны, наиболее близко описывающей реальный производственный объект [16]. Весь производственный процесс изготовления базового продукта (процесс переноса затрат S_j(грн.) на единичный базовый продукт по мере его продвижения вдоль технологической цепочки от нуля до средней себестоимости S_d) разобьем на элементарные участки dS_j технологической цепочки, $dS_j << S_d$. Средняя себестоимость S_d определена усредненными затратами сырья, материалов, операционными расценками на изготовление базового продукта в рамках нормативной технологической документации предприятия. Состояние базового продукта будем описывать микроскопическими величинами (S_j, μ_j), где $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \mu_j = \dfrac{\Delta S_j}{\Delta t}$ (грн./час) – сумма затрат в единицу времени, которые несет предприятие на изготовление *j*-го базового продукта в текущий момент времени ($0 \le j \le N_1$, N_1 – количество базовых продуктов, которые находятся в производственном процессе на всей технологической цепочке производства). Состояние производственной системы в некоторый момент времени будет определено, если определены в некоторый момент микроскопические величины $(S_1, \mu_1; \ldots\ldots S_{N_1}, \mu_{N_1})$ базовых продуктов производственной системы. Закон движения базовых продуктов производственной системы получим из принципа наименьшего действия, который является основным математическим приемом при расчете оптимальных траекторий поведения элементов системы во многих важных задачах математики, техники и экономики. Согласно этому принципу, рассматриваемая производственная система характеризуется функцией $J_\Pi(S_1, \mu_1; \ldots\ldots S_{N_1}, \mu_{N_1})$ или сокращенно $J_\Pi(t, S_j, \mu_j)$. Если известно состояние каждого j-го базового продукта (S_j, μ_j), то известен и вид функции $J_\Pi(t, S_j, \mu_j)$. Пусть в моменты времени t_1 и t_2 производственная система находится в состоянии $J_\Pi(t_1, S_j(t_1), \mu_j(t_1))$ и $J_\Pi(t_2, S_j(t_2), \mu_j(t_2))$. Тогда классическая задача вариационного исчисления может быть представлена в следующем виде: среди множества функций времени – фазовых траекторий, соединяющих две фиксированные точки, соответствующие начальному $J_{П}(t_1, S_j(t_1), \mu_j(t_1))$ и конечному $J_{П}(t_2, S_j(t_2), \mu_j(t_2))$ моментам времени, требуется выбрать функцию $J_{П}(t, S_j, \mu_j)$, максимизирующую некоторый интеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} J_{П}(t, S_j, \mu_j) \cdot dt \tag{1}$$

от заданной функции, которая зависит от времени t, фазовой координаты S и фазовой скорости μ. В теории вариационного исчисления задача с целевым функционалом такого вида является частным случаем задачи Больца и называется задачей Лагранжа, а функция $J_{П}(t, S_j, \mu_j)$ – функцией Лагранжа. Тот факт, что функция Лагранжа производственной системы содержит только $S_j(t)$, $\mu_j(t)$, но не более высокие производные $\frac{d^2S_j(t)}{dt^2}$, $\frac{d^3S_j(t)}{dt^3}$......... является выражением утверждения, что состояние производственной системы в экономической теории полностью определяется знанием координат $S_j(t)$ и их скоростей изменения во времени $\mu_j(t)$ (знанием заделов и темпа движения базовых продуктов вдоль технологической цепочки [8]). Перейдем к выводу дифференциальных уравнений движения базовых продуктов вдоль технологической цепочки рассматриваемой производственной системы, решающих задачу об определении минимума функционала (1). Пусть (t, S_j, μ_j) – фазовая траектория движения базового продукта вдоль технологической цепочки производственной системы, для которой рассматриваемый функционал имеет минимум. Проварьируем траекторию решения $([S_j(t) + \delta S_j(t)], [\mu_j(t) + \delta\mu_j(t)])$, близкую к (t, S_j, μ_j). Функции $\delta S_j(t)$, $\delta\mu_j(t)$ есть малые во всем интервале времени от t_1 до t_2 вариации функций $S_j(t)$, $\mu_j(t)$, удовлетворяющие равенству:

$$\delta S_j(t_1) = \delta S_j(t_2) \equiv 0\,. \tag{2}$$

Изменение функционала (1) при замене фазовой траектории (t, S_j, μ_j) на близкую к ней $([S_j(t) + \delta S_j(t)], [\mu_j(t) + \delta\mu_j(t)])$ дается разностью

$$\int_{t_1}^{t_2} J_П\left(t,\left[S_j(t)+\delta S_j(t)\right],\left[\mu_j(t)+\delta\mu_j(t)\right]\right)\cdot dt - \int_{t_1}^{t_2} J_П\left(t,S_j,\mu_j\right)\cdot dt =$$

$$=\delta\int_{t_1}^{t_2} J_П\left(t,S_j,\mu_j\right)\cdot dt. \qquad (3)$$

Разложим подынтегральное выражение (3) по малым вариациям $\delta S_j(t)$, $\delta\mu_j(t)$, получим

$$\int_{t_1}^{t_2} J_П\left(t,\left[S_j(t)+\delta S_j(t)\right],\left[\mu_j(t)+\delta\mu_j(t)\right]\right)\cdot dt =$$

$$=\int_{t_1}^{t_2} J_П\left(t,S_j,\mu_j\right)\cdot dt + \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial J_П}{\partial S_j(t)}\cdot\delta S_j(t)+\frac{\partial J_П}{\partial\mu_j(t)}\cdot\delta\mu_j(t)\right)\cdot dt.$$

Необходимым условием минимальности функционала (1) есть условие

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} J_П\left(t,S_j,\mu_j\right)\cdot dt = 0 \text{ или}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial J_П}{\partial S_j(t)}\cdot\delta S_j(t)+\frac{\partial J_П}{\partial\mu_j(t)}\cdot\delta\mu_j(t)\right)\cdot dt = 0. \qquad (4)$$

Принимая во внимание, что $\delta\left[\frac{dS_j(t)}{dt}\right]=\frac{d}{dt}\left[\delta S_j(t)\right]$, применим ко второму слагаемому правило интегрирования по частям:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial J_П}{\partial S_j(t)}\cdot\delta S_j(t)+\frac{\partial J_П}{\partial\mu_j(t)}\cdot\delta\mu_j(t)\right)\cdot dt =$$

$$=\left(\frac{\partial J_П}{\partial\mu_j(t)}\right)\cdot\left[\delta S_j(t)\right]\Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{\partial J_П}{\partial S_j(t)}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial J_П}{\partial\mu_j}\right)\right\}\cdot\left[\delta S_j(t)\right]\cdot dt = 0. \qquad (5)$$

В силу условий (2)

$$\left(\frac{\partial J_П}{\partial\mu_j(t)}\right)\cdot\left[\delta S_j(t)\right]\Big|_{t_1}^{t_2} = 0, \qquad (6)$$

и, следовательно

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{\partial J_П}{\partial S_j(t)}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial J_П}{\partial\mu_j}\right)\right\}\cdot\left[\delta S_j(t)\right]\cdot dt = 0. \qquad (7)$$

Для того, чтобы последнее равенство было справедливо, согласно основной лемме вариационного исчисления, для любых во всем интервале времени от t_1 до t_2 вариаций $\delta S_j(t)$, удовлетворяющих граничным условиям и условиям непрерывности, необходимо:

$$\frac{\partial J_П}{\partial S_i(t)} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial J_П}{\partial \mu_i}\right) = 0;\ \mu_i = \frac{dS_j}{dt}. \tag{8}$$

Полученные уравнения называются уравнениями Эйлера и описывают поведение базового продукта в фазовом пространстве производственной системы. Раскрывая полную производную

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial J_П}{\partial \mu_j}\right) = \frac{\partial^2 J_П}{[\partial \mu_j]^2} \cdot \frac{d^2 S_j(t)}{dt^2} +$$
$$+ \frac{\partial^2 J_П}{\partial \mu_j \cdot \partial S_j(t)} \cdot \frac{dS_j(t)}{dt} + \frac{\partial^2 J_П}{\partial t \cdot \partial \mu_j}, \tag{9}$$

можно записать первую группу уравнений в следующем виде

$$\frac{\partial^2 J_П}{[\partial \mu_j]^2} \cdot \frac{d^2 S_j(t)}{dt^2} + \frac{\partial^2 J_П}{\partial \mu_j \cdot \partial S_j(t)} \cdot \frac{dS_j(t)}{dt} +$$
$$+ \frac{\partial^2 J_П}{\partial t \cdot \partial \mu_j} - \frac{\partial J_П}{\partial S_j(t)} = 0. \tag{10}$$

Уравнение Эйлера (10) для движения базового продукта в фазовом пространстве производственной системы представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с граничными условиями

$$S_j(t)\big|_{t=t_1} = S_j(t_1), \quad S_j(t)\big|_{t=t_2} = S_j(t_2) \tag{11}$$

Уравнения Эйлера устанавливают связь между фазовыми координатами $S_j(t)$, скоростями изменения фазовых координат μ_j и ускорениями фазовых координат $\dfrac{d^2 S_j(t)}{dt^2} = \dfrac{d\mu_j(t)}{dt}$. Если функция Лагранжа производственной системы известна, то известны и выше упомянутые зависимости. Из уравнений Эйлера (8) видны свойства функции Лагранжа (приложение 1 к данной теме). Как уже отмечалось, функция Лагранжа производственной системы содержит только $S_j(t)$, $\mu_j(t)$, тем самым состояние производственной системы в экономической теории полностью определяется знанием координат $S_j(t)$ и их скоростей изменения во времени $\mu_j(t)$. Представим функцию Лагранжа производственной системы в виде

$$J_П(t,S_j,\mu_j)=\sum_{j=1}^{N_1}\frac{a_S\cdot\mu_j^2}{2}-\Phi_{Ц\_П}(t,S_j,\mu_j)-$$

$$-W_П(t,S_j,\mu_j), \qquad (12)$$

где $\sum_{j=1}^{N_1}\frac{a_S\cdot\mu_j^2}{2}$,

$a_S=a_S(t,S)>0$ – "Живая сила" производственной системы;

$a_S(t,S)$ – технологический коэффициент производственной системы;

$\Phi_{Ц\_П}(t,S_j,\mu_j)$ – целевая функция производственной системы [1, с. 31];

$W_П(t,S_j,\mu_j)$ – функция взаимодействия между собой базовых продуктов производственной системы.

Целевая функция производственной системы $\Phi_{Ц\_П}(t,S_j,\mu_j)$ и функция взаимодействия между собой базовых продуктов $W_П(t,S_j,\mu_j)$ определяются как видом производства, так и конкретными специфическими свойствами предприятия. Производная $\frac{\partial J_П}{\partial S_j}=F_{П_j}(t,S_j,\mu_j)$ определяет технологическое воздействие производственной системы на j-й базовый продукт, в котором

$$-\left[\frac{\partial\Phi_{Ц\_П}(t,S_j,\mu_j)}{\partial S_j}\right]=f_{\Phi_{Ц\_П_j}}(t,S_j,\mu_j), \qquad (13)$$

$$-\left[\frac{\partial W_П(t,S_j,\mu_j)}{\partial S_j}\right]=f_{W_j}(t,S_j,\mu_j). \qquad (14)$$

При движении базовых продуктов вдоль технологической цепочки в фазовом пространстве (S,μ) существуют такие функции экономических величин S_j,μ_j, которые сохраняют постоянные значения, зависящие только от начальных условий. Такие функции являются первыми интегралами (или интегралами движения) производственной системы и имеют немаловажное значение в исследовании экономических систем (приложение 2 к данной теме).

Для описания состояния партии базовых продуктов производственной системы введем групповые переменные:

$$S = \frac{1}{N_{парт}} \cdot \sum_{j=1}^{N_{парт}} S_j, \; S_j = S + \varepsilon_j, \; \dot{S} = \frac{1}{N_{парт}} \cdot \sum_{j=1}^{N_{парт}} \dot{S}_j, \; \dot{S}_j = \dot{S} + \dot{\varepsilon}_j, \tag{15}$$

характеризующие положение "центрального" базового продукта и j-го базового продукта относительно "центрального". Функция Лагранжа для партии базовых продуктов производственной системы примет вид

$$J_{П\_парт}(t, S_j, \mu_j) = \sum_{j=1}^{N_{парт}} \frac{a_S \cdot \dot{S}^2}{2} + \sum_{j=1}^{N_{парт}} \frac{a_S \cdot \dot{\varepsilon}_j^2}{2} - \Phi_{(Ц\_П)_i}(t, S)\Big|_0 \cdot N_{парт} -$$
$$- W_{П_i}(t, S)\Big|_0 \cdot N_{парт} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi_{(Ц\_П)}(t, S)}{\partial S^2}\Bigg|_0 \cdot \sum_{j=1}^{N_{парт}} \varepsilon_j^2 -$$
$$- \frac{\partial^2 W_{П_i}(t, S)}{\partial S^2}\Bigg|_0 \cdot \sum_{j=1}^{N_{парт}} \sum_{\substack{i=1 \\ j>i}}^{N_{парт}} \varepsilon_j \cdot \varepsilon_i + \bar{0}(\varepsilon_j^4), \tag{16}$$

где $\sum_{j=1}^{N_{парт}} \Phi_{(Ц\_П)_i}(t, S_j)\Big|_0 \equiv \Phi_{(Ц\_П)_i}(t, S)\Big|_0 \cdot N_{парт}$;

$$\sum_{j=1}^{N_{парт}} W_{П_i}(t, S_j)\Big|_0 \equiv W_{П_i}(t, S)\Big|_0 \cdot N_{парт};$$

$$\sum_{j=1}^{N_{парт}} \left(\frac{\partial^2 \Phi_{(Ц\_П)_i}}{\partial S^2}\Bigg|_0 \cdot \varepsilon_j^2 \right) \equiv \frac{\partial^2 \Phi_{(Ц\_П)}(t, S)}{\partial S^2}\Bigg|_0 \cdot \sum_{j=1}^{N_{парт}} \varepsilon_j^2 \tag{17}$$

$$\sum_{j=1}^{N_{парт}} \sum_{\substack{i=1 \\ j>i}}^{N_{парт}} \frac{\partial^2 W_{П_i}(t, S)}{\partial S^2}\Bigg|_0 \cdot \varepsilon_j \cdot \varepsilon_i = \frac{\partial^2 W_{П}(t, S)}{\partial S^2}\Bigg|_0 \cdot \sum_{j=1}^{N_{парт}} \sum_{\substack{i=1 \\ j>i}}^{N_{парт}} \varepsilon_j \cdot \varepsilon_i \cdot$$

Для упрощения в дальнейшем будем полагать, что взаимодействие между базовыми продуктами отсутствует, т.е. $W_П(t, S) \equiv 0$.

Предполагается, что $\dot{\varepsilon}_j \langle\langle \dot{S}$, $\varepsilon_j \langle\langle S$. Линейные члены функции Лагранжа обращаются в ноль в силу определения переменных (15). Отклонение $\dot{\varepsilon}_j$ определяется функцией распределения $\psi[\mu \to \tilde{\mu}]$ величины μ_j через параметры работы технологического оборудования [8]. Генераторная функция $\psi[\mu \to \tilde{\mu}]$ описывает процесс воздействия технологического оборудования на базовый продукт, нормирована на единицу $\int_0^\infty \psi[\mu \to \tilde{\mu}] \cdot d\tilde{\mu} = 1$ с математическим ожиданием случайной величины μ_ψ и среднеквадратичным отклонением σ_ψ^2. Введем групповую случайную величину

$$\dot{\varepsilon}=\frac{1}{N_{парт}}\cdot\sum_{j=1}^{N_{парт}}\dot{\varepsilon}_j \qquad (18)$$

с математическим ожиданием $M[\dot{\varepsilon}]$ и дисперсией $D[\dot{S}]$:

$$M[\dot{\varepsilon}]=M\left[\frac{1}{N_{парт}}\cdot\sum_{j=1}^{N_{парт}}\dot{\varepsilon}_j\right]=\frac{1}{N_{парт}}\cdot\sum_{j=1}^{N_{парт}}M[\dot{\varepsilon}_j]=M[\dot{\varepsilon}_j]=0; \qquad (19)$$

$$D[\dot{\varepsilon}]=D\left[\frac{1}{N_{парт}}\cdot\sum_{j=1}^{N_{парт}}\dot{\varepsilon}_j\right]=\frac{D[\dot{\varepsilon}_j]}{N_{парт}}=\frac{\sigma_\Psi^2}{N_{парт}}=(\sigma_{\dot{\varepsilon}})^2=(\dot{\varepsilon})^2,$$

где σ_ψ^2, σ_i^2 – соответственно, среднеквадратичное отклонение случайной величины $\dot{\varepsilon}_j$ и $\dot{\varepsilon}$.

Представим скорость изменения затрат $\dot{S}_j$ через переменные затраты фонда оплаты труда $\Delta ФОТ_j$ и расхода сырья и материалов $\Delta СиМ_j$ на операции в промежуток времени Δt_j:

$$\dot{S}_j=\left(\Delta ФОТ_j+\Delta СиМ\right)\Big/\left(\Delta t_j\right). \qquad (20)$$

Для машиностроительного предприятия отклонение на толщину листового проката, определяемое внутренними нормативными ТУ, для внутреннего рынка составляет 17 %. Примерно такое же отклонение характеризует ФОТ по предприятию для схожих технологических операций. На основании этого проведем оценку значения среднеквадратичного отклонения для партии базовых продуктов в массовом производстве $N_{парт}>>1$, размер которой определяется размером межоперационных заделов. Так, например, при заделах в кузнечно-прессовом производстве в десятки тысяч базовых продуктов можно принять за $N_{парт}>>1$ значение 1000…5000 базовых продуктов. Данное количество определяется производительностью оборудования в час и дает оценку

$$\sigma_{\dot{\varepsilon}}=\frac{0.17}{\sqrt{1000}}\cdot\mu_\Psi=0{,}005376\cdot\mu_\Psi,\ \sigma_\Psi\approx 17\%\cdot\mu_\Psi. \qquad (21)$$

Если случайная величина μ_j распределена близко к нормальному закону распределения, то вероятность того, что отклонение по абсолютной величине $\sigma_{\dot{\varepsilon}}$ превысит значение $[3\cdot\sigma_{\dot{\varepsilon}}]$ очень мала, а именно равна 0,27 %. Это значит, что только в 0,27 % случаях отклонение на партии базовых продуктов может по абсолютной величине быть больше $\left[3 \cdot \sigma_{\dot{\varepsilon}}\right]$=0,016128$\cdot \mu_{\Psi}$. Такие события можно считать практически невозможными. Оценим порядок малости слагаемых функции Лагранжа:

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{N_{парт}} \frac{a_S \cdot \dot{\varepsilon}_j^2}{2}}{\sum\limits_{j=1}^{N_{парт}} \frac{a_S \cdot \dot{S}^2}{2}} = \frac{1}{N_{парт}} \cdot \sum_{j=1}^{N_{парт}} \left(\frac{\dot{\varepsilon}_j}{\dot{S}}\right)^2 \approx \frac{D\left[\dot{\varepsilon}_j\right]}{\mu_{\Psi}{}^2} \approx \left(\frac{\sigma_{\dot{\varepsilon}}}{\mu_{\Psi}}\right)^2 \approx 3 \cdot 10^{-5} << 1. \quad (22)$$

Перейдем теперь к оценке слагаемого $\left.\frac{\partial^2 \Phi_{(ц\_п)}(t,S)}{\partial S^2}\right|_0 \cdot \sum\limits_{j=1}^{N_{парт}} \varepsilon_j^2$.

Величина ε_j может быть представлена в виде

$$\varepsilon_j(t_i) = \sum_{k=1}^{i} \dot{\varepsilon}_j(t_k) \cdot \Delta t + 0(\Delta t^2),$$

где через $0(\Delta t^2)$ обозначены члены более высокого порядка малости. Последнее разложение в виде ряда называется каноническим разложением случайного процесса $\varepsilon_j(t)$ с математическим ожиданием $M\left[\varepsilon_j(t_i)\right] = 0$ [3, с. 264]. Сумма ряда $\sum\limits_{j=1}^{N_{парт}} \varepsilon_j^2$ примет вид [3, с. 266-268]:

$$\sum_{j=1}^{N_{парт}} \varepsilon_j^2 = \sum_{j=1}^{N_{парт}} \left(\sum_{n=1}^{k} \dot{\varepsilon}_j(t_n) \cdot \Delta t\right)^2 + 0(\Delta t^3) = \left| \begin{array}{l} t_m = \Delta t \cdot m;\ \Delta t = \frac{t - t_{нач}}{k} - шаг\_по\_временной\_оси; \\ t - текущий\_момент\_времени; \\ t_{нач} - начальный\_момент\_времени; \\ m - номер\_точки\_временной\_оси \end{array} \right| =$$

$$= (\Delta t)^2 \cdot \sum_{n=1}^{k} \sum_{m=1}^{k} \sum_{i=1}^{N_{парт}} \left(\dot{\varepsilon}_j(t_n) \cdot \dot{\varepsilon}_j(t_m)\right) + 0(\Delta t^3) =$$

$$= (\Delta t)^2 \cdot (N_{парт}) \cdot \left(\sum_{m=1}^{k} (\dot{\varepsilon}(t_m))^2 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{k} \sum_{n<m}^{k} (\dot{\varepsilon}(t_n) \cdot \dot{\varepsilon}(t_m))\right) + 0(\Delta t^3) =$$

$$= (\Delta t)^2 \cdot (N_{парт}) \cdot D\left[\sum_{m=1}^{k} \dot{\varepsilon}(t_m)\right] + 0(\Delta t^3). \quad (23)$$

Выражение (23) является следствием свойств дисперсии [3, с. 269]. Так, как случайные величины $\dot{\varepsilon}(t_m)$ и $\dot{\varepsilon}(t_n)$ независимы, то они не коррелируют между собой [3, с. 271]:

$$K_{n,m}\left[\dot{\varepsilon}(t_n), \dot{\varepsilon}(t_m)\right] = 0, \sum_{n=1}^{k} \sum_{n<m}^{k} K_{n,m}\left[\dot{\varepsilon}(t_n), \dot{\varepsilon}(t_m)\right] = 0, \quad (24)$$

$$D\left[\sum_{m=1}^{k}\dot{\varepsilon}(t_m)\right]=\sum_{m=1}^{k}D[\dot{\varepsilon}(t_m)], \tag{25}$$

и $$\left.\frac{\partial^2\Phi_{(ц\_п)}(t,S)}{\partial S^2}\right|_0 \cdot \sum_{j=1}^{N_{парт}}\varepsilon_j^2 = \left.\frac{\partial^2\Phi_{(ц\_п)}}{\partial S^2}\right|_0 \times$$

$$\times(\Delta t)^2\cdot\left(N_{парт}\right)\cdot\sum_{m=1}^{k}D[\dot{\varepsilon}(t_m)]. \tag{26}$$

Принимая во внимание (24), (25), (26)

$$\frac{\left.\frac{\partial^2\Phi_{(ц\_п)}(t,S)}{\partial S^2}\right|_0\cdot\sum_{j=1}^{N_{парт}}\varepsilon_j^2}{\left.\Phi_{(ц\_п)_i}(t,S)\right|_0\cdot N_{парт}} \approx \frac{\left.\frac{\partial^2\Phi_{(ц\_п)}}{\partial S^2}\right|_0\cdot\varepsilon^2}{\left.\Phi_{(ц\_п)_i}(t,S)\right|_0}, \tag{27}$$

где ε представляет собой размер партии (объем партии), перемещающейся вдоль технологической цепочки производственного процесса. Размер партии характеризует разброс базовых продуктов партии вдоль технологической цепочки. Функция Лагранжа производственной системы предприятия для партии базовых продуктов размером $N_{парт}$ может быть представлена с точностью до членов второго порядка малости в виде суммы функций "центрального" базового продукта $J_{П\_парт}(t,S,\dot{S})$ и границы партии $J_{П\_парт}(t,\varepsilon,\dot{\varepsilon})$:

$$J_{П\_парт}(t,S_j,\dot{S}_j)=J_{П\_парт}(t,S,\dot{S})+J_{П\_парт}(t,\varepsilon,\dot{\varepsilon}),$$

$$\frac{J_{П\_парт}(t,\varepsilon,\dot{\varepsilon})}{J_{П\_парт}(t,S,\dot{S})}\ll 1 \tag{28}$$

$$J_{П\_парт}(t,S,\dot{S})=\frac{a_S\cdot\dot{S}^2}{2}\cdot N_{парт}-\left.\Phi_{(ц\_п)_i}(t,S)\right|_0\cdot N_{парт}, \tag{29}$$

$$J_{П\_парт}(t,\varepsilon,\dot{\varepsilon})=\frac{a_S\cdot\dot{\varepsilon}^2}{2}\cdot N_{парт}-\frac{1}{2}\cdot N_{парт}\cdot\left.\frac{\partial^2\Phi_{(ц\_п)}}{\partial S^2}\right|_0\cdot\varepsilon^2, \tag{30}$$

где a_S – коэффициент пропорциональности, определяющий выбор размерности системы единиц для описания производственной системы;

$\Phi_{ц\_п}(t,S_j)$ – интегральная инженерно-производственная функция предприятия [8], задаваемая документооборотом предприятия через таблицы норм расхода сырья (материалов), нормативных цен на сырье (материалы), сменных норм и расценок за выполнение работником технологических операций.

Таким образом, функция Лагранжа с учетом членов второго порядка малости при отсутствии взаимодействий между базовыми продуктами имеет вид:

$$J_{П\_парт}(t,S_j,\dot{S}_j)=\left(\frac{a_S\cdot\dot{S}^2}{2}-\Phi_{(Ц\_П)_j}(t,S)\Big|_0+\frac{a_S\cdot\dot{\varepsilon}^2}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2\Phi_{(Ц\_П)}}{\partial S^2}\Big|_0\cdot\varepsilon^2\right)\cdot N_{парт} \quad (31)$$

Из свойств функции Лагранжа (приложение 1 к данной теме) следует, что умножение функции Лагранжа для партии базовых продуктов $J_П(t,S_j,\mu_j)$ на произвольную постоянную не отражается на уравнениях движения описываемой системы, а приводит только к выбору определенной системы единиц, с использованием которых происходит построение модели. Постоянная величина $N_{парт}$ представляет собой количество базовых продуктов в партии, является безразмерной, позволяет упростить выражение (31):

$$J_П(t,S,\dot{S},\varepsilon,\dot{\varepsilon})=\frac{a_S\cdot\dot{S}^2}{2}-\Phi_{(Ц\_П)_j}(t,S)\Big|_0+$$
$$+\frac{a_S\cdot\dot{\varepsilon}^2}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2\Phi_{(Ц\_П)}}{\partial S^2}\Big|_0\cdot\varepsilon^2. \quad (32)$$

Функция Лагранжа для партии базовых продуктов состоит из двух слагаемых, отличающихся друг от друга порядком малости $\frac{J_П(t,\varepsilon,\dot{\varepsilon})}{J_П(t,S,\dot{S})}\langle\langle 1$. Слагаемые более высокого порядка малости в рассмотрение не включены. Запишем для рассматриваемой функции Лагранжа уравнения Эйлера, представляющие собой уравнения движения системы в переменных $t,S,\dot{S},\varepsilon,\dot{\varepsilon}$:

$$\frac{\partial J_П(t,S,\dot{S},\varepsilon,\dot{\varepsilon})}{\partial S}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial J_П(t,S,\dot{S},\varepsilon,\dot{\varepsilon})}{\partial\dot{S}}\right)=0;$$
$$\frac{\partial J_П(t,S,\dot{S},\varepsilon,\dot{\varepsilon})}{\partial\varepsilon}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial J_П(t,S,\dot{S},\varepsilon,\dot{\varepsilon})}{\partial\dot{\varepsilon}}\right)=0. \quad (33)$$

Положив $a_S=1$ и выполнив преобразования

$$\frac{\partial J_П(t,S,\dot{S},\varepsilon,\dot{\varepsilon})}{\partial S}=\frac{\partial J_П(t,S,\dot{S})}{\partial S}=-\frac{\partial\Phi_{(Ц\_П)_j}(t,S)\Big|_0}{\partial S}; \quad (34)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial J_{\Pi}(t,S,\dot S,\varepsilon,\dot\varepsilon)}{\partial \dot S}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial J_{\Pi}(t,S,\dot S)}{\partial \dot S}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\left(\frac{\dot S^2}{2}\right)}{\partial \dot S}\right)=\ddot S;$$

$$\frac{\partial J_{\Pi}(t,S,\dot S,\varepsilon,\dot\varepsilon)}{\partial \varepsilon}=\frac{\partial J_{\Pi}(t,\varepsilon,\dot\varepsilon)}{\partial \varepsilon}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial\left(\left.\frac{\partial^2\Phi_{(Ц\_П)}}{\partial S^2}\right|_0\cdot\varepsilon^2\right)}{\partial\varepsilon}=$$

$$-\left.\frac{\partial^2\Phi_{(Ц\_П)}}{\partial S^2}\right|_0\cdot\varepsilon; \tag{35}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial J_{\Pi}(t,S,\dot S,\varepsilon,\dot\varepsilon)}{\partial \dot\varepsilon}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial J_{\Pi}(t,\varepsilon,\dot\varepsilon)}{\partial \dot\varepsilon}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\left(\frac{\dot\varepsilon^2}{2}\right)}{\partial \dot\varepsilon}\right)=\ddot\varepsilon,$$

уравнения движения принимают вид

$$\ddot S=-\frac{\partial\Phi_{(Ц\_П)_i}(t,S)\big|_0}{\partial S} \tag{36}$$

для “центрального” базового продукта,

$$\ddot\varepsilon=-\left.\frac{\partial^2\Phi_{(Ц\_П)}}{\partial S^2}\right|_0\cdot\varepsilon \tag{37}$$

для границы партии базових продуктов,
при условиях построении модели

$$\dot\varepsilon^2\langle\langle\dot S^2,\ \left.\frac{\partial^2\Phi_{(Ц\_П)}}{\partial S^2}\right|_0\ \langle\langle\frac{\Phi_{(Ц\_П)_i}(t,S)\big|_0}{\varepsilon^2}. \tag{38}$$

Обширные разделы экономики предприятия в области управления производством развиты в рамках простых моделей [15, 19]. Тем не менее, далеко не всегда функционирование реальных производственных процессов может быть достаточно точно описано с помощью этих упрощенных моделей. Для изучения коллективных явлений в производственно-сбытовых системах [8] требуются более сложные модели, учитывающие внутренние микроскопические производственные процессы. Для усложненных моделей функционирования производственных подразделений требуется вводить дополнительные параметры и характеристики, связанные с состоянием и поведением отдельных элементов производственной системы. Необходимо вводить характеристики, учитывающие для выполнения производственной программы конкретный технологический процесс на заданном технологическом оборудовании.

Таким образом, мы записали функцию Лагранжа для партии базовых продуктов производственной системы (28) с точностью до членов второго порядка малости, который определяется условиями (38). Получены уравнения состояния (36), (37), описывающие поведения базовых продуктов партии. Последнее дает возможность исследовать состояние базовых продуктов при движении партии через состояние "центрального" базового продукта и параметры расплывания границы партии базовых продуктов.

2. Макроскопическое описание функционирования производственного процесса с серийным или массовым выпуском продукции

Закономерности, присущие равновесным состояниям в системах экономического обмена, во многом аналогичны тем, которые имеют место в физических (термодинамических) системах. Они оказались столь глубокими и полезными, что провозглашены для термодинамических систем и систем экономического обмена в качестве неких общих принципов: Ле Шателье-Самуэльсона, Карно-Хикса и др. [19]. На основании данных принципов функционирование современного массового производства может быть представлено в виде стохастического процесса, в ходе которого производственная система переходит из одного состояния в другое [8]. Состояние системы можно определить как состояние общего числа N базовых продуктов производственной системы. В ходе движения базового продукта по операционной цепочке технологических карт происходит превращение исходного сырья и материалов в готовый продукт путем целенаправленного воздействия общественно-полезного труда. Поведение базового продукта подчиняется определенным законам в соответствии с установленным на предприятии технологическим процессом, производственным планом, наличием трудовых ресурсов и оборудования. Состояние базового продукта будем описывать микроскопическими величинами (S_j, μ_j), где S_j (грн.) и $\mu_j = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S_j}{\Delta t}$ (грн./час), соответственно, сумма общих затрат и затрат в единицу времени, перенесенных производственной системой на *j*-й базовый продукт, $0 < j \le N$. Состояние системы в некоторый момент времени будет определено, если определены микроскопические величины $(S_1, \mu_1; \ldots\ldots S_N, \mu_N)$, а в любой другой момент времени найдено из уравнений состояния базовых продуктов (36):

$$\frac{dS_j}{dt} = \mu_j, \qquad \frac{d\mu_j}{dt} = f_j(t, S), \tag{39}$$

где $f_j(t, S)$ – инженерно-производственная функция, характеризующая установленный на предприятии технологический процесс изготовления продукции в соответствии с производственным планом, наличием трудовых ресурсов и оборудования. Однако, если количество базовых продуктов *N* много больше единицы, то решить систему (39) из 2·*N*-уравнений практически невозможно. Последнее уточнение требует перехода от микроскопического описания производственной системы к макроскопическому с элементами вероятностной природы. Основная трудность в таком описании состоит в том, чтобы выделить характеристики микросостояний базовых продуктов, которые можно было бы измерить на уровне состояния предприятия. Вместо того, чтобы рассматривать состояние производственной системы с микровеличинами $(S_1, \mu_1; \ldots\ldots S_N, \mu_N)$, введем соответствующим образом нормированную дискретную функцию распределения числа *N* базовых продуктов в фазовом пространстве (S, μ). Каждая точка в данном пространстве будет задавать состояние базового продукта. Разумно ожидать, что при больших *N* эту функцию будет хорошо аппроксимировать непрерывная функция распределения базовых продуктов $\chi(t, S, \mu)$. Если производственная система состоит из нескольких видов базовых продуктов, то для описания системы потребуется получить функцию распределения для каждого вида базовых продуктов. Разобьем фазовое пространство на такое число ячеек, чтобы размеры ячейки $\Delta\Omega = \Delta S \cdot \Delta\mu$ были много меньше характерных размеров производственной системы и в то же время содержали внутри себя большое число базовых продуктов. Вместо того, чтобы фиксировать точные значения микроскопических величин базового продукта, будем приближенно характеризовать состояние производственной системы числом базовых продуктов в каждой ячейке $\Delta\Omega$. Если размеры ячейки достаточно малы, то приближенное описание будет нести в себе почти столь же подробную информацию, что и точное. Таким образом, мы приходим к необходимости наряду с основным пределом при $N \to \infty$, рассматривать и предельный случай при стремящихся к нулю размерах ячейки. В силу того, что величина $\chi(t, S, \mu) \cdot d\Omega$ представляет собой число базовых продуктов в бесконечно малой ячейке $\Delta\Omega$ фазового пространства (S,μ), мы можем по изменению фазовой координаты S и фазовой скорости μ базового продукта со временем судить и об изменении самой функции $\chi(t,S,\mu)$ [7]:

$$\frac{\partial\chi}{\partial t}+\frac{\partial\chi}{\partial S}\cdot\mu+\frac{\partial\chi}{\partial\mu}\cdot f(t,S)=J(t,S,\mu). \tag{40}$$

Скорость изменения затрат μ базового продукта и функция $f(t,S)$ может быть найдена из системы уравнений состояния базового продукта (39):

$$\frac{dS}{dt}=\mu;\quad \frac{d\mu}{dt}=f(t,S), \tag{41}$$

а генераторная функция $J(t,S,\mu)$ определяется плотностью оборудования вдоль технологической цепочки и его техническими характеристиками [7]. Функция $J(t,S,\mu)$ при $t\to\infty$ стремится свести начальное распределение базовых продуктов по скоростям изменения затрат к состоянию с равновесной функцией распределения в соответствии с технологическим процессом. Будем считать функцию $\chi(t,S,\mu)$ нормированной

$$\int_0^\infty dS\cdot\int_0^\infty d\mu\cdot\chi(t,S,\mu)=N. \tag{42}$$

Условие нормировки (42) представляет собой закон сохранения количества базовых продуктов, находящихся в производственном процессе. Инженерно-производственная функция $f(t,S)$ определяется из документооборота предприятия: таблиц норм расходов сырья (материалов), нормативных цен на сырье (материалы), сменных норм и расценок за выполнение работником технологических операций. Выразив в денежном выражении из документооборота стоимость затрат сырья, потребляемого в ходе технологической операции, расценку и время выполнения технологической операции, можно в табличном виде получить зависимость для скорости изменения затрат $\mu_к=\mu(t_к)$ при движении базового продукта вдоль технологической цепочки, откуда $f(t,S)=\lim_{\Delta t_k\to 0}\frac{\Delta\mu_k}{\Delta t_k}$. По смыслу инженерно-производственная функция представляет собой некий аналог силы, перемещающий базовый продукт вдоль технологической цепочки производственного процесса. При таком перемещении на базовый продукт оказывается воздействие со стороны орудий труда (оборудования). Таким образом происходит увеличение затрат, перенесенных на базовый продукт при его движении вдоль технологической цепочки производственного процесса. Оборудование воздействует на базовый продукт, изменяя его качественно и количественно. Мы можем говорить только о вероятности того, что после воздействия со стороны технологического оборудования базовый продукт будет находиться в том или ином состоянии. Процесс воздействия со стороны технологического оборудования на базовый продукт будем обозначать $[\mu \to \tilde{\mu}]$, где μ и $\tilde{\mu}$, соответственно, скорости изменения затрат, которые несет базовый продукт до и после воздействия. Полное же количество базовых продуктов, находящихся в единице объема фазового пространства, испытавших в единицу времени воздействие со стороны технологического оборудования, можно написать в виде произведения потока базовых продуктов $\chi(t,S,\mu)\cdot\mu$ на вероятность для каждого из них испытать воздействие $[\mu \to \tilde{\mu}]$ в некотором малом элементе $d\Omega$ фазового пространства (S,μ). Что касается вероятности испытания воздействия $[\mu \to \tilde{\mu}]$, то о ней можно, по крайней мере, утверждать, что она пропорциональна плотности расположения оборудования $\lambda_{оборуд}$ вдоль технологической цепочки. Таким образом, число базовых продуктов, испытавших в единицу времени воздействие со стороны технологического оборудования и принявшие значения в пределах $(\tilde{\mu};\tilde{\mu}+d\tilde{\mu})$, можно записать в виде

$$\psi[\mu \to \tilde{\mu}]\cdot\lambda_{оборуд}\cdot\mu\cdot\chi(t,S,\mu)\cdot d\tilde{\mu}\cdot dS\cdot d\mu, \tag{43}$$

где $\psi[\mu \to \tilde{\mu}]$ – функция, определяемая паспортными данными работы технологического оборудования. Некоторые свойства этой функции могут быть получены из весьма общих соображений, если представить, что полная вероятность перехода в любое состояние равна единице:

$$\int_0^\infty \psi[\mu \to \tilde{\mu}]\cdot d\tilde{\mu} = 1. \tag{44}$$

Наряду с этим, в элемент объема $dS\cdot d\mu$ поступают базовые продукты с объема $dS\cdot d\tilde{\mu}$ посредством обратного перехода $\psi[\tilde{\mu} \to \mu]$ в количестве:

$$\psi[\tilde{\mu} \to \mu]\cdot\lambda_{оборуд}\cdot\tilde{\mu}\cdot\chi(t,S,\tilde{\mu})\cdot d\tilde{\mu}\cdot dS\cdot d\mu, \tag{45}$$

а общее число базовых продуктов в элементе объема $d\Omega$ изменяется в единицу времени на величину:

$$d\Omega \cdot J =$$

$$= d\Omega \cdot \lambda_{\text{оборуд}} \cdot \int_0^\infty \{\psi[\tilde{\mu} \to \mu] \cdot \tilde{\mu} \cdot \chi(t,S,\tilde{\mu}) - \psi[\mu \to \tilde{\mu}] \cdot \mu \cdot \chi(t,S,\mu)\} d\tilde{\mu}. \quad (46)$$

Принимая во внимание нормировочное свойство (44) функции $\psi[\mu \to \tilde{\mu}]$, уравнение (40) можно представить в виде:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial \chi}{\partial S} \cdot \mu + \frac{\partial \chi}{\partial \mu} \cdot f(t,S) =$$

$$= \lambda_{\text{оборуд}} \cdot \left\{ \int_0^\infty [\psi[\tilde{\mu} \to \mu] \cdot \tilde{\mu} \cdot \chi(t,S,\tilde{\mu})] \cdot d\tilde{\mu} - \mu \cdot \chi \right\}. \quad (47)$$

В большинстве интересных с практической точки зрения случаях функция $\psi[\tilde{\mu} \to \mu]$ не зависит от состояния базового продукта до испытания воздействия $\tilde{\mu}$ со стороны технологического оборудования, что приводит к упрощению интегро-дифференциального уравнения (47):

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial \chi}{\partial S} \cdot \mu + \frac{\partial \chi}{\partial \mu} \cdot f(t,S) = \lambda_{\text{оборуд}} \cdot \{\psi[\tilde{\mu} \to \mu] \cdot [\chi]_1 - \mu \cdot \chi\}. \quad (48)$$

Нулевой $\int_0^\infty d\mu \cdot \chi(t,S,\mu) = [\chi]_0$ и первый $\int_0^\infty d\mu \cdot \mu \cdot \chi(t,S,\mu) = [\chi]_1 = \langle\mu\rangle \cdot [\chi]_0$ моменты функции распределения имеют простую производственную интерпретацию: заделы базовых продуктов и их темп движения вдоль технологической цепочки. С помощью моментов функции распределения можно записать уравнения для описания макровеличин производственной системы. Умножив уравнение (48) соответственно на 1, μ, $\frac{\mu^2}{2}$ и проинтегрировав по всему диапазону μ, получим уравнения балансов [11]:

$$\frac{\partial [\chi]_0}{\partial t} + \frac{\partial [\chi]_1}{\partial S} = \int_0^\infty d\mu \cdot J,$$

$$\frac{\partial ([\chi]_1)}{\partial t} + \frac{\partial \left(\langle\mu\rangle^2 \cdot [\chi]_0\right)}{\partial S} = -\frac{\partial P}{\partial S} + f(t,S) \cdot [\chi]_0 + \int_0^\infty d\mu \cdot \mu \cdot J, \quad (49)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\langle\mu\rangle^2 \cdot [\chi]_0}{2} + \frac{P}{2}\right\} + \frac{\partial}{\partial S}\left(\langle\mu\rangle \cdot \left\{\frac{\langle\mu\rangle^2 \cdot [\chi]_0}{2} + \frac{3 \cdot P}{2}\right\} + \Theta\right) =$$

$$= f(t,S) \cdot [\chi]_1 + \int_0^\infty d\mu \cdot \frac{\mu^2}{2} \cdot J,$$

где

$$\int_0^\infty d\mu \cdot \left(\mu - \langle\mu\rangle\right)^2 \cdot \chi = P(t,S); \quad \int_0^\infty d\mu \cdot \left(\mu - \langle\mu\rangle\right) \cdot \frac{\left(\mu - \langle\mu\rangle\right)^2}{2} \cdot \chi = \Theta(t,S).$$

Уравнения балансов (49), представляющие собой уравнения заделов, темпа и дисперсии базовых продуктов вдоль технологической цепочки, незамкнуты. Возможность получить замкнутую систему уравнений основана на свойствах функции $\psi[\tilde{\mu} \to \mu]$ и наличии малого параметра $Kv = \frac{l_{св}}{\xi} << 1$, представляющего собой отношение длины свободного движения $l_{св}$ базовых продуктов вдоль технологической цепочки между единицами оборудования к характерному размеру технологической цепочки [7]. В нулевом приближении по малому параметру $Kv << 1$

$$J = \sum_{m=0}^{\infty} (Kv)^m \cdot J_m; \quad J_0 = \lambda_{оборуд} \cdot \{\psi[\tilde{\mu} \to \mu] \cdot [\chi]_1 - \mu \cdot \chi\} = 0; \qquad (50)$$

из уравнения балансов (49) следует замкнутая система уравнений для описания производственной системы

$$\frac{\partial [\chi]_0}{\partial t} + \frac{\partial [\chi]_1}{\partial S} = 0; \quad \frac{\partial \langle\mu\rangle}{\partial t} + \langle\mu\rangle \cdot \frac{\partial \langle\mu\rangle}{\partial S} = -\frac{1}{[\chi]_0} \cdot \frac{\partial P(t,S)}{\partial S} + f(t,S); \qquad (51)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\langle\mu\rangle^2 \cdot [\chi]_0}{2} + \frac{P}{2}\right\} + \frac{\partial}{\partial S}\left(\langle\mu\rangle \cdot \left\{\frac{\langle\mu\rangle^2 \cdot [\chi]_0}{2} + \frac{3 \cdot P}{2}\right\} + \Theta\right) =$$

$$= f(t,S) \cdot \langle\mu\rangle \cdot [\chi]_0;$$

где $\Theta = \langle\mu\rangle \cdot \left\{\frac{[\chi]_0 \cdot \sigma_\psi^{\,2} - P}{2} + \frac{[\chi]_0 \cdot \left(\mu_\psi - \langle\mu\rangle\right)^2}{2}\right\}$, а μ_ψ и $\sigma_\psi^{\,2}$ определены как

$$\int_0^\infty \mu \cdot \psi[\mu \to \tilde{\mu}] \cdot d\tilde{\mu} = \mu_\psi; \quad \int_0^\infty \left(\mu - \mu_\psi\right)^2 \cdot \psi[\mu \to \tilde{\mu}] \cdot d\tilde{\mu} = \sigma_\psi^{\,2} \qquad (52)$$

и задаются паспортными данными оборудования.

Если положить заданным темп базовых продуктов $[\chi]_1(t,S)$ вдоль технологической цепочки, то в качестве частного случая из системы уравнений (51) получаем известное в кибернетической экономике уравнение уровня Форестера, которое в настоящее время является основным уравнением для описания функционирования производственно-сбытовых систем [19].

В нулевом приближении по малому параметру Kv форма функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\chi(t,S,\mu)$ для описания функционирования производственной системы определяется уравнением (48). Моменты функции распределения $\chi(t,S,\mu)$ удовлетворяют замкнутой системе уравнений (51), которая служит для описания поведения макроскопических параметров идеальной производственной системы. Идеальность производственной системы заключается в отсутствии для замкнутой системы уравнений (51) в нулевом приближении по малому параметру Kv членов, описывающих диссипативные производственные процессы.

3. Вопросы устойчивости макроскопических параметров технологических процессов серийного и массового производства

Хорошо известно, что влияние малых возмущающих факторов на поведение производственно-сбытовой системы будет не одинаковым для различных процессов. На одни технологические процессы это влияние незначительно, так как возмущенное состояние мало отличается от невозмущенного. Напротив, на других технологических процессах влияние возмущений сказывается весьма значительно, как бы ни были малы возмущающие воздействия. Так как возмущающие факторы всегда существуют неизбежно, то становится понятным, почему задача устойчивости производственного процесса приобретает важное теоретическое и практическое значение. Исследование устойчивости производственного процесса будем рассматривать через макропараметры производственной системы с серийным или массовым выпуском продукции. Макропараметрами системы являются заделы базовых продуктов $[\chi]_0$ между технологическими операциями вдоль технологической цепочки производственного процесса и темп перемещения базовых продуктов $[\chi]_1$ от одной технологической операции к другой, представляют собой нулевой $[\chi]_0$ и первый $[\chi]_1$ моменты функции распределения $\chi(t,S,\mu)$ базовых продуктов по скоростям изменения затрат μ в фазовом пространстве (S,μ), удовлетворяющей кинетическому уравнению (40):

$$\frac{\partial\chi}{\partial t}+\frac{\partial\chi}{\partial S}\cdot\mu+\frac{\partial\chi}{\partial\mu}\cdot f(S)=J(t,S,\mu). \qquad (53)$$

Под возмущающими факторами будем понимать воздействия, не учитываемые при описании производственного процесса вследствие их малости по сравнению с основными факторами, влияющими на производство и выпуск продукции. Они могут действовать как мгновенно, что сведется к малому изменению начального состояния производственной системы, так и непрерывно, и это будет означать, что составленные уравнения производственного процесса отличаются от истинных на некоторые малые поправочные члены, не учтенные в уравнениях производственного процесса. Замкнутая система уравнений для макропараметров производственной системы в нулевом приближении по малому параметру $Kv = \left(l_{св} \middle/ \xi \right) << 1$, представляющему собой отношение длины $l_{св}$ свободного перемещения базовых продуктов между единицами оборудования вдоль технологической цепочки к характерному размеру технологической цепочки ξ, имеет вид:

$$\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t} + \frac{\partial[\chi]_1}{\partial S} = 0,$$
$$\frac{\partial[\chi]_1}{\partial t} + \frac{\partial[\chi]_2}{\partial S} = f(t,S) \cdot [\chi]_0, \; [\chi]_2 = [\chi]_1 \cdot \left([\chi]_{1\psi} \middle/ [\chi]_0 \right), \qquad (54)$$

где $[\chi]_2$ представляет собой второй момент функции распределения $\chi(t,S,\mu)$ базовых продуктов по скоростям изменения затрат μ, а макровеличина $[\chi]_{1\psi}$ задается паспортными данными оборудования [8].

Пусть системе уравнений (54) соответствует невозмущенное решение:

$$[\chi]_0^* = [\chi]_0^*(t,S); \; [\chi]_1^* = [\chi]_1^*(t,S). \qquad (55)$$

Невозмущенное решение (55) соответствует плановым показателям производственного процесса. Производственный план выражает баланс между темпом движения базовых продуктов вдоль технологической цепочки и требуемым месячным выпуском продукции. Пусть наблюдаемые производственной или диспетчерской службой макровеличины "технологические заделы" $[\chi]_0$ и "темп движения базовых продуктов вдоль технологической цепочки" $[\chi]_1$ получат случайные малые возмущения $[y]_0$, $[y]_1$:

$$[y]_0 = [\chi]_0 - [\chi]_0^*; \; [y]_1 = [\chi]_1 - [\chi]_1^*. \qquad (56)$$

Линеаризуем систему уравнений макропараметров производственной системы (54) относительно малых возмущений (56) в окрестности невозмущенного состояния (55):

$$\frac{\partial[y]_0}{\partial t} + \frac{\partial[y]_1}{\partial S} = 0, \qquad (57)$$
$$\frac{\partial[y]_1}{\partial t} + \frac{\partial[y]_1}{\partial S} \cdot B_1 + [y]_1 \cdot A_1 + \frac{\partial[y]_0}{\partial S} \cdot B_0 + [y]_0 \cdot A_0 = 0,$$

где введены коэффициенты

$$A_0 = -\frac{\partial B_0}{\partial S} - \left.\frac{\partial\left(f(t,S)\cdot[\chi]_0\right)}{\partial[\chi]_0}\right|_{[\chi]_0=[\chi]_0^{*},[\chi]_1=[\chi]_1^{*}}, \; B_0 = -\frac{[\chi]_1^{*}\cdot[\chi]_{1\psi}^{*}}{\left([\chi]_0^{*}\right)^2},$$

$$A_1 = \frac{\partial B_1}{\partial S} - \left.\frac{\partial\left(f(t,S)\cdot[\chi]_0\right)}{\partial[\chi]_1}\right|_{[\chi]_0=[\chi]_0^{*},[\chi]_1=[\chi]_1^{*}}, \; B_1 = \frac{[\chi]_{1\psi}}{[\chi]_0^{*}}. \qquad (58)$$

Период существования возмущения $T_{возм}$ производственных макроскопических показателей на практике составляет от нескольких дней до нескольких недель, в то время, как период изменения коэффициентов (58), определяемый стратегическим управлением предприятия, составляет от нескольких месяцев до нескольких лет. Это дает возможность предполагать, что введенные коэффициенты (58), фиксируемые диспетчерской службой предприятия, на протяжении периода $T_{возм}$ существования возмущения не зависят явно от времени, а их изменения во времени ΔB_1, ΔB_0, ΔA_1, ΔA_0 много меньше значений самих коэффициентов B_1, B_0, A_1, A_0:

$$\frac{B_1}{T_{возм}} >> \frac{\partial B_1}{\partial t}, \; \frac{B_0}{T_{возм}} >> \frac{\partial B_0}{\partial t}, \; \frac{A_1}{T_{возм}} >> \frac{\partial A_1}{\partial t}, \; \frac{A_0}{T_{возм}} >> \frac{\partial A_0}{\partial t}. \qquad (59)$$

Таким образом, будем считать, что коэффициенты в уравнениях в частных производных (57) зависят только от *S*. Разложим малые возмущения $[y]_0$, $[y]_1$ макропараметров $[\chi]_0$ и $[\chi]_1$ в ряд Фурье:

$$[y]_0 = \{y_0\}_0 + \sum_{j=1}^{\infty}\{y_0\}_j \cdot \sin[k_j \cdot S] + \sum_{j=1}^{\infty}[y_0]_j \cdot \cos[k_j \cdot S];$$

$$k_j = \frac{2\cdot\pi\cdot j}{S_d} \qquad (60)$$

$$[y]_1 = \{y_1\}_0 + \sum_{j=1}^{\infty}\{y_1\}_j \cdot \sin[k_j \cdot S] + \sum_{j=1}^{\infty}[y_1]_j \cdot \cos[k_j \cdot S],$$

с коэффициентами разложения $\{y_0\}_0$, $\{y_0\}_j$, $[y_0]_j$, $\{y_1\}_0$, $\{y_1\}_j$, $[y_1]_j$ малых возмущений макропараметров производственной системы $[y]_0$, $[y]_1$ вдоль технологической цепочки производственного процесса. Подставляя в систему уравнений (57) вместо $[y]_0$, $[y]_1$ их разложение в ряд Фурье (60), получим системы уравнений для коэффициентов разложения малых возмущений $[y]_0$, $[y]_1$ макропараметров $[\chi]_0$ и $[\chi]_1$:

$$\frac{d\{y_0\}_0}{dt} = 0, \; \frac{d\{y_1\}_0}{dt} + A_1 \cdot \{y_1\}_0 + A_0 \cdot \{y_0\}_0 = 0, \qquad (61)$$

и $\dfrac{d\{y_0\}_j}{dt} - [y_1]_j \cdot k_j = 0$, $\dfrac{d[y_0]_j}{dt} + \{y_1\}_j \cdot k_j = 0$,

$$\frac{d\{y_1\}_j}{dt} - B_1 \cdot [y_1]_j \cdot k_j + A_1 \cdot \{y_1\}_j - B_0 \cdot [y_0]_j \cdot k_j + A_0 \cdot \{y_0\}_j = 0,$$

$$\frac{d[y_1]_j}{dt} + B_1 \cdot \{y_1\}_j \cdot k_j + A_1 \cdot [y_1]_j + B_0 \cdot \{y_0\}_j \cdot k_j + A_0 \cdot [y_0]_j = 0 \qquad (62)$$

с соответствующими характеристическими уравнениями для j=0 и для j>0:

$$\begin{vmatrix} (\vartheta_0) & 0 \\ (A_0) & (A_1 + \vartheta_0) \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} (\vartheta_j) & 0 & 0 & (-k_j) \\ 0 & (\vartheta_j) & (k_j) & 0 \\ (A_0) & (-B_0 \cdot k_j) & (\vartheta_j + A_1) & (-B_1 \cdot k_j) \\ (B_0 \cdot k_j) & (A_0) & (B_1 \cdot k_j) & (\vartheta_j + A_1) \end{vmatrix} = 0. \qquad (63)$$

Характеристические уравнения (63) дают связь между собственным числом ϑ_j и волновым числом k_j:

$$\vartheta_0 \cdot (B_1 + \vartheta_0) = 0,\ \vartheta_j^2 + \vartheta_j \cdot (A_1 \pm i \cdot B_1 \cdot k_j) + \\ + (k_j^{\,2} \cdot B_0 \mp i \cdot k_j \cdot A_0) = 0. \qquad (64)$$

Если корни ϑ_j уравнений (65) имеют отрицательную реальную часть, то производственный процесс устойчив. Случай положительной реальной части ϑ_j свидетельствует об экспоненциальном нарастании амплитуды возмущений $[y]_0$, $[y]_1$ со временем, т.е. о неустойчивости.

Система уравнений состояния производственной системы (61) имеет характеристическое уравнение (64) с одним нулевым корнем $\vartheta_{0_1} \equiv 0$. Такие системы в теории устойчивости относятся к критическим случаям исследования устойчивости и требуют дополнительного внимания. Система уравнений (61) относительно малых возмущений $[y]_0$, $[y]_1$ имеет решение:

$$\{y_0\}_0 = c_{\{y_0\}_0} = \text{const},\ \{y_1\}_0 = \exp(-A_1 \cdot t) + \{\tilde{y}_1\}_0. \qquad (65)$$

Постоянная интегрирования $\{\tilde{y}_1\}_0 = \text{const}$ определяется из равенства

$$A_1 \cdot \{\tilde{y}_1\}_0 + A_0 \cdot c_{\{y_0\}_0} = 0. \qquad (66)$$

Тривиальное решение $\{y_0\}_0 = c_{\{y_0\}_0} = 0$, $\{y_1\}_0 = 0$ содержится в семействе решений рассмотренной системы уравнений и соответствует нулевому значению постоянной $c_{\{y_0\}_0} = 0$. В этом случае система уравнений состояния производственной системы относительно малых возмущений $[y]_0$, $[y]_1$ допускает интеграл – семейство инвариантных поверхностей, на каждой из которых имеется особая точка $\{y_0\}_0 = c_{\{y_0\}_0}$, $\{y_1\}_0 = \exp(-A_1 \cdot t) + \{\tilde{y}_1\}_0$ [13]. Тривиальному решению соответствует исследуемое невозмущенное установившееся состояние рассматриваемой производственной системы (55). Точно так же решению (65) соответствуют другие установившиеся состояния рассматриваемой производственной системы. Таким образом, в особом случае одного нулевого корня исследуемое невозмущенное состояние принадлежит к семейству установившихся состояний, которое определяется системой уравнений (62). В особом случае невозмущенное состояние всегда устойчиво. Устойчивость при этом не будет асимптотической. Однако всякое возмущенное состояние, достаточно близкое к невозмущенному, не стремясь при $t \to \infty$ к невозмущенному состоянию, стремится все же к одному из установившихся состояний вышеуказанного семейства. Другими словами, для всякого решения уравнений возмущенного состояния, для которого начальные значения $\{y_0\}_0\big|_{t=0} = c_{\{y_0\}_0}$, $\{y_1\}_0\big|_{t=0} = \{\tilde{y}_1\}_0$ достаточно малы, справедливы равенства

$$\lim_{t\to\infty}\{y_0\}_0 = c_{\{y_0\}_0}, \ \lim_{t\to\infty}(\exp(-A_1 \cdot t)) = 0. \qquad (67)$$

Условия устойчивости макропараметров $[\chi]_0$ и $[\chi]_1$ технологического процесса производственной системы относительно малых возмущений $[y]_0$, $[y]_1$ можно записать в виде отрицательности реальной части корней характеристического уравнения (64). Условия устойчивости макропараметров функционирования производства через коэффициенты системы уравнений (57) дают соотношения между величиной операционных заделов и темпом движения заготовок от операции к операции вдоль технологического процесса. Условиями устойчивости макропараметров $[\chi]_0$ и $[\chi]_1$ функционирования производственного процесса определяются условия синхронизации поставок сырья, материалов, комплектующих смежными организациями и структурными участками предприятия. При этом мы предполагали, что система уравнений (57), описывающая состояние производственной системы относительно малых возмущений $[y]_0$, $[y]_1$ макропараметров $[\chi]_0$ и $[\chi]_1$ аналитична в рассматриваемой области и исследуемое невозмущенное состояние (55) лежит в указанной области.

Тривиальное решение $\{y_0\}_0 = c_{\{y_0\}_0} = 0$, $\{y_1\}_0 = 0$ содержится в семействе решений рассмотренной системы уравнений и соответствует нулевому значению постоянной $c_{\{y_0\}_0} = 0$. В этом случае система уравнений состояния производственной системы относительно малых возмущений $[y]_0$, $[y]_1$ допускает интеграл – семейство инвариантных поверхностей, на каждой из которых имеется особая точка $\{y_0\}_0 = c_{\{y_0\}_0}$, $\{y_1\}_0 = \exp(-A_1 \cdot t) + \{\tilde{y}_1\}_0$ [13]. Тривиальному решению соответствует исследуемое невозмущенное установившееся состояние рассматриваемой производственной системы (55). Точно так же решению (65) соответствуют другие установившиеся состояния рассматриваемой производственной системы. Таким образом, в особом случае одного нулевого корня исследуемое невозмущенное состояние принадлежит к семейству установившихся состояний, которое определяется системой уравнений (62). В особом случае невозмущенное состояние всегда устойчиво. Устойчивость при этом не будет асимптотической. Однако всякое возмущенное состояние, достаточно близкое к невозмущенному, не стремясь при $t \to \infty$ к невозмущенному состоянию, стремится все же к одному из установившихся состояний вышеуказанного семейства. Другими словами, для всякого решения уравнений возмущенного состояния, для которого начальные значения $\{y_0\}_0\big|_{t=0} = c_{\{y_0\}_0}$, $\{y_1\}_0\big|_{t=0} = \{\tilde{y}_1\}_0$ достаточно малы, справедливы равенства

$$\lim_{t\to\infty}\{y_0\}_0 = c_{\{y_0\}_0}, \ \lim_{t\to\infty}(\exp(-A_1 \cdot t)) = 0. \qquad (67)$$

Условия устойчивости макропараметров $[\chi]_0$ и $[\chi]_1$ технологического процесса производственной системы относительно малых возмущений $[y]_0$, $[y]_1$ можно записать в виде отрицательности реальной части корней характеристического уравнения (64). Условия устойчивости макропараметров функционирования производства через коэффициенты системы уравнений (57) дают соотношения между величиной операционных заделов и темпом движения заготовок от операции к операции вдоль технологического процесса. Условиями устойчивости макропараметров $[\chi]_0$ и $[\chi]_1$ функционирования производственного процесса определяются условия синхронизации поставок сырья, материалов, комплектующих смежными организациями и структурными участками предприятия. При этом мы предполагали, что система уравнений (57), описывающая состояние производственной системы относительно малых возмущений $[y]_0$, $[y]_1$ макропараметров $[\chi]_0$ и $[\chi]_1$ аналитична в рассматриваемой области и исследуемое невозмущенное состояние (55) лежит в указанной области.

ными заделами $Y_0(t,S)$ и темпом производственного процесса $Y_1(t,S)$:

$$\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t}+\frac{\partial[\chi]_1}{\partial S}=Y_0(t,S);\frac{\partial[\chi]_1}{\partial t}+\frac{\partial[\chi]_2}{\partial S}=f(t,S)\cdot[\chi]_0+Y_1(t,S);$$

$$[\chi]_2=[\chi]_1\cdot\left({[\chi]_{1\psi}}\big/{[\chi]_0}\right). \qquad (70)$$

Пусть макропараметры производственной системы $[\chi]_0$ и $[\chi]_1$ в ходе производственной деятельности получат малые возмущения $[y]_0$ и $[y]_1$ относительно своего планового (невозмущенного) состояния (56):

$$[y]_n=[\chi]_n-[\chi]_n^*, \qquad (71)$$

для ликвидации которых от диспетчерской службы предприятия требуются управляющие воздействия u_0, u_1:

$$Y_n(t,S)-Y_n^*(t,S)=\sum_{m=0}^{1}q_{nm}\cdot u_m+(0^2). \qquad (72)$$

С учетом (69), (71) и (72) линеаризованные уравнения оперативного управления производственной системой принимают вид:

$$\frac{\partial[y]_0}{\partial t}+\frac{\partial[y]_1}{\partial S}=\sum_{m=0}^{1}q_{0m}\cdot u_m+R_0(t,[y]_n,u_m), \qquad (73)$$

$$\frac{\partial[y]_1}{\partial t}+\frac{\partial[y]_1}{\partial S}\cdot B_1+[y]_1\cdot A_1+\frac{\partial[y]_0}{\partial S}\cdot B_0+[y]_0\cdot A_0=$$

$$=\sum_{m=0}^{1}q_{1m}\cdot u_m+R_1(t,[y]_n,u_m),$$

где $A_0=-\dfrac{\partial B_0}{\partial S}-\left.\dfrac{\partial(f(t,S)\cdot[\chi]_0)}{\partial[\chi]_0}\right|_{[\chi]_n=[\chi]_n^*}$, $B_0=-\dfrac{[\chi]_1^*\cdot[\chi]_{1\psi}^*}{([\chi]_0^*)^2}$,

$$A_1=\frac{\partial B_1}{\partial S}-\left.\frac{\partial(f(t,S)\cdot[\chi]_0)}{\partial[\chi]_1}\right|_{[\chi]_n=[\chi]_n^*},\ B_1=\frac{[\chi]_{1\psi}}{[\chi]_0^*}. \qquad (74)$$

Функции q_{nm} представляют собой ограниченные и непрерывные функции времени; $R_j(t,[y]_n,u_m)$ – функции, разлагающиеся в области $t\geq 0$, $|[y]_n|<H_n$ в ряд по переменным (70), причем разложения начинаются членами не ниже второго порядка малости. H_n – наперед заданные сколь угодно малые величины. Период существования возмущения $T_{возм}$ производственных макроскопических показателей

на практике составляет от нескольких дней до нескольких недель, что много меньше периода изменения коэффициентов (74), определяемого стратегическим управлением предприятия:

$$\frac{B_1}{T_{возм}} >> \frac{\partial B_1}{\partial t}, \frac{B_0}{T_{возм}} >> \frac{\partial B_0}{\partial t},$$

(75)

$$\frac{A_1}{T_{возм}} >> \frac{\partial A_1}{\partial t}, \frac{A_0}{T_{возм}} >> \frac{\partial A_0}{\partial t}.$$

Прикладные задачи оперативного управления макропараметрами производственной системы с массовым выпуском продукции наряду с требованиями асимптотической устойчивости заданного планового состояния (69) содержат обычно пожелания о наименьших затратах производственных ресурсов (энергии, сырья, трудовых ресурсов и т.д.), расходуемых на формирование управляющих воздействий $u_m(t,[y]_n)$. Такие пожелания можно выразить в виде условия минимальности некоторого интеграла:

$$I = \int_{t_0}^{\infty} \omega(t,[y]_n, u_m) \cdot dt. \tag{76}$$

Здесь $\omega(t,[y]_n, u_m)$ – неотрицательная функция, которая должна обеспечивать достаточно быстрое затухание возникших возмущения $[y]_n$ макропараметров производственной системы, удовлетворительно оценивать ресурсы, затрачиваемые на формирование управляющих воздействий $u_m(t,[y]_n)$ и дать возможность представить решение задачи в простой и замкнутой форме. Этим требованиям в большинстве практических случаев удовлетворяет функция в виде определенно положительной квадратичной формы

$$\omega = \sum_{n,m=0}^{1} \alpha_{n,m} \cdot [y]_n \cdot [y]_m + \sum_{n,m=0}^{1} \beta_{n,m} \cdot u_n \cdot u_m. \tag{77}$$

Задачу об управлении макропараметрами производственной системы с массовым выпуском продукции при условии минимума критерия качества (77) будем называть задачей об оптимальном оперативном управлении производственной системой с массовым выпуском продукции. Пусть выбран критерий качества производственного процесса в виде интеграла (76). Требуется найти такие управляющие воздействия $u_m(t,[y]_n)$, которые обеспечат асимптотическую устойчивость планового состояния производственной системы (69) в силу уравнений в малых возмущениях (73). При этом, какие бы то ни были другие управляющие воздействия, $u^{*}_{m}(t,[y]_{n})$, решающие задачу, должно выполняться неравенство

$$I=\int\limits_{t_0}^{\infty}\omega(t,[y]^{0}_{n},u^{0}_{m})\cdot dt\le\int\limits_{t_0}^{\infty}\omega(t,[y]^{*}_{n},u^{*}_{m})\cdot dt \qquad (78)$$

для всех начальных условий в области существования решений системы уравнения (73). Как правило, функции $u^{0}_{m}(t,[y]_{n})$, разрешающие задачу об оптимальном оперативном управлении производственной системой с массовым выпуском продукции определяются однозначно [5]. Представим критерий качества в виде:

$$I=\int\limits_{t_0}^{\infty}\left[\frac{1}{S_d}\cdot\int\limits_{0}^{S_d}\left(\sum_{n,m=0}^{1}\alpha_{nm}\cdot[y]_n\cdot[y]_m+\sum_{n,m=0}^{1}\beta_{nm}\cdot u_m\cdot u_n\right)\cdot dS\right]\cdot dt, \qquad (79)$$

где S_d – средняя себестоимость изготовления базового продукта.

Для задач об оптимальном оперативном управлении процессами массового производства, как и для общей задачи устойчивости, может быть развита теория исследования по первому приближению [2]. Используя разложение малых возмущений $[y]_n$ макропараметров $[\chi]_n$ и управляющих воздействий u_m в ряд Фурье с коэффициентами $\{y_n\}_0$, $\{y_n\}_j$, $[y_n]_j$, $\{u_n\}_0$, $\{u_n\}_j$, $[u_n]_j$:

$$[y]_n=\{y_n\}_0+\sum_{j=1}^{\infty}\{y_n\}_j\cdot\sin[k_j\cdot S]+\sum_{j=1}^{\infty}[y_n]_j\cdot\cos[k_j\cdot S],\ k_j=\frac{2\cdot\pi\cdot j}{S_d}$$

$$[u]_n\approx\{u_n\}_0+\sum_{j=1}^{\infty}\{u_n\}_j\cdot\sin[k_j\cdot S]+\sum_{j=1}^{\infty}[u_n]_j\cdot\cos[k_j\cdot S], \qquad (80)$$

получим вид подынтегральной функции (78) для интеграла качества (80):

$$\omega=\sum_{n,m=0}^{1}\alpha_{n,m}\left(\{y_n\}_0\cdot\{y_m\}_0+\frac{1}{2}\cdot\sum_{j=1}^{\infty}\{y_n\}_j\cdot\{y_m\}_j+\frac{1}{2}\cdot\sum_{j=1}^{\infty}[y_n]_j\cdot[y_m]_j\right)+$$
$$+\sum_{n,m=0}^{1}\beta_{n,m}\left(\{u_n\}_0\cdot\{u_m\}_0+\frac{1}{2}\cdot\sum_{j=1}^{\infty}\{u_n\}_j\cdot\{u_m\}_j+\frac{1}{2}\cdot\sum_{j=1}^{\infty}[u_n]_j\cdot[u_m]_j\right), \qquad (81)$$
$$\beta_{mn}=\beta_{nm}.$$

Для установившегося процесса в силу неравенств (75) оптимальную функцию Ляпунова V^0 будем искать в виде квадратичной формы с постоянными коэффициентами $c_{n,m}=\text{const}$:

$$V^0 = \frac{1}{S_d}\cdot\int_0^{S_d}\sum_{n,m=0}^{1}\alpha_{nm}\cdot[y]_n\cdot[y]_m\cdot dS =$$

$$= \sum_{n,m=0}^{1} c_{n,m}\cdot\left(\{y_n\}_0\cdot\{y_m\}_0 + \frac{1}{2}\cdot\sum_{j=1}^{\infty}\{y_n\}_j\cdot\{y_m\}_j + \frac{1}{2}\cdot\sum_{j=1}^{\infty}[y_n]_j\cdot[y_m]_j\right). \quad (82)$$

Составим выражение $B[V^0]$ для рассматриваемой производственной системы:

$$B[V^0] = \sum_{n=0}^{1}\frac{\partial V^0}{\partial\{y_n\}_0}\cdot\frac{\partial\{y_n\}_0}{dt} + \sum_{n=0}^{1}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\partial V^0}{\partial\{y_n\}_j}\cdot\frac{d\{y_n\}_j}{dt} + \sum_{n=0}^{1}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\partial V^0}{\partial[y_n]_j}\cdot\frac{d[y_n]_j}{dt} + \omega. \quad (83)$$

При $u_m = u_m^0(t,[y]_n)$ величина $B[V^0]$ должна иметь минимум и обращаться при этом в ноль:

$$B[V^0]=0. \quad (84)$$

Подставляя вместо малых возмущений и соответствующих управляющих воздействий их разложение (80), можно получить новый вид уравнений (73):

$$\frac{d\{y_0\}_0}{dt} - \sum_{m=0}^{1} q_{0m}\cdot\{u_m\}_0 = 0;$$

$$\frac{d\{y_1\}_0}{dt} + \sum_{n=0}^{1} A_n\cdot\{y_n\}_0 - \sum_{m=0}^{1} q_{1m}\cdot\{u_m\}_0 = 0, \quad (85)$$

и $\dfrac{d\{y_0\}_j}{dt} - [y_1]_j\cdot k_j - \sum_{m=0}^{1} q_{0m}\cdot\{u_m\}_j = 0;$

$$\frac{d[y_0]_j}{dt} + \{y_1\}_j\cdot k_j - \sum_{m=0}^{1} q_{0m}\cdot[u_m]_j = 0;$$

$$\frac{d\{y_1\}_j}{dt} - \sum_{n=0}^{1}\left(A_n\cdot\{y_n\}_j - B_n\cdot[y_n]_j\cdot k_j\right) - \sum_{m=0}^{1} q_{1m}\cdot\{u_m\}_j = 0;$$

$$k_j = \frac{2\cdot\pi\cdot j}{S_d}$$

$$\frac{d[y_1]_j}{dt} + \sum_{n=0}^{1}\left(A_n\cdot[y_n]_j + B_n\cdot\{y_n\}_j\cdot k_j\right) - \sum_{m=0}^{1} q_{1m}\cdot[u_m]_j = 0. \quad (86)$$

Дифференцируя $B[V^0]$ по $\{u_m\}_0$, $\{u_m\}_j$, $[u_m]_j$ и приравнивая результаты к нулю, получим недостающие уравнения для определения оптимальной функции Ляпунова V^0 и оптимальных управляющих воздействий u_m^0:

$$\sum_{m=0}^{1}\frac{\partial V^0}{\partial\{y_n\}_0}\cdot\frac{\partial\left[\frac{d\{y_m\}_0}{dt}\right]}{\partial\{u_n\}_0}+2\cdot\sum_{m=0}^{1}\beta_{mn}\cdot\{u_m\}_0=0;\ j=1;\infty \qquad (87)$$

$$\sum_{m=0}^{1}\frac{\partial V^0}{\partial\{y_n\}_j}\cdot\frac{\partial\left[\frac{d\{y_m\}_j}{dt}\right]}{\partial\{u_n\}_0}+\sum_{m=0}^{1}\beta_{mn}\cdot\{u_m\}_j=0;$$

$$\sum_{m=0}^{1}\frac{\partial V^0}{\partial[y_m]_j}\cdot\frac{\partial\left[\frac{d[y_m]_j}{dt}\right]}{\partial[u_n]_0}+\sum_{m=0}^{1}\beta_{mn}\cdot[u_m]_j=0.$$

Последние уравнения можно разрешить относительно $\{u_m\}_0$, $\{u_m\}_j$, $[u_m]_j$, так как вследствие определенно-положительности формы (81) детерминант этой системы $\Delta=\beta_{00}\cdot\beta_{11}-\beta_{10}\cdot\beta_{01}$ отличен от нуля:

$$\{u_m\}_0=-\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=0}^{1}\frac{\Delta_{km}}{\Delta}\cdot\sum_{n=0}^{1}\frac{\partial V^0}{\partial\{y_n\}_0}\cdot\frac{\partial\left[\frac{d\{y_n\}_0}{dt}\right]}{\partial\{u_k\}_0},$$

$$\{u_m\}_j=-\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=0}^{1}\frac{\Delta_{km}}{\Delta}\cdot\sum_{n=0}^{1}\frac{\partial V^0}{\partial\{y_n\}_j}\cdot\frac{\partial\left[\frac{d\{y_n\}_j}{dt}\right]}{\partial\{u_k\}_j},$$

$$[u_m]_j=-\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=0}^{1}\frac{\Delta_{km}}{\Delta}\cdot\sum_{n=0}^{1}\frac{\partial V^0}{\partial[y_n]_j}\cdot\frac{\partial\left[\frac{d[y_n]_j}{dt}\right]}{\partial[u_k]_j}. \qquad (88)$$

Здесь Δ_{km} – алгебраическое дополнение элемента *k*-й строки и *m*-й колонки. Подставив значения $\{u_m\}_0$, $\{u_m\}_j$, $[u_m]_j$ в уравнения (85), (86) получим уравнение для определения оптимальной функции Ляпунова V^0:

$$\sum_{n,m=0}^{1}c_{nm}\cdot\left(2\cdot\{y_n\}_0\cdot\frac{d\{y_m\}_0}{dt}+\sum_{j=1}^{\infty}\{y_n\}_j\cdot\frac{d\{y_m\}_j}{dt}+\sum_{j=1}^{\infty}[y_n]_j\cdot\frac{d[y_m]_j}{dt}\right)+$$
$$+\sum_{n,m=0}^{1}\alpha_{n,m}\cdot\left(\{y_n\}_0\cdot\{y_m\}_0+\frac{1}{2}\cdot\sum_{j=1}^{\infty}\{y_n\}_j\cdot\{y_m\}_j+\frac{1}{2}\cdot\sum_{j=1}^{\infty}[y_n]_j\cdot[y_m]_j\right)+$$
$$+\sum_{n,m=0}^{1}\beta_{n,m}\left(\{u_n\}_0\cdot\{u_m\}_0+\frac{1}{2}\cdot\sum_{j=1}^{\infty}\{u_n\}_j\cdot\{u_m\}_j+\frac{1}{2}\cdot\sum_{j=1}^{\infty}[u_n]_j\cdot[u_m]_j\right)=0 \qquad (89)$$

Приравнивая коэффициенты при произведениях $\{y_n\}_0\cdot\{y_m\}_0$, $\{y_n\}_j\cdot\{y_m\}_j$, $[y_n]_j\cdot[y_m]_j$ линейно независимых величин $\{y_n\}_0$, $\{y_n\}_j$, $[y_n]_j$, к нулю, получим уравнения для определения величин c_{nm}. Если удастся найти c_{nm} такие, что форма (82) окажется определенно положительной, то задача об оптимальном оперативном управлении будет решена. Достаточные условия разрешимости задачи об определенно-положительности формы (85) определяются рангом матрицы $W = \{Q, Q \cdot B_j\}$, $W = \{Q, Q \cdot B_j\}$, где Q – матрица $\{q_{nm}\}$, B_j – матрица коэффициентов при $\{y_n\}_0$, $\{y_n\}_j$, $[y_n]_j$ в уравнениях (85), (86). Если матрица $W = \{Q, Q \cdot B_j\}$ имеет ранг, равный порядку систем (85), (86), то задача об оптимальном управлении производственным процессом имеет единственное решение.

Таким образом, мы сформулировали задачу об оптимальном оперативном управлении производственной системой с серийным и массовым выпуском продукции. Предполагается, что управляющие функции определены и непрерывны в рассматриваемой области и не стеснены никакими дополнительными ограничениями. Используя метод функций Ляпунова, получен вид оптимальной функции управления производственным процессом предприятия с массовым выпуском продукции. Оптимальная функция управления обеспечивает асимптотическую устойчивость заданного планового (невозмущенного) состояния и содержит пожелания о наилучшем возможном качестве переходного процесса при ликвидации возмущений производственных макропараметров.

Экономические системы развиваются в среде постоянно действующих возмущений, вызывающих различные неустойчивости. Такие неустойчивости определяются изменением внешних и внутренних параметров экономической среды и могут привести к новой пространственно-временной организации экономической системы. Существование экономического хаоса играет важную роль в экономическом прогнозировании и методологии развития предприятия. Открытие хаоса основано на более фундаментальных и проверяемых концепциях. По своему смыслу хаос не является негативным состоянием. Он нам дает надежду на то, что из кризиса может возникнуть нечто новое, более позитивное направление экономической эволюции. И эта надежда оправдывается.

В последнее время теория управления предприятием претерпевает бурный рост. Разработка моделей функционирования предприятия опережает уровень их практического использования. Само по себе опережение научных исследований закономерно, однако оно полезно лишь в том случае, когда внедрение в практику результатов научных исследований идет достаточно быстрыми темпами. В этих условиях всегда существует “спрос” на продукцию науки, что стимулирует ее дальнейшее развитие. Проводя анализ публикаций в открытой печати, следует отметить, что при построении моделей описания предприятия довольно часто используется подход, когда случайные параметры функционирования предприятия рассматриваются детерминированными или описываются наперед заданной функцией. Такая постановка задачи создает впечатление, что удается найти оптимальное единственное решение. Однако решение задачи определяется исходными данными и введенными интегральными параметрами системы, точность выбора которых оставляет желать лучшего. Как альтернатива в разрешении вышеописанной проблемы – использование в описании управлением предприятия имитационного моделирования. Такой подход позволяет получить интегральные характеристики системы через обобщение большого количества различных вариантов поведения системы. Последнее требует обычно значительных затрат машинного времени и не дает прозрачной зависимости между исходными данными и конечным результатом.

В данном разделе предприятие представлено в виде большого множества элементов, каждый из которых обладает своими микропараметрами. Поведение элемента подчиняется конкретным законам функционирования предприятия, определяется установленным на предприятии технологическим процессом, наличием оборудования, трудовых ресурсов и т.д. Состояние системы определяется состоянием элементов системы и может быть описано через функцию распределения случайной величины. Это дает возможность получить интегральные характеристики системы и уравнения поведения наблюдаемых макровеличин исходя из моментов функции распределения случайной величины на основании инженерно-технологических расчетов. Наличие уравнений поведения макровеличин позволяет исследовать поведение предприятия в динамике, что является важным инструментом планирования и управления деятельностью предприятия. Большая свобода маневра, многовариантность выбора элемента системы и координат пространства, в котором рассматривается его движение, открывает широкие возможности для использования предложенной теории в оперативном управлении и стратегическом планировании развития предприятия.

Предложенная методика описания экономического объекта рассмотрена на примере моделирования деятельности предприятия. Однако ее применение может быть более обширно. В качестве большой системы может быть выбрана, например, отрасль народного хозяйства или, например, экономика отдельно взятой страны. Последнее обстоятельство вызывает интерес к более углубленному развитию исследований. Важными направлениями научных работ по развитию самого математического метода применительно к экономическим объектам являются методика выбора базового продукта системы (агрегирование, разагрегирование), построение нелинейных динамических моделей функционирования экономических объектов в самосогласованной постановке, учет неопределенности в параметрах модели, исследование системы на устойчивость и получение оптимальной функции управления системой.[1]

Приложение 1

Свойства функции Лагранжа в модели микроскопического описания производственной системы

Свойство № 1. Если производственная система состоит из двух невзаимодействующих частей (производственных участков, цехов, площадок), то справедливо равенство:

$$J_{П}(t,S_j,\mu_j)=J_{П_1}(t,S_{j_1},\mu_{j_1})+J_{П_2}(t,S_{j_2},\mu_{j_2}). \qquad (П1.1)$$

Свойство № 2. Умножение функции Лагранжа производственной $J_{П}(t,S_j,\mu_j)$ на произвольную постоянную не отражается на уравнениях движения базовых продуктов. Умножение функции Лагранжа производственной системы на произвольную постоянную приводит только к выбору определенной системы единиц, с использованием которых происходит построение модели.

Свойство № 3. Функция Лагранжа производственной системы определяется только с точностью до полной производной от любой функции координат $S_j(t)$ по времени **t**: $\theta(t,S_j)$. Последнее связано с тем, что вариация от функции $\theta_{П}(t,S_j)$ есть тождественный ноль:

$$\delta\theta_{П}(t,S_j)\cdot dt=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial\theta_{П}}{\partial S_j}\cdot\delta S_j\right]\cdot dt=\delta S_j\cdot\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial\theta_{П}}{\partial S_j}\cdot dt=0 \qquad (П1.2)$$

[1]Авторы искренне признательны и благодарны академику НАНУ С.В. Пелетминскому, директору Института теоретической физики им. А.И. Ахиезера ННЦ ФТИ, чл.-кор. НАН Украины Н.Ф. Шульге, профессору ХНУ В.Д. Ходусову за ценные замечания при обсуждении результатов работы

Приложение 2

Первые интегралы в модели микроскопического описания производственной системы

Если функция Лагранжа для описания производственной системы не зависит явно от времени, то полная производная от нее может быть записана в виде:

$$\frac{dJ_П}{dt} = \sum_{j=1}^{N_1}\left[\frac{\partial J_M}{\partial S_j}\cdot\frac{dS_j}{dt}\right] + \sum_{j=1}^{N_1}\left[\frac{\partial J_П}{\partial \mu_j}\cdot\frac{d\mu_j}{dt}\right]. \qquad (П2.1)$$

В силу уравнений Эйлера заменим производные $\frac{\partial J_П}{\partial S_j(t)}$ на их значения $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial J_П}{\partial \mu_j}\right)$, получаем

$$\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{N_2}\left[\left(\frac{\partial J_П}{\partial \mu_j}\right)\cdot\frac{dS_j}{dt} - J_П\right] = 0\cdot \qquad (П2.2)$$

Откуда величина $\sum_{j=1}^{N_2}\left[\left(\frac{\partial J_П}{\partial \mu_j}\right)\cdot\frac{dS_j}{dt} - J_П\right]$=const (П2.3)

является постоянной в ходе функционирования производственной системы, есть интеграл движения системы. К подобным экономическим системам относятся системы, имеющие полный замкнутый технологический цикл. Если представить функцию Лагранжа производственной системы в виде разности существенно разных членов, зависящих только от фазовых скоростей и фазовых координат, то интеграл движения примет вид

$$\sum_{j=1}^{N_1}\left[\left(\frac{\partial J_П}{\partial \mu_j}\right)\cdot\frac{dS_j}{dt}\right] - J_П = const \text{ или}$$

$$\sum_{j=1}^{N_1}\frac{a_S\cdot\mu_j^2}{2} + \Phi_{Ц\_П}(t,S_j,\mu_j) + W_П(t,S_j,\mu_j) = \text{const}. \qquad (П2.4)$$

Системы, имеющие интеграл указанного вида, называются консервативными.

Следующий интеграл движения производственной системы $J_П(t,S_j,\mu_j)$ возникает вследствие однородности фазового пространства (функция Лагранжа для описания состояния внутренней среды производственной системы не зависит явно от фазовой координаты):

$$\frac{\partial J_{\Pi}}{\partial S} = 0 \cdot \qquad (\Pi 2.5)$$

Как следствие однородности фазового пространства потребуем, чтобы функция Лагранжа $J_{\Pi}(t, S_j, \mu_j)$ замкнутой системы осталась неизменна при переносе системы как целого на отрезок δS. Изменение функции Лагранжа $J_{\Pi}(t, S_j, \mu_j)$ вследствие малого перемещения по фазовой координате:

$$\delta J_{\Pi}(t, S_j \mu_j) = \sum_{j=1}^{N_1} \left[\frac{\partial J_{\Pi}}{\partial S_j} \cdot \delta S \right] = \delta S \cdot \sum_{j=1}^{N_1} \frac{\partial J_{\Pi}}{\partial S_j} \cdot \qquad (\Pi 2.6)$$

Так как выбор δS произволен, потребуем $\delta J_{\Pi}(t, S_j \mu_j) = 0$, что эквивалентно

$$\sum_{j=1}^{N_1} \frac{\partial J_{\Pi}}{\partial S_j} = 0 \cdot \qquad (\Pi 2.7)$$

В силу уравнений Эйлера получаем

$$\sum_{j=1}^{N_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial J_{\Pi}}{\partial \mu_j} \right) = 0 \qquad (\Pi 2.8)$$

Поменяем в (П2.7) операции суммирования и дифференцирования местами, запишем:

$$P_S = \sum_{j=1}^{N_1} \left(\frac{\partial J_{\Pi}}{\partial \mu_j} \right) = const \cdot \qquad (\Pi 2.9)$$

Постоянные величины есть интегралы движения системы.

Исходное равенство (П2.7) в силу определения величины воздействия производственной системы на j-й базовый продукт дает равенство

$$\sum_{j=1}^{N_1} \frac{\partial J_{\Pi}}{\partial S_j} = \sum_{j=1}^{N_1} F_{S_j}(t, S_j, \mu_j) = 0 \cdot \qquad (\Pi 2.10)$$

Последнее равенство означает, что сумма всех воздействий на базовые продукты производственной системы равна нулю.

Следующий интеграл движения производственной системы $J_{\Pi}(t, S_j, \mu_j)$ возникает вследствие однородности фазового пространства по фазовой скорости и уравнение Эйлера принимает вид (функции Лагранжа для описания состояния внутренней среды производственной системы не зависит явно от фазовой скорости):

$$\frac{\partial J_{\Pi}}{\partial \mu} = 0 \cdot \qquad (\Pi 2.11)$$

Это условие совпадает по форме с необходимым условием экстремума в классической задаче математического программирования при отсутствии ограничений. Такая динамическая задача, по существу, является обобщением классических задач статической оптимизации с конечным числом переменных на случай бесконечного числа переменных.

Список литературы

1. Балашевич В.А. Математические методы в управлении производством. – Минск: Вышэйшая школа, 1976. – 334 с.
2. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений: Пер. с англ. Мышкиса А.Д. – М.: Издательство иностранной литературы, 1954. – 215 с.
3. Венцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. – М.: Высшая школа, 2000. – 480 с.
4. Венцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. – М.: Высшая школа, 2000. – 383 с.
5. Гальперин Е.А., Красовский Н.Н. О стабилизации установившихся движений нелинейных управляемых систем, ПММ, т. 27, вып. 6. – 1963.
6. Гончар Н.С., Информационная модель в экономике. Международная конференция НАНУ “Статистическая физика: Общие проблемы и новые применения”. – Львов, 2005. – С. 33.
7. Демуцкий В.П., Пигнастая В.С., Пигнастый О.М. Стохастическое описание экономико-производственных систем с массовым выпуском продукции: Доповіді Національної академії наук України, 2005. – № 7.– С. 66-71.
8. Демуцкий В.П., Пигнастая В.С., Пигнастый О.М. Теория предприятия: Устойчивость функционирования массового производства и продвижения продукции на рынок. – Харьков, 2003. – 272 с.
9. Занг В.-Б., Синергетическая экономика. – М.: Мир, 1999. – 335 с.
10. Канторович Л.В. Математические методы организации и планирования производства. – Л.: Изд. ЛГУ, 1939.
11. Климонтович Ю.Л. Статистическая физика. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. – 608 с.
12. Леонтьев В.В. Исследования структуры американской экономики. – М.: Государственное статистическое издательство, 1958. – 640 с.
13. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. – М.: Гостехиздат, 1950. – 395 с.
14. Прыкин Б.В. Технико-экономический анализ производства. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000. – 399 с.
15. Рушицький Я.Я., Мілованов Т.С., Модифікована модель Філіпса-Лоренца для економічної системи (корпорації фірм) із стабільним капіталом // Доповіді Національної академії наук України. – 1999. – № 12. – С. 36-40.
16. Рыжиков Ю.И. Теория очередей и управление запасами. – СПб.: Питер, 2001. – 384 с.
17. Самуэльсон Пауль А. Foundation of Economic Analysis. – Harvard University Press, Cambridge, MA, 1947. – 417 с.
18. Синергетика: Сб. статей: Пер. с англ. / Сост. А.И. Рязанов, А.Д. Суханов / Под ред. Б.Б. Кадомцева. – М.: Мир, 1984 с.
19. Форрестер Дж. Основы кибернетики предприятия, 1961. – 341 с., Энтропийные методы моделирования сложных систем: Пер. с англ. – М.: Наука, 1978, 248 с.

20. Чернавский Д.С., Старков Н.И., Щербаков А.В. О проблемах физической экономики // Успехи физических наук. – 2002. – Т. 172. – № 12. – С. 1045-1066.
21. Юхновский И.Р., Термодинамические аналогии в экономике. Международная конференция НАНУ "Статистическая физика: Общие проблемы и новые применения". – Львов, 2005. – С. 51.
22. Hikc J.R. A Contribution to the Theory of the Trade Cycle. – Clarendon, Oxford, 1950. – 214 с.

ВЫБОР ДОМИНИРУЮЩИХ ФАКТОРОВ ВНЕШНЕЙ СРЕДЫ ПРЕДПРИЯТИЯ НА ОСНОВЕ МЕТОДА АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ*

Современные условия функционирования украинских предприятий характеризуются высокой степенью нестабильности внешней среды, значительным возрастанием темпов производственных процессов. Поэтому традиционные способы сбора, переработки информации и методы принятия решений не успевают отражать все изменения во внешней и внутренней среде предприятия или фиксируют их с большим запозданием. Это приводит к возникновению определённых неувязок в планировании, снабжении и обслуживании, снижает производительность общественного труда, ухудшает экономические показатели производства.

Перед предприятиями возникает актуальная задача внутренней самооценки и прогнозирования своего состояния с точки зрения выполнения свойственных им производственных функций, принятия мер защиты этих функций, то есть обеспечения экономической безопасности производства от различных проявлений внешнего и внутреннего происхождения, воздействующих на потенциал предприятия. Помощь в решении этой задачи может оказать создание системы анализа и предупреждения кризисных ситуаций, в которой автоматизированы расчёты по обработке технико-экономической информации на основе использования экономико-математических методов и вычислительных средств, и действует принцип непрерывности наблюдения за состоянием предприятия с учетом фактического состояния и тенденций развития его потенциала, а также общего развития экономики и действия других общесистемных факторов.

Успех стратегии предупреждения кризисных ситуаций во многом зависит от того, удалось ли руководству фирмы своевременно

* *А.Т. Рогович,* Харьковский национальный экономический университет

Наукове видання

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В СУЧАСНІЙ ЕКОНОМІЦІ

Монографія

Редактори
Н.І. Одарченко
Г.К. Булахова
І.О. Кругляк
Комп'ютерна верстка
В.А. Івакін

Підписано до друку 02.06.2006. Формат 60х90/16. Гарнітура Times.
Обл.-вид. арк. 10,0. Умов. друк. арк. 15,2. Тираж 300 пр. Зам. № 712.

Інформаційно-видавничий відділ
Української академії банківської справи Національного банку України.
Адреса: 40030, м. Суми, вул. Петропавлівська, 57.
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції: серія ДК № 2316

Надруковано на обладнанні Української академії банківської справи Національного банку України