

УДК 658.51.012

ОСНОВЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПОСТРОЕНИЯ КОНТИНУАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ЛИНИЙ

О. М. Пигнастый

Кандидат технических наук, доцент
Кафедра компьютерного
мониторинга и логистики

Национальный технический университет
«Харьковский политехнический институт»
ул. Фрунзе, 21, г. Харьков, Украина, 61000

E-mail: pom7@bk.ru

У статті обговорюється введений автором в опублікованих раніше роботах (2003 г.) клас моделей виробничих систем з потоковим способом організації виробництва, широко використовуваній в даний час для побудови ефективних систем управління виробничими лініями. Моделі класу, що визначають поведінку параметрів виробничої лінії за допомогою рівнянь в приватних похідних, отримали назву PDE-моделей виробничих систем

Ключові слова: PDE-модель, масове виробництво, незавершене виробництво, балансові рівняння, виробнича лінія, рівняння стану

В статье обсуждается введенный автором в опубликованных ранее работах (2003 г.) класс моделей производственных систем с поточным способом организации производства, широко используемый в настоящее время для построения эффективных систем управления производственными линиями. Модели класса, определяющие поведение параметров производственной линии с помощью уравнений в частных производных, получили название PDE-моделей производственных систем

Ключевые слова: PDE-модель, производственная линия, незавершенное производство, балансовые уравнения, уравнение состояния

1. Введение

Конкурентоспособность промышленных предприятий с поточным методом организации производства существенным образом зависит от уровня эффективности управления производственными линиями [1–4]. В современных экономических условиях длительность цикла производства составляет существенную часть жизненного цикла изделия, тем самым поточные линии значительную часть времени функционируют в переходном неустановившемся режиме, для полноценного описания которого не подходят распространенные квазистатистические модели производственных линий [5].

При проектировании систем управления производственными линиями в связи с этим в последнее десятилетие особое внимание уделяется построению моделей для переходных режимов. Актуальность проблемы настолько высока, что ведущие мировые предприятия (Intel Corporation, Volkswagen AG, Royal Philips) наряду с финансированием многочисленных научных грантов, создали экспериментальные лаборатории по исследованию переходных неустановившихся режимов. Современному производству необходимы надежные, не требующие значительных вычислительных ресурсов много-моментные балансовые модели, позволяющие описать поведение потоковых параметров производственных линий, как для квазистатистических, так и для переходных режимов. Процесс управления современным многопоточным производством усложняется

тем, что производственные линии предприятий являются многономенклатурными, состоят из значительного количества технологических операций, используют для обработки изделий множество разных видов технологических ресурсов, содержат в незавершенном производстве большое число предметов труда, распределенных вдоль технологического маршрута. Технологические маршруты изделий разных номенклатур пересекаются. Для выполнения разных технологических операций используется одно и то же оборудование, что требует расстановки приоритетов при обработке изделий и потреблении ресурсов. Основные параметры поточных линий представлены в табл. 1.

В настоящее время при проектировании конкурентных систем управления потоковыми параметрами производственных линий (рис. 1, 2), функционирующих в связи с частой сменой номенклатуры выпускаемой продукции значительную часть производственного цикла в неустановившихся переходных режимах, исследователи вынуждены разрабатывать совершенно новые типы моделей.

Эти типы модели должны удовлетворять современным требованиям проектирования производственных систем:

- а) сочетать самосогласованные предметно-технологическое на микроуровне и потоковое на макроуровне описания производственной линии;
- б) учитывать механизм стохастического взаимодействия предметов труда с оборудованием и между собой [1, 5].

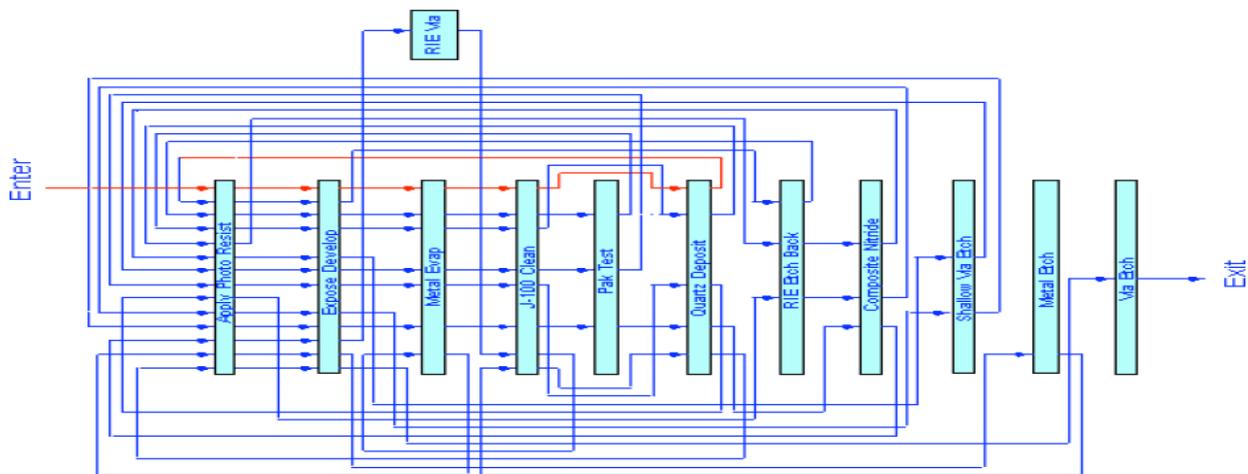


Рис. 1. Структура возвратной производственной линии [6]

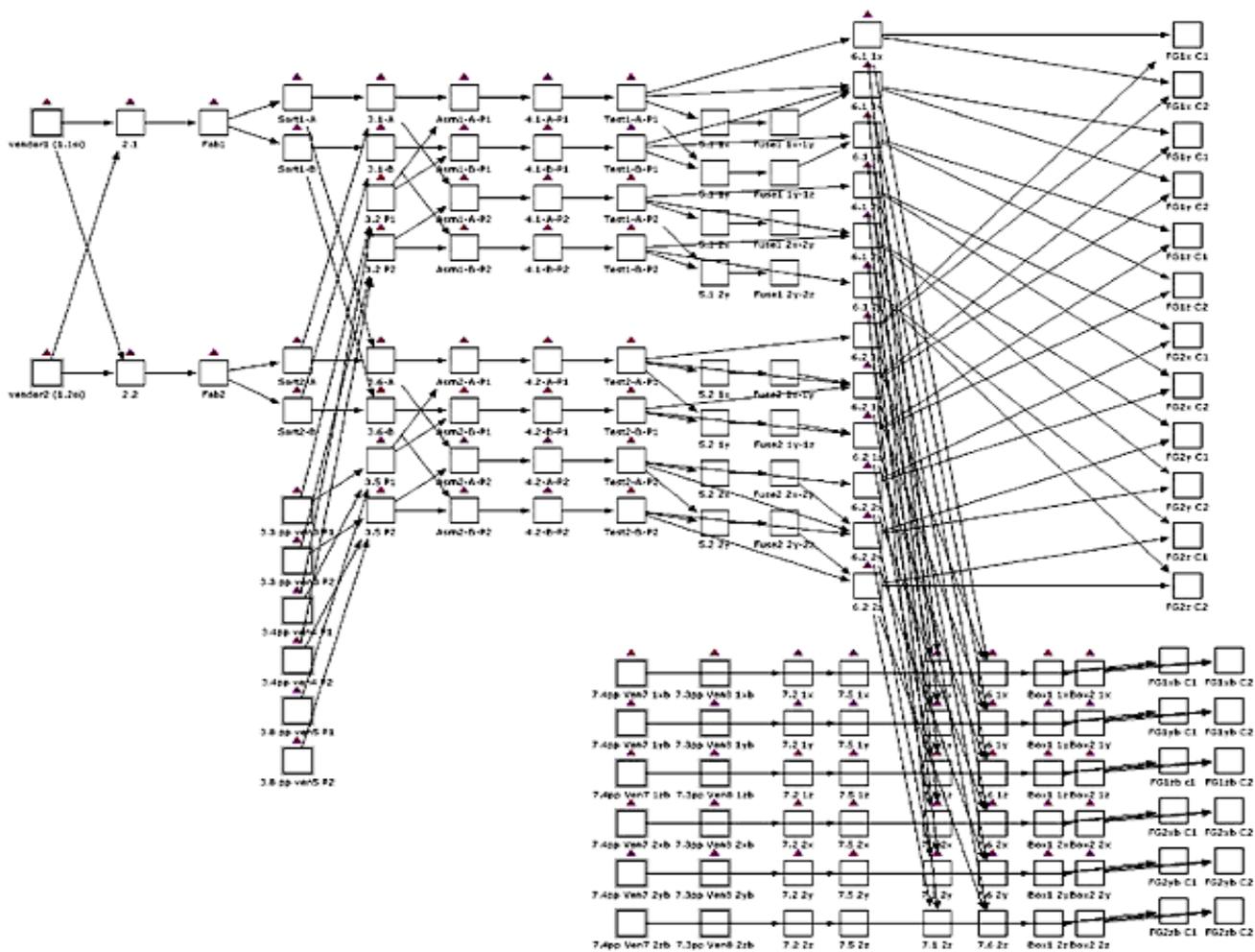


Рис. 2. Структура производственной многопоточной линии [10]

Мировой опыт моделирования физических систем [11–13], состоящих из множества объектов, подсказывает, что следующий шаг развития моделей производственных линий должен строиться с использованием статистического подхода [1]. Выше изложенные обстоятельства определили цель исследования, заключающуюся в разработке и обосновании концептуальных

положений и теоретических основ статистической теории построения непрерывных моделей производственных линий, функционирующих в переходных и установившихся режимах. Объектом исследования являлся производственный процесс, предметом – математические модели и методы описания производственных процессов обработки изделий.

Таблица 1

Основные параметры производственных линий

Наименование параметра	Значение	Источник
Кол-во изделий в незавершенном производстве	$N=10^4..10^5$ шт.	[7]
Кол-во операций, единиц оборудования	$M=150..1500$ шт	[5, 8]
Кол-во производимых номенклатур изделий	$K=1..10$ шт.	[8]
Продолжительность жизненного цикла изделий	12 мес.	[5]
Длительность производственного цикла	$T_d=3..6$ мес.	[5]
Время принятия управленческого решения	0,5..1.0 час	[9]

2. Анализ литературных данных и постановка проблемы

Обзор современных зарубежных и отечественных публикаций показал, что для описания работы поточных линий производственной системы используются три основных типа моделей.

Первый тип моделей – это модели массового обслуживания (TQ-модели) (рис. 3, 4) [6, 14–16]. Известные модели массового обслуживания используются для описания производственных линий, функционирующих в установившемся, квазистатическом режиме. Применение их для моделирования переходных неустановившихся производственных процессов приводит к чрезмерному усложнению и большим затратам вычислительных ресурсов. Используются для одномоментного квазистатического описания производственных линий с небольшим количеством единиц оборудования (1–3 единицы).

Второй тип моделей – дискретно-событийные модели (DES-модели) [7, 16, 17]. Дискретно-событийные модели хорошо себя зарекомендовали и удачно применены для описания работы производственных линий в переходном и установившемся режиме, но требуют больших затрат вычислительных ресурсов в связи с многократной имитацией процесса производства, состоящего из значительного количества технологических операций по обработке партий предметов труда внушительных размеров. Не пригодны для построения аналитических зависимостей между потоковыми параметрами, необходимых для качественной оценки проектируемых систем. Требуют использования устойчивых вычислительных алгоритмов. На рис. 5 представлены траектории предметов труда, движущихся по технологическому маршруту поточной линии, полученные с помощью аналитической и экспериментальной DES-модели.

Третий тип моделей – модели жидкости (Fluid-модели) (рис. 6). Fluid-модели ориентированы на малое количество интервалов разбиения технологического маршрута и линейные стационарные решения [5, 8–10, 21]. Широкое распространение получило направление системной динамики [21]. Основная трудность, не

позволяющая эффективно использовать данный тип моделей, определяется высокой размерностью нелинейной системы уравнений и сложностью построения замкнутой системы уравнений.

Каждый тип моделей имеет свои преимущества, но ни один из них в полной мере не подходит для моделирования как установившихся, так и переходных производственных процессов [22].

Наличие однообразных задач планирования и управления производством привело исследователей к идеи создать единую оптимизационную теорию производственных систем с поточным способом организации производства.

Вначале S. C. Graves (1986) [23], а позднее U. S. Karmarkar (1989) [24] предложили использовать в качестве основных параметров состояния пропускную способность $[\chi]_{CL}$ производственной системы, объем незавершенного производства W и длительность производственного цикла T_d . Для описания поведения параметров производственной системы, U.S.Karmarkar ввел уравнение состояния $[\chi]_{CL} = \Phi(W)$, задающее связь между пропускной способностью $[\chi]_{CL}$ производственной системы и объемом незавершенного производства W , получившее название clearing-функции. Этот подход значительно упорядочил описание производственных линий, но не устранил указанных выше недостатков, т. к. для построения уравнения состояния используются существующие дискретно-событийные модели (DES), модели массового обслуживания (TQ) и жидкости (Fluid). Развитие производства требовало новые методы решения задач.

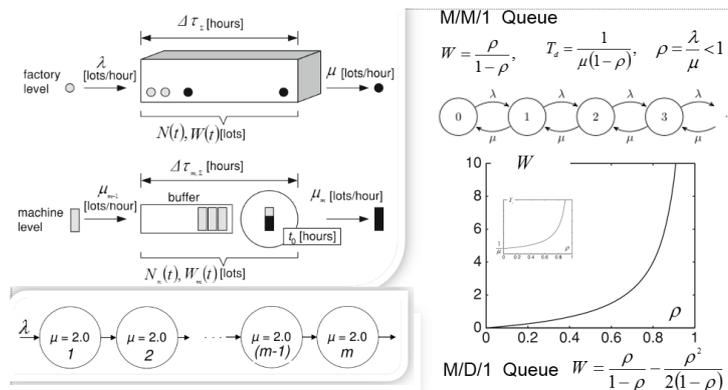


Рис. 3. Базовые одномоментные TQ-модели поточной линии [18, 19]

Концентрация усилий исследователей над решением поставленных задач привела к тому, что в последнее десятилетие для проектирования поточных линий разработаны модели, содержащие уравнения в частных производных (PDE-модели) [1, 3–5]. Введенный класс моделей объединил преимущества TQ-модели, DES-модели и Fluid-модели, открыл новые возможности для проектирования систем управления производственными линиями. PDE-модели позволили учесть влияние внутренних факторов производства и имеющиеся технологические ограничения. Существенным преимуществом PDE-модели является то, что они подробно позволили описать движение предметов труда от операции к операции, допускают решение в аналитическом виде и не нуждаются в значительных вычислительных ресурсах.

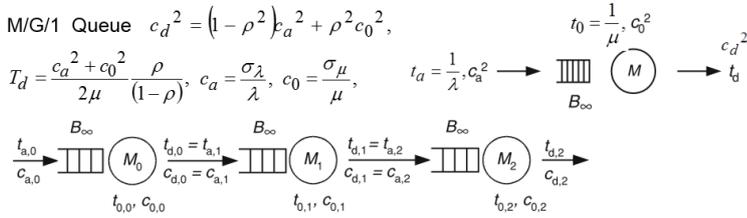


Рис. 4. Базовые 2-х моментные TQ-модели поточной линии [19, 20]

ное в обозначениях, введенных в работах [3–5], является незамкнутым. Замыкание уравнения (1) во многих случаях обеспечено через уравнения состояния (clearing-функций). Ниже представлен анализ основных PDE-моделей производственных линий.

Для описания синхронизированных конвейерных линий довольно часто используется PDE-модель, содержащая Graves-уравнение состояния:

$$\frac{\partial \rho(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = 0, \quad F(t,x) = \rho(t,x) \cdot v(t,x),$$

$$v(t,x) = c = \text{const}, \quad x \in [0,1]. \quad (2)$$

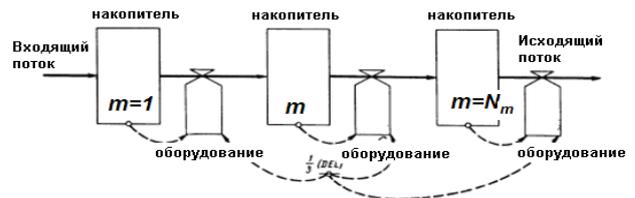


Рис. 6. Концептуальное представление Fluid-модели (Форрестер Дж., 1961 [21])

Модель (2) позволяет получить потоковые параметры конвейера, движение предметов труда на котором происходит с постоянной скоростью $v(t,x)$. Для описания производственных линий с ограниченной пропускной способностью удачно зарекомендовала себя нелинейная PDE-модель Lighthill–Whitham:

$$\frac{\partial \rho(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = 0, \quad F(t,x) = \rho(t,x) \cdot v(t,x),$$

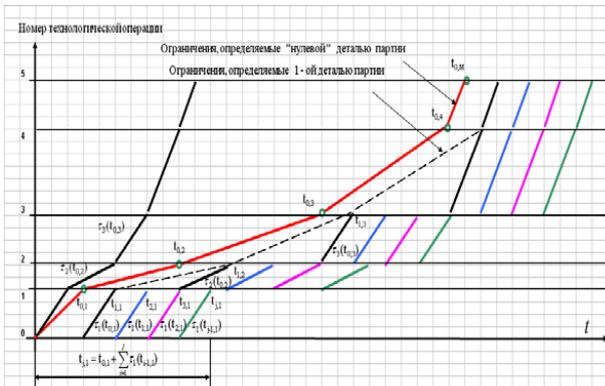
$$v(t,x) = v_0 \left(1 - \frac{\rho(t,x)}{R}\right), \quad v_0 = \text{const}, \quad (3)$$

в которой пропускная способность ограничена максимальной плотностью межоперационных заделов R . При достижении плотности в межоперационном заделе критического значения движение предметов труда по технологическому маршруту останавливается. LW PDE-модель (3) нашла широкое применение в задачах передачи трафика и при описании движущего потока автомобилей. Заслуживает внимания квазистатическая PDE-модель, использующая нелинейное Karmarkar-уравнение состояния

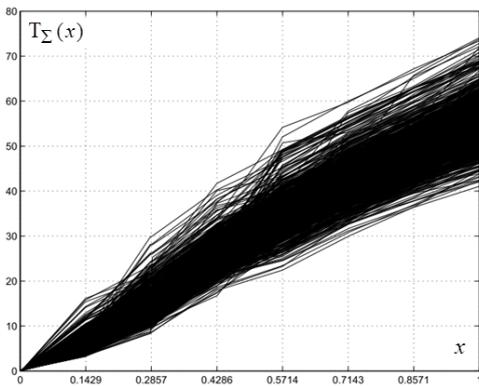
$$\frac{\partial \rho(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = 0, \quad F(t,x) = \rho(t,x) \cdot v(t,x),$$

$$v(t) = \frac{\mu}{M+W}, \quad (4)$$

где M – количество единиц технологического оборудования вдоль технологического маршрута, μ – интенсивность обработки предмета труда, W – объем незавершенного производства. Скорость движения предметов труда $v(t)$ в отличие от модели (2) является зависимой от времени. Модель используется для проектирования конвейерных линий с переменной скоро-



а



б

Рис. 5. Траектории предметов труда DES-модель [5]: а – аналитическая DES-модель [1]; б – эксперимент

Основным уравнением PDE-модели является уравнение сохранения количества предметов труда, находящихся в процессе технологической обработки

$$\frac{\partial \rho(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = 0, \quad F(t,x) = \rho(t,x) \cdot v(t,x),$$

$$W(t) = \int_0^1 \rho(t,x) dx, \quad x \in [0,1], \quad (1)$$

где x – технологическая позиция предмета труда в технологическом маршруте; $\rho(t,x)$ – плотность расположения предметов труда по позициям в технологическом маршруте; $F(t,x)$ – поток предметов труда вдоль технологического маршрута в зависимости от позиции; $W(t)$ – объем незавершенного производства; $v(t,x)$ – скорость движения предметов труда вдоль технологического маршрута. Уравнение (1), записан-

стью движения. При увеличении количества предметов труда W в незавершенном производстве скорость конвейера снижается. PDE-модель (4) предложена Д. Армбрустером (Armbruster), получила дальнейшее развитие в работах Э. Лефебера (Lefeber):

$$\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = 0, \quad F(t, x) = \rho(t, x) \cdot v(t, x),$$

$$v(t, x) = \frac{\mu}{M + \rho(t, x)}. \quad (5)$$

Модель (5) для установившегося процесса учитывает в уравнении состояния зависимость распределения предметов труда по технологическим позициям. Увеличение количества предметов труда в межоперационном заделе приводит к снижению скорости обработки. Шагом в развитии двухмоментных моделей стала предложенная Э. Лефебером (Lefeber) двухмоментная PDE-модель, в которой уравнение состояния заменено уравнением Бюргерса.

$$\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = 0, \quad F(t, x) = \rho(t, x) \cdot v(t, x),$$

$$\frac{\partial v(t, x)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial v(t, x)^2}{\partial x} = 0. \quad (6)$$

Скорость движения предметов труда в двухмоментной PDE-модели (6) так же, как и в одномоментной PDE-модели (5) зависит технологической позиции обработки. Однако в отличие от (5) скорость движения предметов труда в модели (6) определяется не из уравнения состояния для установившегося процесса, а путем решения балансового уравнением Бюргерса. Для описания поведения производственных линий при наличии экспериментальных данных Д. Армбрустером (Armbruster) предложена диффузионная PDE-модель [5]

$$\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = 0,$$

$$F(t, x) = C(t) \cdot \rho(t, x) - D(t) \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial x}, \quad (7)$$

в которой для расчета коэффициентов $C(t)$ и $D(t)$ использованы статистические данные, определяющие технологические траектории предметов труда. Точность вычислительных результатов, полученных с использованием диффузионной PDE-модели, определяется точностью имеющихся статистических данных. Одномоментная модель (5) успешно применяется для описания производственных линий с накопленной статистикой данных о процессе обработки предметов труда. Однако использование диффузионной PDE-модели для проектирования новых производственных линий не представляется возможным. Перспективы развития диффузионной модели тесно связаны с теорией подобия производственных систем [1]. Описанные выше модели используют при замыкании уравнение состояния для установившихся режимов работы производственной линии. Построение уравнений состояния для переходных неустановившихся режимов связано со значительными трудностями [2–5].

Дальнейшее развитие и использование PDE-моделей (1)–(7) столкнулось с необходимостью решением следующих вопросов:

1. Вывод нестационарных уравнений состояния, основанных на детальной технологии обработки предмета труда с учетом схемы оборудования [1, 5].
2. Построение многомоментных замкнутых балансовых моделей для установившихся и переходных режимов работы производственной линии.
3. Построение двухуровневых моделей управления параметрами производственной линии для установившихся и переходных режимов с учетом параметров оборудования, схемы его расстановки и приоритетов движения предметов труда.

3. Нерешенные вопросы и перспективы исследования PDE-моделей

Проведенный анализ современных достижений в области математических моделей производственных линий позволил сформулировать основные направления исследования, заключающиеся в разработке:

1) предметно-технологического описания производственного процесса, основанного на стохастическом механизме переноса технологических ресурсов на предмет труда в результате воздействия оборудования и на сетевом представлении технологического процесса последовательностью технологических операций, позволяющем моделировать производство продукции нескольких номенклатур разными технологическими способами в условиях совместного использования ресурсов и оборудования;

2) потокового, основанного на кинетическом представлении, многомоментного описания производственного процесса и построение на его фундаменте континуальных PDE-моделей для переходных режимов работы производственной линии. Построение двухуровневых моделей, в которых нижний уровень (микроуровень), представленный предметно-технологическим описанием производственного процесса, взаимосвязан с верхним уровнем (макроуровнем), представленным потоковым описанием. Определение критериев подобия технологических процессов. Анализ критериев устойчивости потоковых параметров производственных линий, работающих в установившемся и переходном режиме;

3) нестационарных замкнутых статистических многомоментных PDE-моделей программного управления и оптимальной стабилизации потоковых параметров производственной линии, в которых управление является функцией как времени, так и координаты, характеризующей технологическую позицию места обработки предмета труда.

4. Комплекс моделей предметно-технологического описания

Фундаментом предметно-технологического описания (рис. 7) является модельное представление процесса взаимодействия предметов труда с технологическим оборудованием и между собой.

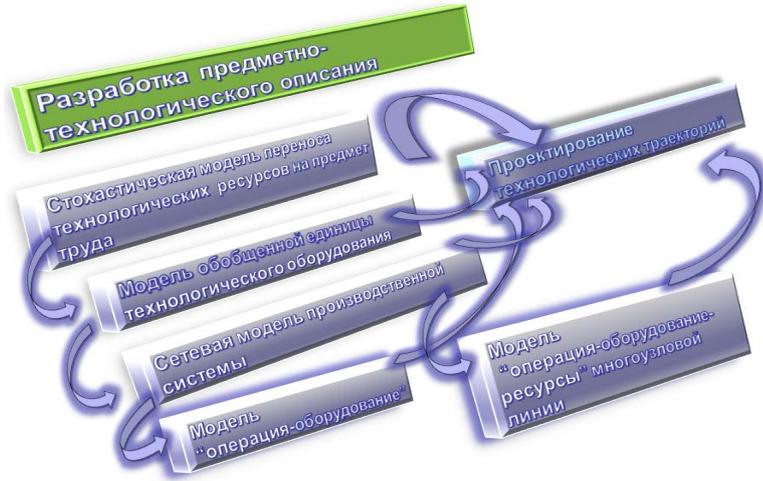


Рис. 7. Комплекс моделей предметно-технологического проектирования

Стохастическая модель переноса технологических ресурсов на предмет труда в результате воздействия технологического оборудования (рис. 8) определяет структуру технологических ресурсов и структуру эффективного времени обработки в пределах времени выполнения технологической операции

$$\mu_{m,\psi}(t) = \frac{\Delta S_{m,\psi}(t)}{\Delta \tau_m(t)} = \frac{\Delta S_{m,CuM}(t) + \Delta S_{m,E}(t) + \Delta \Phi_{m,O}(t) + \Delta \Phi_{m,C}(t) + \Delta S_{m,\infty}(t)}{\Delta \tau_{m,O}(t) + \Delta \tau_{m,B}(t) + \Delta \tau_{m,Pz}(t) + \Delta \tau_{m,E}(t)}, \quad (8)$$

где $\Delta S_{m,CuM}$ грн – стоимость затрат сырья и материалов; $\Delta S_{m,E}$ грн – стоимость затрат энергоресурсов; $\Delta S_{m,\infty}$ грн – стоимость прочих затрат; $\Delta \Phi_{m,O}$, $\Delta \Phi_{m,C}$ грн – фонд оплаты труда основных и вспомогательных рабочих; $\Delta \tau_{m,O}$, $\Delta \tau_{m,B}$, $\Delta \tau_{m,Pz}$, $\Delta \tau_{m,E}$ час – норма основного, вспомогательного подготовительно-заключительного времени и времени на выполнение естественных процессов; m - номер технологической операции.

Модель обобщенной единицы технологического оборудования разработана для агрегирования усредненных параметров $\langle \Delta S_{m,\psi} \rangle$, $\langle \Delta \tau_m \rangle$ технологических операций с требуемой степенью обобщения для производственного участка с последовательным (9) и параллельным (10) размещением оборудования (рис. 9)

$$\langle \Delta S_{m,\psi} \rangle = \frac{\langle \Delta S_{m1,\psi} \rangle \langle \Delta \tau_{m2} \rangle + \langle \Delta S_{m2,\psi} \rangle \langle \Delta \tau_{m1} \rangle}{\langle \Delta \tau_m \rangle}, \quad (9)$$

$$\langle \Delta \tau_m \rangle = \max \{ \langle \Delta \tau_{m1} \rangle, \langle \Delta \tau_{m2} \rangle \},$$

$$\langle \Delta S_{m,\psi} \rangle = \frac{\langle \Delta S_{m1,\psi} \rangle \langle \Delta \tau_{m2} \rangle + \langle \Delta S_{m2,\psi} \rangle \langle \Delta \tau_{m1} \rangle}{\langle \Delta \tau_{m1} \rangle + \langle \Delta \tau_{m2} \rangle}, \quad (10)$$

$$\langle \Delta \tau_m \rangle = \frac{\langle \Delta \tau_{m1} \rangle \cdot \langle \Delta \tau_{m2} \rangle}{\langle \Delta \tau_{m1} \rangle + \langle \Delta \tau_{m2} \rangle}.$$

Совокупность обобщенных единиц технологического оборудования взаимосвязана технологическим маршрутом изготовления изделия, является составной частью **многономенклатурной сетевой модели** производственной системы (рис. 10), где V_m – обобщенная единица технологического оборудования; $E_k = \{V_a, V_b, V_c, V_d, \dots\}$ – обобщенный технологический маршрут. Модель описывает систему, состоящую из нескольких технологических маршрутов (поточных линий), использующих общее технологическое оборудование. Декомпозиция многономенклатурной сетевой модели производственной системы дана на рис. 11.

Стохастическая модель переноса технологических ресурсов, модель обобщенной единицы оборудования и сетевая модель производственной системы использованы для аналитического проектирования технологических траекторий предметов труда в фазовом пространстве состояний. Если достаточно точно определены технологические траектории предметов труда, то можно достаточно точно рассчитать состояние параметров поточной линии [1].

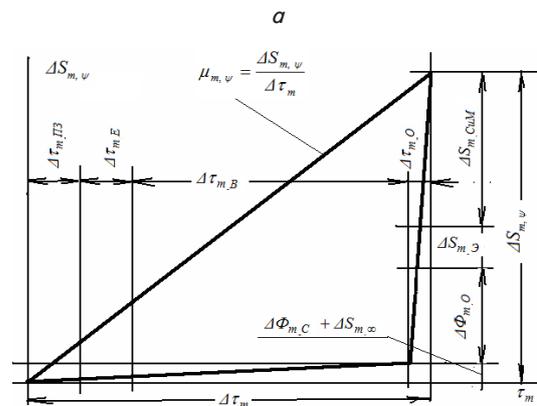
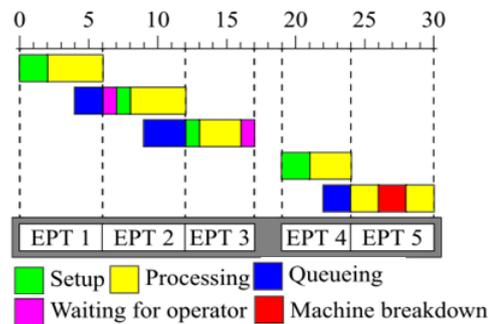


Рис. 8. Стохастическая модель переноса технологических ресурсов: а – структура эффективного времени; б – структура технологических ресурсов

Известные экспериментальный (применено Intel Corporation) [5] и эмпирический [26] методы построения технологических траекторий не получили должного распространения из-за того, что на момент про-

ектирования в большинстве случаев статистическая информация, характеризующая тот или иной режим функционирования производственной линии, отсутствует. Однако, несмотря на это исследователями предложено достаточное количество координатных пространств, характеризующих состояние предмета труда:

- а) (x_1, x_2, x_3, x_4) – определяющее соответственно количество изделий в буфере, количество изделий в технологической обработке, время до окончания обработки и количество обработанных изделий [27] (рис. 12);
- б) $(\mu_{m,\psi}, \tau_m)$ – интенсивность обработки и общее время обработки предмета труда [27] (рис. 13);
- в) (T_Σ, x) – общее время обработки и номер технологической позиции [5] (рис. 13);
- г) $(S_{m,\psi}, \tau_m)$ – стоимость затрат технологических ресурсов перенесенных на предмет труда за общее время обработки предмета труда [26, 28] (рис. 14).

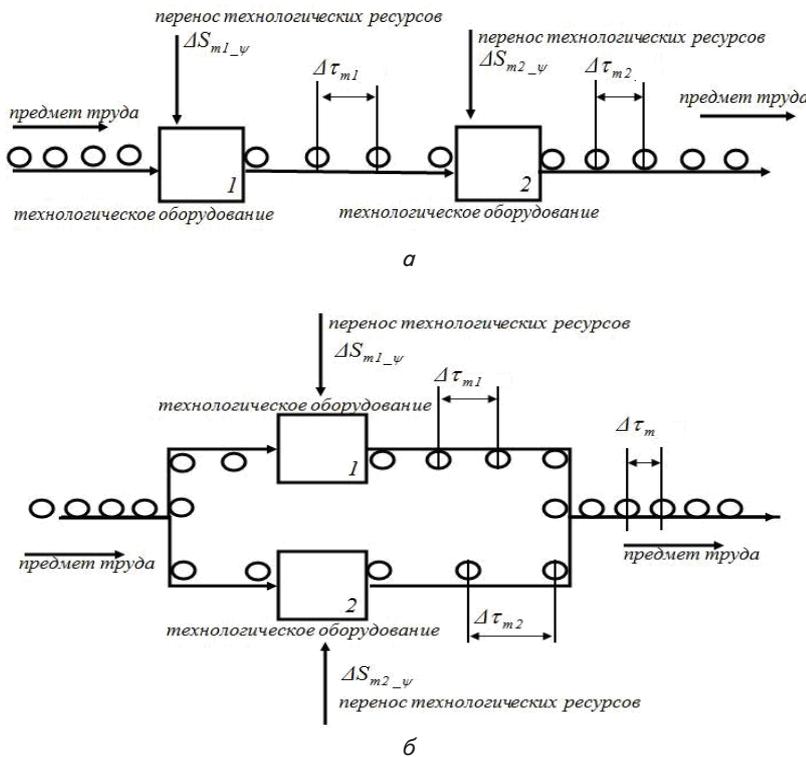


Рис. 9. Модель обобщенной единицы: а – последовательное расположение оборудования; б – параллельное расположение оборудования

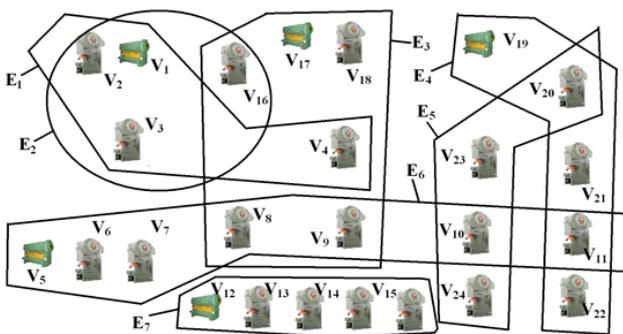


Рис. 10. Многономенклатурная сетевая модель производственной системы

Для описания многономенклатурных производственных линий, использующих несколько технологических ресурсов в ходе выполнения операции, выбрано фазовое пространство $(S_{m,\psi}, \tau_m)$, координатами которого являются стоимостные характеристики изготовления изделия, что позволило решить проблему суммирования разных видов технологических ресурсов, перенесенные на предмет труда.

Разработанные автором аналитические методы проектирования технологических траекторий предметов труда в фазовом пространстве состояний позволили построить нестационарные уравнения состояния для параметров поточной линии. В основу методов положены законы сохранения количества технологических ресурсов, перенесенных на предмет труда при заданной пространственно-временной структуре технологического процесса.

Фундаментом дифференциального метода проектирования является уравнение удерживающей дифференциальной связи

$$F_v \left(S_\alpha, \frac{dS_\alpha}{dt} \right) = (\mu_\psi (S_1, S_2, \dots, S_\alpha, \dots, S_n))^2 - \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n dS_\alpha \cdot dS_\beta = 0, \quad (11)$$

которому соответствует уравнение движения предмета труда в фазовом технологическом пространстве

$$\sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \mu_\psi}{\partial S_\alpha} \cdot \mu_\psi - \sum_{\alpha=1}^n \frac{d\mu_\alpha}{dt} = 0, \quad (12)$$

где $dS_j = Z_j(q_j) \cdot dq_j$ – количество технологических ресурсов j-го вида ценой $Z_j(q_j)$, перенесенных на предмет труда с интенсивностью μ_ψ при его переходе из состояния (q_1, q_2, \dots, q_n) в состояние $(q_1 + dq_1, q_2 + dq_2, \dots, q_n + dq_n)$.

В основу вариационного метода проектирования технологической траектории положено уравнение неударяющей дифференциальной связи

$$F(q_\alpha, \frac{dq_\alpha}{dt}) = (\mu_\psi (q_1, q_2, \dots, q_\alpha, \dots, q_n))^2 - \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n a_{\alpha,\beta}(q_\alpha, q_\beta) \cdot \frac{dq_\alpha}{dt} \cdot \frac{dq_\beta}{dt} \geq 0. \quad (13)$$

Минимум потерь технологических ресурсов в ходе технологической обработки задано целевым функционалом

$$\mathfrak{R}_{ab} = \int_a^b \left(\mu_\psi(q_\alpha)^2 - \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n a_{\alpha,\beta}(q_\alpha, q_\beta) \cdot \frac{dq_\alpha}{dt} \cdot \frac{dq_\beta}{dt} \right) dt \rightarrow \min, \quad (14)$$

вариация которого определяет уравнение движения предмета труда (12) в фазовом технологическом пространстве. Для случая “один технологический ресурс – один предмет труда” уравнение (12) принимает вид

$$\frac{d\mu}{dt} = \mu_{\psi}(S) \cdot \frac{\partial \mu_{\psi}(S)}{\partial S}, \quad \frac{dS}{dt} = \mu, \quad \mu_{\psi}(S) \text{ задано.} \quad (15)$$

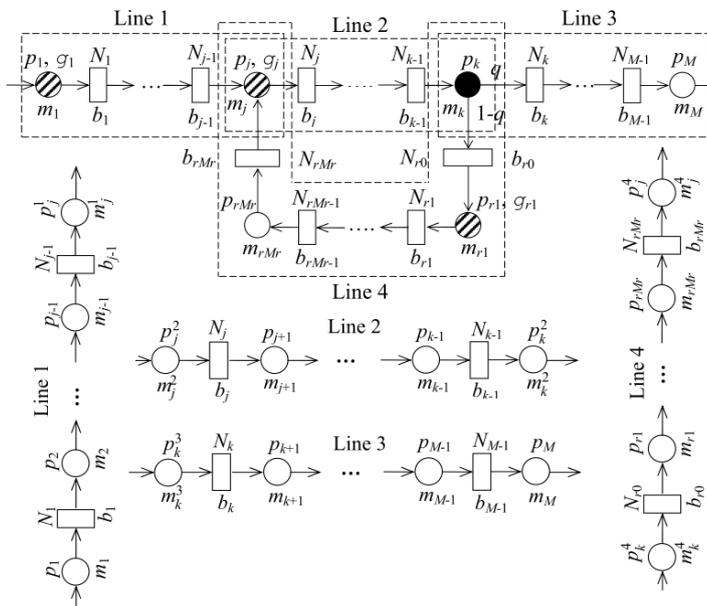


Рис. 11. Декомпозиция многономенклатурной сетевой модели [25]

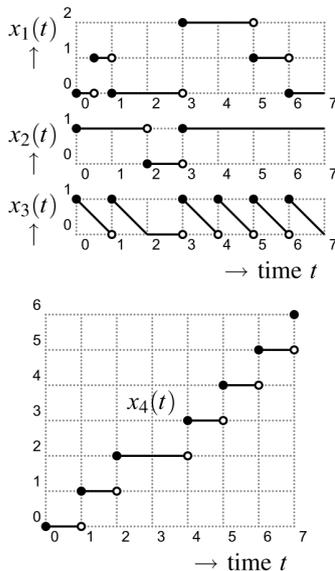


Рис. 12. Параметры пространства состояния модуля [27]

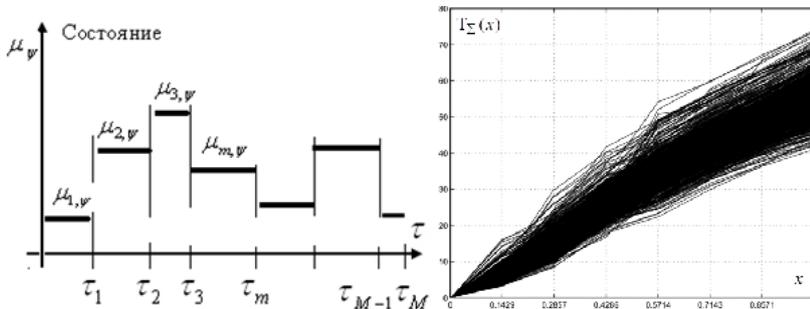


Рис. 13. Параметры пространства состояния изделия (слева [27], справа [5])

В основу разработанного метода проектирования технологической траектории с использованием общего уравнения динамики предмета труда положено уравнение

$$\sum_{\alpha=1}^n \left(Q_{\alpha}(q_{\alpha}) - \sum_{\beta=1}^n a_{\alpha,\beta} \cdot \frac{d^2 q_{\beta}}{dt^2} \right) \cdot \delta q_{\alpha} = 0, \quad (16)$$

где $\delta A_{\alpha} = Q_{\alpha} \cdot \delta q_{\alpha}$ – работа, совершаемая над предметом труда в результате воздействия обобщенных технологических сил, обусловленных переносом технологических ресурсов при виртуальном изменении δq_{α} . Интегрирование общего уравнения динамики приводит к уравнениям движения предмета труда в фазовом технологическом пространстве вида (12).

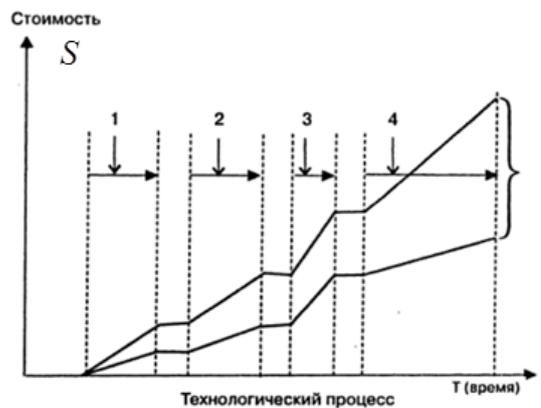


Рис. 14. Стоимостное пространство состояния [26, 29]

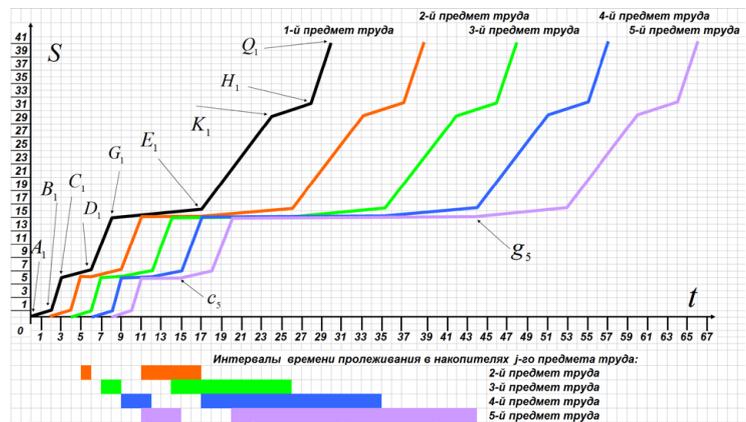


Рис. 15. Технологические траектории предметов труда для переходного режима

Предложенные аналитические методы проектирования технологических траекторий дают возможность снизить трудоемкость расчетов и учесть ограничения, которые накладываются на обработку предмета труда в связи с совместным использованием технологических ресурсов, оборудования и ограничениями прочих технологических параметров (производительностью оборудования, емкостью накопителей). На рис. 15

продемонстрирован расчет технологических траекторий для переходного и установившегося режима.

5. Комплекс моделей потокового описания

Фундаментом потокового описания (16) является кинетическая модель переходных процессов (рис. 17), уравнение которой содержит слагаемые, учитывающие нормативные технологические траектории предметов труда и механизм взаимодействия предметов труда между собой и технологическим оборудованием.

Для кинетического описания введена $\chi(t, S, \mu)$ – фазовая функции распределения предметов труда по состояниям, в которой S – координата технологической позиции (грн), μ – интенсивность переноса

технологических ресурсов (грн.), удовлетворяющая условиям нормировки (1)

$$\int_0^{S_1} \int_0^{\infty} \chi(t, S, \mu) d\mu dS = N(t), \tag{17}$$

а ее первые моменты $[\chi]_0(t, S)$, $[\chi]_1(t, S)$, определен- ные как

$$\int_0^{\infty} \mu^k \chi(t, S, \mu) d\mu = [\chi]_k(t, S), k=0,1,2,\dots \tag{18}$$

представляют соответственно плотность распределе- ния и темп обработки предметов труда в зависимости от технологической позиции.

Рис. 18 демонстрирует разработанный метод двухуровневого моделирова- ния производственной линии. Состояние предметов труда определяется законами взаимодействия предметов труда между собой и технологическим оборудовани- ем на уровне предметно-технологического описания, а их распределение по состоя- ниям – значением потоковых параметров. Данный метод позволил построить модели производственных линий, уравнения которых в отличие от уравнений, рассмо- тренных при построении моделей [2–4] учитывают технологию производства и зако- ны переноса технологических ресурсов на предмет труда в соответствие со схем- ой расстановки оборудования. Уровень предметно-технологического описания согласован и взаимосвязан с уровнем пото- кового описания через промежуточный уровень.



Рис. 16. Комплекс моделей предметно-технологического проектирования

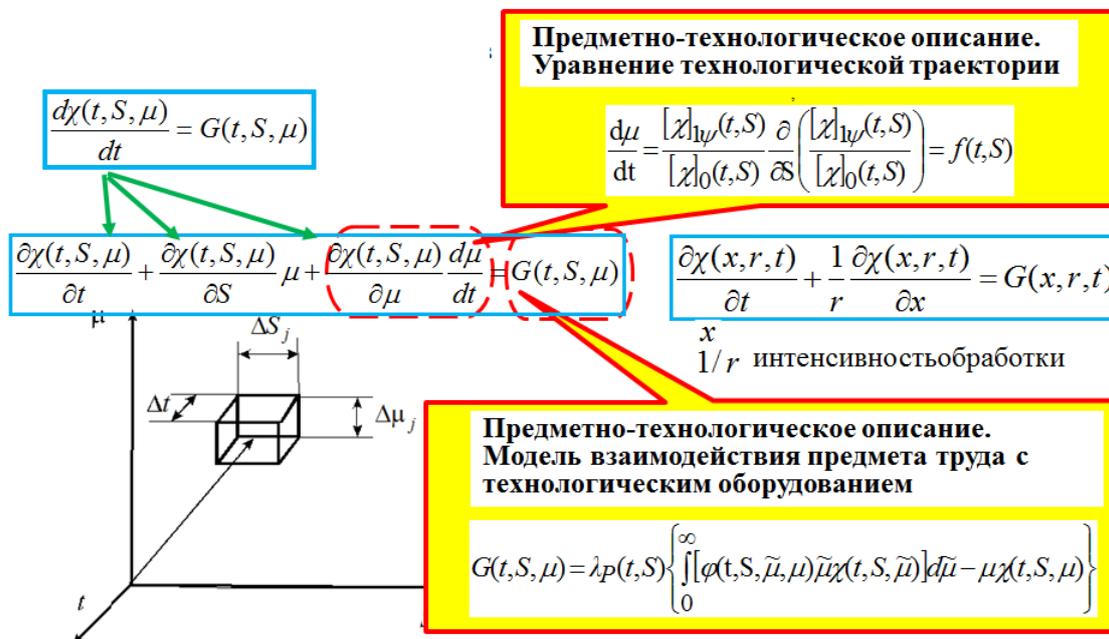


Рис. 17. Кинетическая модель производственной системы

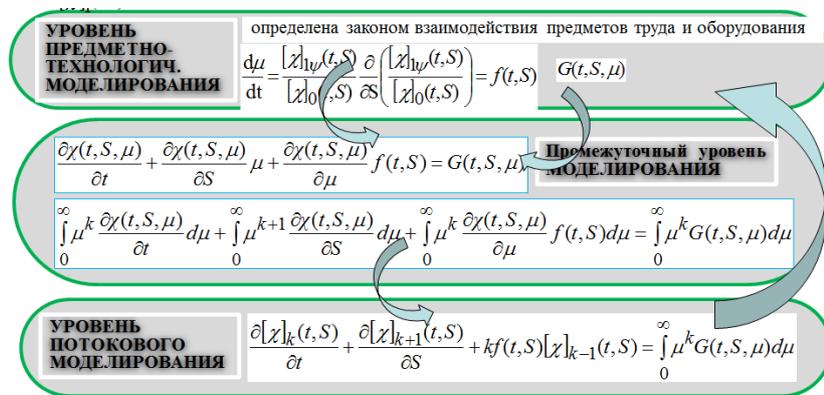


Рис. 18. Метод двухуровневого моделирования производственной линии

Анализ кинетического уравнения позволил сформулировать критерии подобия производственных линий, использование которых определило общие закономерности поведения потоковых параметров разных, но качественно похожих производственных линий, что дало обширную возможность для их предварительного качественного и количественного анализа.

6. Выводы

В статье дано обоснование концептуальных положений и теоретических основ статистической теории построения PDE-моделей производственных линий, используемой для проектирования высокоэффективных систем управления производством с поточным выпуском продукции для переходных и установившихся режимов и разработанные на их фундаменте методы и модели:

а) предметно-технологического проектирования производственной линии (рис. 7), основанные на модельном представлении механизма взаимодействия

предметов труда с технологическим оборудованием и между собой в результате технологической обработки вдоль технологического маршрута;

б) потокового, основанного на кинетическом представлении, многомоментного двухуровневого описания производственной линии, взаимосвязанного с предметно-технологическим описанием посредством агрегирования состояний предметов труда.

Для обеспечения взаимосвязи между моделями предметно-технологического и потокового уровня описания введено кинетическое уравнение производственной системы, использующее в отличие от моде-

лей [2–4] не квазистатическое уравнение состояния, а уравнение движение предмета труда вдоль технологического маршрута.

Для построения уравнения движения впервые записаны законы сохранения, возникающие при переносе технологических ресурсов на предмет труда. Данный подход предоставил возможность не только замкнуть балансовые уравнения для потоковых параметров, учитывая закономерности поведения предметов труда в результате их технологической обработки при переходных режимах функционирования линии, но и связать закономерности изменения потоковых параметров линии с закономерностями технологического процесса обработки предметов труда.

Взаимосвязанные с предметно-технологическим уровнем описания потоковые модели производственных линий получили возможность учитывать технологию производства изделия, расстановку технологического оборудования, структуру технологических ресурсов и эффективного времени обработки предмета труда.

Литература

1. Демущий, В. П. Теория предприятия: Устойчивость функционирования массового производства и продвижения продукции на рынок [Текст] / В. П. Демущий, В. С. Пигнастая, О. М. Пигнастый. – 2003. – 272 с. – Режим доступа: <http://goo.gl/NAe5Du>
2. He, F. L. Modeling and analysis of material flows in re-entrant Supply Chain Networks Using modified partial differential equations [Text] / F. L. He, M. Dong, X. F. Shao // Journal of Applied Mathematics, 2011. – 14 p. – Available at: <http://www.emis.de/journals/HOA/JAM/Volume2011/325690.pdf>
3. Berg, R. Modelling and Control of a Manufacturing Flow Line using Partial Differential Equations [Text] / R. Berg, E. Lefeber, J. Rooda // IEEE Transaction on Control Systems Technology. – Boston, 2008. – P. 130–136. Available at: <http://www.deepdyve.com/lp/institute-of-electrical-and-electronics-engineers/modeling-and-control-of-a-manufacturing-flow-line-using-partial-UkKv88KjRR>
4. Lefeber, E. Modeling, Validation and Control of Manufacturing Systems [Text] / E. Lefeber, R. A. Berg, J. E. Rooda // Proceeding of the 2004 American Control Conference. – Massachusetts, 2004. – P. 4583–4588. Available at: <http://se.wtb.tue.nl/~lefeber/pub/pdffiles/LBR04.pdf>
5. Armbruster, D. Continuous models for production flows [Text] / D. Armbruster, C. Ringhofer, T.-J. Jo // Proceeding of the 2004 American Control Conference. – Boston, 2004. – P. 4589–4594.
6. Bramson, M. Stability of queueing networks, lecture notes in mathematics [Text] / M. Bramson // Journal of Probability Surveys. – 2008. – Vol. 5. – P. 169–345.
7. Schmitz, J. P. Chaos in Discrete Production Systems [Text] / J. P. Schmitz, D. A. Beek, J. E. Rooda // Journal of Manufacturing Systems, 2002. – Vol. 21, Issue 3. – P. 236–246. – Available at: <http://mate.tue.nl/mate/pdfs/2707.pdf>. doi:10.1016/s0278-6125(02)80164-9

8. Kempf, K. Continuum Model for a Re-entrant Factory [Text] / K. Kempf, D. Marthaler, C. Ringhofer, D. Armbruster, J. Tae-Chang // *Operations research*. – 2006. – Vol 54, Issue 5. – P. 933–950.
9. Vollmann, T. E. Manufacturing Planning and Control for Supply Chain Management [Text] / T. E. Vollmann, L. Berry, D. C. Whybark, F. R. Jacobs. – New York: McGraw-Hill, 2005. – 520 p.
10. Tian, F. An iterative approach to item-level tactical production and inventory planning [Text] / F. Tian, S. Willems, K. Kempf // *International Journal of Production Economics*. – 2011. – Vol. 133, Issue 1. – P. 439–450. doi:10.1016/j.ijpe.2010.07.011
11. Красовский, А. А. Фазовое пространство и статистическая теория динамических систем [Текст] / А. А. Красовский. – М.: Наука, 1974. – 232 с.
12. Больцман, Л. Лекции по теории газов [Текст] / Л. Больцман. – М.: ГИТТЛ, 1953. – 552 с.
13. Гиббс, Д. В. Основные принципы статистической механики [Текст] / Д. В. Гиббс. – М.: Регулярная и хаотическая динамика, 2002. – 204 с.
14. Лысенко, Ю. Г. Моделирование технологической гибкости производственно-экономических систем [Текст] / Ю. Г. Лысенко, Н. В. Руменцев. – Донецк: ДонДУ, 2007. – 238 с.
15. Gross, D. Fundamentals of Queueing Theory [Text] / D. Gross, C. Harris. – New York: Wiley, 1974. – 490 p.
16. Коробецкий, Ю. П. Имитационные модели в гибких системах [Текст] / Ю. П. Коробецкий, С. К. Рамазанов. – Луганск: Изд. ВНУ, 2003. – 280 с.
17. Ramadge, P. J. The control of discrete event systems [Text] / P. J. Ramadge, W. M. Wonham // *Proceedings of the IEEE*. – 1989. – Vol. 77, Issue 1. – P. 81–98.
18. Berg, R. Partial differential equations in modelling and control of manufacturing systems [Text] / R. Berg. – Eindhoven: Eindhoven Univ. Technol., 2004. – 157 p.
19. Lefebvre, E. Modeling and Control of Manufacturing Systems [Text] / E. Lefebvre. – *Decision Policies for Production Networks*. Springer London, 2012. – P. 9–30. – Available at: <http://www.mate.tue.nl/mate/pdfs/4779.pdf>. doi:10.1007/978-0-85729-644-3_
20. Mehdi, J. Stochastic Models in Queuing Theory [Text] / J. Mehdi. – New York, 1991. – 482 p.
21. Форрестер, Дж. Основы кибернетики предприятия [Текст] / Дж. Форрестер. – М.: Прогресс, 1961. – 34 с.
22. Asmundsson, J. M. Production planning models with resources subject to congestion [Text] / J. M. Asmundsson, R. L. Rardin // *Naval Res Logist.* – 2009. – Vol. 56, Issue 2. – P. 142–157. doi:10.1002/nav.20335
23. Graves, S. C. A tactical planning model for a job shop [Text] / S. C. Graves // *Operations Research*. – 1986. – Vol 34, Issue 4. – P. 522–533. doi:10.1287/opre.34.4.522
24. Karmarkar, U. S. Capacity Loading and Release Planning with Work-in-Progress (WIP) and Leadtimes [Text] / U. S. Karmarkar // *Journal of Manufacturing and Operations Management*. – 1989. – Vol. 2. – P. 105–123.
25. Zhang, Liang System-theoretic properties of Production Lines. A dissertation submitted the degree of Doctor of Philosophy (Electrical Engineering Systems) [Text] / Zhang Liang. – Michigan, 2009. – 289 p. – Available at: http://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/handle/2027.42/63812/liangzh_1.pdf?sequence=1
26. Дабагян, А. В. Проектирование технических систем [Текст] / А. В. Дабагян. – Харьков: ТД «Золотая миля», 2008. – 280 с.
27. Eekelen, J. Coupling event domain and time domain models of manufacturing systems [Text] / J. Eekelen, E. Lefebvre, J. Rooda // *45th IEEE Conference on Decision and Control*. – New York, 2006. – P. 436–441. – Available at: http://www.google.com.ua/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0CCwQFjAA&url=http://mn.wtb.tue.nl/~lefeber/do_download_pdf.php?id=14&ei=SHN1UuTcOISK4AS5oICwBQ&usq=AFQjCNEeN5G2eu5WqV4336nWp0ZtditfzA&sig2=tC4PTJcFQ6n4YxaGptrGrQ. doi:10.1109/cdc.2006.377701
28. Федюкин, В. К. Управление качеством процессов [Текст] / В. К. Федюкин. – СПб: Питер, 2004. – 204 с.