УДК 658.51.012

О. М. Пигнастый

О построении целевой функции производственной системы

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Н. А. Азаренковым)

The goal function of a manufacturing system with mass production output is constructed with the use of the variational principle. The equations for the central manufacturing trajectory are defined. Euler's equations for the central base product of the manufacturing system are given.

Хорошо известно, что основные уравнения теории относительности [1], электродинамики, аналитической механики [2], теории упругости, механики сплошной среды [3] получены при помощи вариационного подхода. В современных физических теориях вариационный принцип представляет собой рабочий и, по существу, единственный рациональный аппарат исследования систем, позволяет объединить и синтезировать различные феноменологические и статистические методы. Анализ публикаций показывает, что вариационный принцип должен быть положен в основу построения не только физических [1–3], но и биологических, социологических, экономических теорий [4, 5].

Функционирование современного производства может быть представлено в виде стохастического процесса, в ходе которого производственная система переходит из одного состояния в другое. Состояние производственной системы определяется как состояние общего числа базовых продуктов [6]. Под базовым продуктом [7] понимается элемент производственной системы, на который при движении по операционной цепочке технологических карт происходит перенос стоимости живого труда, сырья, материалов и орудий труда. Состояние базового продукта в момент времени t может быть описано микроскопическими величинами в технологическом пространстве (S, μ) [8], где S_j (грн) и $\mu_j = \lim\limits_{\Delta t \to 0}(\Delta S_j/\Delta t)$ (грн/ч) — соответственно сумма общих затрат и затрат в единицу времени, перенесенные производственной системой на j-й базовый продукт, $0 < j \leqslant N$. Микроскопические величины S_j и μ_j определяют технологические траектории базовых продуктов $S_j = S_j(t)$. В ходе производственного процесса базовый продукт должен изготавливаться строго в соответствии с технологией производства, определяющей последовательность использования производственных ресурсов при переходе от одной технологической операции к другой. Отклонение от технологии производственного процесса недопустимо. Каждая m-я технологическая операция $(m = \overline{1, N_m})$ с межоперационным заделом $N_{\psi m} \gg 1$ в соответствии с технологическим процессом характеризуется средним использованием производственных ресурсов $\Delta S_{\psi m}$ (грн), передаваемых от оборудования к базовому продукту со средней интенсивностью $k_{\psi m}$ (грн/ч). Перенесенные в ходе технологической операции на базовый продукт затраты $\Delta S_{\psi m}$ могут быть представлены в виде условно-переменных $\Delta S_{\psi V m}$ (усредненных на единицу продукции затрат прямой заработной платы, расхода сырья, топлива, электроэнергии) и условно-постоянных $\Delta S_{\psi C m}$ (усредненных на единицу времени затрат амортизации оборудования, арендной платы, заработанной платы обслуживающего персонала, расходов, связанных с управлением и организацией производства) затрат [11]:

$$\Delta S_{\psi m} = \Delta S_{\psi V m} + \Delta S_{\psi C m}. \tag{1}$$

Деление затрат является условным и определяется особенностями технологии производства. Средняя интенсивность переноса условно-переменных затрат $k_{\psi Vm}$ (грн/ч) и среднее операционное время $\tau_{\psi Om}$ для m-й технологической операции задаются характеристиками оборудования, а средняя интенсивность переноса условно-постоянных затрат $k_{\psi Cm}$ (грн/ч) и среднее межоперационное время $\tau_{\psi Cm}$ — утвержденным на предприятии порядком разнесения затрат. Определение межоперационного времени $\tau_{\psi Cm}$ является наиболее сложным элементом в расчете длительности производственного цикла T_d, часто устанавливается без должного обоснования [7]. Технологию производства можно представить в виде центральной технологической траектории базового продукта $S_\psi = S_\psi(t)$ в технологическом пространстве (S, μ):

$$S_{\psi m} = \sum_{k=1}^{m} \Delta S_{\psi k} = \sum_{k=1}^{m} (\alpha_{\psi Vm} k_{\psi Vm} \tau_{\psi Om} + \alpha_{\psi Cm} k_{\psi Cm} \tau_{\psi Cm}), \tag{2}$$

где $\alpha_{\psi Vm}$, $\alpha_{\psi Cm}$ — коэффициенты пропорциональности между интенсивностью переноса затрат производственным оборудованием на элемент производственной системы и интенсивностью потребления затрат базовым продуктом при технологической обработке на m-й операции. Для центральной технологической траектории справедливо соотношение

$$\tau_{\psi Om} + \tau_{\psi Cm} = N_\psi \tau_{\psi Om}. \tag{3}$$

Тот факт, что m-я технологическая операция производственного процесса характеризуется только величинами $\Delta S_{\psi m}$ (грн) и $k_{\psi m}$ (грн/ч), является утверждением того, что состояние производственной системы предприятия полностью определяется знанием координат $S_j(t)$ и их скоростей изменения во времени $\mu_j(t)$ [8–11]. Полагаем, что для производственной системы существует задаваемый технологическим процессом целевой функционал, который при движении базовых продуктов вдоль технологических траекторий имеет минимум

$$I = \int_0^{T_d} J(t, S_j(t), \mu_j(t))\, dt. \tag{4}$$

Из равенства нулю вариации δI следуют уравнения Эйлера, описывающие поведение j-го базового продукта в ходе процесса технологической обработки

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial J}{\partial \mu_j} - \frac{\partial J}{\partial S_j} = 0. \tag{5}$$

Пусть в момент времени t_1 на промежутке $\Delta S_{\psi m}$ между двумя технологическими операциями находится межоперационный задел базовых продуктов $N_{\psi m}$, движущихся по технологическим траекториям $S_1(t), S_2(t), \ldots, S_j(t), \ldots, S_{N_\psi}(t)$. На j-й базовый продукт воздействует оборудование с мгновенной интенсивностью передачи условно-переменных k_{jVm} и условно-постоянных k_{jCm} производственных ресурсов. Интенсивность передачи условно-переменных производственных ресурсов k_{jVm} и время воздействия оборудования τ_{jOm} на базовый продукт являются случайными величинами. Вид плотности распределения этих случайных величин $\psi_k(k, S_{\psi V})$ и $\psi_\tau(\tau_O, S_{\psi V})$ с математическими ожиданиями $k_{\psi V}(S_{\psi V})$,

$\tau_{\psi Om}(S_{\psi V})$ и дисперсиями $(\eta_{\psi V}(S_{\psi V}))^2$, $(\gamma_{\psi V}(S_{\psi V}))^2$ задаются паспортными параметрами технологического процесса [8]:

$$\int_0^\infty \psi_k(k, S_{\psi V})dk = 1, \qquad \int_0^\infty \psi_\tau(\tau_O, S_{\psi V})d(\tau_O) = 1. \tag{6}$$

Для серийного и массового производства отклонения от норматива составляют 10–20%, что определяется в основном техническими условиями на поставляемое сырье и фондом заработной платы

$$\left(\frac{\eta_{\psi V}(S_{\psi V})}{k_{\psi V}(S_{\psi V})}\right)^2 \approx 0{,}01 \ll 1, \qquad \left(\frac{\gamma_{\psi V}(S_{\psi V})}{\tau_{\psi Om}(S_{\psi V})}\right)^2 \approx 0{,}04 \ll 1. \tag{7}$$

Временную ось разобьем на промежутки времени dt таким образом, чтобы они, с одной стороны были много меньше времени производственного цикла T_d, с другой стороны, за это время можно было осуществить большое количество технологических операций

$$T_d \approx \sum_{m=1}^{N_m} (\tau_{\psi Om} + \tau_{\psi Cm}) \gg (\tau_{\psi Om} + \tau_{\psi Cm}) \geqslant dt \gg \tau_{\psi Om}. \tag{8}$$

Приращение стоимости dS_j j-го базового продукта за время dt может быть выражено через мгновенную интенсивность передачи технологическим оборудованием производственных ресурсов:

$$dS_j \approx \alpha_{jV}(S_{\psi V})k_{jV}(S_{\psi V})\tau_{jO}(S_{\psi V})\varpi_j(S_{\psi V}) + \alpha_{jC}(S_{\psi V})k_{jC}(S_{\psi V})dt. \tag{9}$$

Вероятность того, что j-й базовый продукт за время dt прошел технологическую обработку на m-й технологической операции, не зависит от номера базового продукта:

$$\varpi_j(S_{\psi V}) = \frac{dt}{(\tau_{\psi Om} + \tau_{\psi Cm})} = \frac{dt}{N_\psi \tau_{\psi Om}}. \tag{10}$$

Как правило, закон изменения интенсивности передачи технологическим оборудованием производственных ресурсов $k_{\psi m}$ при коэффициенте использования оборудования α_m задается на период, много больше характерного времени производственного цикла T_d, что позволяет считать $k_{\psi m}$ и α_m не зависимыми от времени

$$\frac{k_{\psi m}}{T_d} \gg \frac{dk_{\psi m}}{dt}, \qquad \frac{\alpha_m}{T_d} \gg \frac{d\alpha_m}{dt}. \tag{11}$$

Целевую функцию производственной системы будем строить из требования того, чтобы передаваемые технологическим оборудованием производственные ресурсы полностью переносились на j-й базовый продукт в соответствии с заданным технологическим процессом:

$$d\Omega_j = dS_j - \alpha_{jV}(S_{\psi V})k_{jV}(S_{\psi V})\tau_{jO}(S_{\psi V})\varpi_j(S_{\psi V}) - \alpha_{jC}(S_{\psi V})k_{jC}(S_{\psi V})dt. \tag{12}$$

Производственный процесс должен быть поставлен так, чтобы фактические значения скорости изменения затрат $\dot{S}_j$ для j-го базового продукта были близки к заданным значениям передачи производственных ресурсов от технологического оборудования, т. е. $\dot{\Omega}_j \to 0$.

При отклонениях $\dot{\Omega}_j$ от нуля производственный процесс осуществляется с отклонением от технологии, что приводит к нежелательным результатам. В связи с этим будем требовать для производственной системы за период обработки базового продукта минимум отклонений $\dot{\Omega}_j$ от нулевого значения. На практике это обеспечивается взаимодействием службы главного технолога и службы контроля качества. Так как работа технологического оборудования определяется тремя первыми моментами функций технологического процесса $\psi_k(k, S_{\psi V})$ и $\psi_\tau(\tau_O, S_{\psi V})$ [7, 8], то целесообразно функционал производственной системы представить в виде

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{T_d}\sum_{j=1}^{N_p}\left(\mu_j - \alpha_{jV}(S_{\psi V})k_{jV}(S_{\psi V})\tau_{jO}(S_{\psi V})\frac{1}{N_\psi \tau_{\psi Om}} - \alpha_{\psi C}(S_{\psi V})k_{\psi C}(S_{\psi V})\right)^2 dt, \qquad (13)$$

где целевая функция партии $N_p \gg 1$ базовых продуктов с некоррелированными между собою случайными величинами k_{jVm}, $\tau_{jO}(S_{\psi V})$ есть квадратичная форма

$$J(t, S_j, \mu_j) = \sum_{j=1}^{N_p}\frac{\mu_j^2}{2} + F_{1\psi}(S_{\psi V})\sum_{j=1}^{N_p}\mu_j - W_{0\psi}(S_{\psi V}), \qquad (14)$$

$$F_{1\psi}(S_{\psi V}) = -\frac{1}{N_\psi}\alpha_{\psi V}(S_{\psi V})k_{\psi V}(S_{\psi V}) - \alpha_{\psi C}(S_{\psi V})k_{\psi C}(S_{\psi V}),$$
$$W_{0\psi}(S_{\psi V}) = -(F_{1\psi})^2 - \frac{(\gamma_\psi)^2}{2N_p}\left(\frac{\alpha_{\psi V}k_{\psi V}}{\tau_{\psi Om}}\frac{N_p}{N_\psi}\right)^2 - \frac{(\eta_{\psi V})^2}{2N_p}\left(\alpha_{\psi V}\frac{N_p}{N_\psi}\right)^2. \qquad (15)$$

Коэффициент передачи оборудованием условно-переменных производственных ресурсов взят детерминированным $\alpha_{jV}(S_{\psi V}) = \alpha_{\psi V}(S_{\psi V})$. Функция $W_{0\psi}(S_{\psi V})$ представляет собой производственный потенциал технологического поля предприятия. Поле задается условно-переменными и условно-постоянными затратами предприятия.

Вариация функционала (13) дает уравнения Эйлера (5) для движения базового продукта вдоль технологической траектории. Целевая функция производственной системы (14) по своему виду напоминает функцию Лагранжа ансамбля заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле [1]. Так как воздействие производственного поля (работа оборудования, обслуживающего персонала и т. д.) не зависит от состояния конкретного базового продукта $(\partial J(t, S_j, \mu_j)/\partial S_j = 0)$, то производственная система с целевой функцией (14) допускает N_p интегралов движения

$$\frac{\partial J(t, S_j, \mu_j)}{\partial \mu_j} = \mu_j + F_{1\psi}(S_{\psi V}) = P_j. \qquad (16)$$

Из идентичности базовых продуктов следует $P_j = P$. Целевая функция (14), не зависящая явно от времени, допускает интеграл движения

$$H = \sum_1^{N_p}\mu_j\frac{\partial J(, S_j, \mu_j)}{\partial \mu_j} - J(, S_j, \mu_j) = \sum_{j=1}^{N_p}\frac{\mu_j^2}{2} + W_{0\psi}(S_{\psi V}) = \mathrm{const}. \qquad (17)$$

Для описания поведения партии базовых продуктов введем среднюю скорость изменения затрат μ_ψ центрального базового продукта. Скорость изменения затрат для j-го базового продукта может быть записана через скорость изменения затрат центрального базового продукта μ_ψ и разность $\Delta\mu_j$:

$$\mu_\psi = \frac{dS_\psi}{dt} = \frac{1}{N_p}\sum_{j=1}^{N_p}\frac{dS_j}{dt} = \frac{1}{N_p}\sum_{j=1}^{N_p}\mu_j, \qquad \mu_j = \mu_\psi + \Delta\mu_j, \tag{18}$$

$$\sigma_\psi^2 = \frac{1}{N_p}\sum_{j=1}^{N_p}(\Delta\mu_j)^2, \qquad \frac{\sigma_\psi^2}{\mu_\psi^2} \ll 1. \tag{19}$$

Интенсивность передачи условно-переменных затрат $k_{\psi Vm}$ (грн/ч) выражается через производительность работы технологического оборудования $[\chi]_{1\psi}$ и межоперационные заделы $[\chi]_0$ [12]:

$$k_{\psi V}(S_{\psi V}) = [\chi]_{1\psi}\Delta S_\psi(S_{\psi V}) = \frac{[\chi]_{1\psi}}{[\chi]_0}N_\psi. \tag{20}$$

Целевая функция производственной системы (14) может быть представлена в виде слагаемых нулевого и второго порядков малости

$$J(S_j,\mu_j) = N_p(J_{\psi 0}(S_\psi,\mu_\psi) + J_{\psi 2}(\Delta S_\psi,\sigma_\psi)),$$

$$J_{\psi 0}(S_\psi,\mu_\psi) = \frac{1}{2}\left(\mu_\psi - \alpha_{\psi V}(S_{\psi V})\frac{[\chi]_{1\psi}}{[\chi]_0} - \alpha_{\psi C}(S_{\psi V})k_{\psi C}(S_{\psi V})\right)^2, \tag{21}$$

$$J_{\psi 2}(\Delta S_\psi,\sigma_\psi) = \frac{\sigma_\psi^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\alpha_{\psi V}(S_{\psi V})\frac{[\chi]_{1\psi}}{[\chi]_0}\right)^2\left(\left(\frac{\gamma_\psi(S_{\psi V})}{\tau_{\psi Om}}\right)^2 + \left(\frac{\eta_{\psi V}(S_{\psi V})}{k_{\psi V}(S_{\psi V})}\right)^2\right). \tag{22}$$

Первое слагаемое $J_{\psi 0}(S_\psi,\mu_\psi)$ описывает движение центрального базового продукта партии вдоль центральной технологической траектории, второе слагаемое $J_{\psi 2}(\Delta S_\psi,\sigma_\psi)$ — отклонение "условной границы" партии от положения центрального базового продукта. Будем полагать, что число базовых продуктов в партии есть величина постоянная $N_p = \mathrm{const}$. Как известно [1], умножение целевой функции на постоянную величину не отражается на уравнениях движения системы.

Целевой функции (21) соответствует уравнение Эйлера

$$\frac{d\mu_\psi}{dt} = \left(\alpha_{\psi V}\frac{[\chi]_{1\psi}}{[\chi]_0} + \alpha_{\psi C}k_{\psi C}(S_{\psi V})\right)\frac{\partial}{\partial S_{\psi V}}\left(\alpha_{\psi V}\frac{[\chi]_{1\psi}}{[\chi]_0} + \alpha_{\psi C}k_{\psi C}\right). \tag{23}$$

В теоретической механике целевую функцию, обеспечивающую равенство нулю вариации целевого функционала, называют функцией Лагранжа.

Таким образом, с использованием вариационного принципа записана целевая функция для партии базовых продуктов производственной системы. Определены слагаемые целевой функции, характеризующие технологическое поле оборудования и собственные свойства базового продукта. Записаны первые интегралы движения базового продукта вдоль технологической цепочки. Представлено уравнение Эйлера для поведения центрального базового продукта.

Материалы работы подготовлены в рамках совместных семинаров кафедр "Экономической кибернетики и прикладной экономики", "Теоретической ядерной физики" ХНУ им. В. Н. Каразина и ПО НПФ Технология, г. Харьков.

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. – Москва: Наука, 1988. – 512 с.
2. *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. – Москва: Наука, 1966. – 300 с.
3. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1. – Москва: Наука, 1973. – 536 с.
4. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. – Москва: Прогресс, 1975. – 605 с.
5. *Занг З. В.-Б.* Синергетическая экономика. – Москва: Мир, 1999. – 335 с.
6. *Прыткин Б. В.* Технико-экономический анализ производства. – Москва: ЮНИТИ-ДАНА, 2000. – 399 с.
7. *Летенко В. А., Родионов Б. Н.* Организация, планирование и управление машиностроительным предприятием. Ч. 2. Внутризаводское планирование. – Москва: Высш. шк., 1979. – 232 с.
8. *Демуцкий В. П., Пигнастая В. С., Пигнастый О. М.* Стохастическое описание экономико-производственных систем с массовым выпуском продукции // Доп. НАН України. – 2005. – № 7. – С. 66–71.
9. *Шананин А. А.* Обобщенная модель чистой отрасли производства // Мат. моделирование. – 1997. – **9**, № 9. – С. 117–127.
10. *Бессонов В. А., Иванилов И. П.* Темповые производственные зависимости с ограниченным эффективным множеством // Докл. АН СССР. – 1989. – **309**, № 5. – С. 1033–1036.
11. *Савицкая Г. В.* Анализ хозяйственной деятельности предприятия. – Минск: Новое знание, 2002. – 704 с.
12. *Демуцкий В. П., Пигнастый О. М.* Вопросы устойчивости макроскопических параметров технологических процессов массового производства // Доп. НАН України. – 2006. – № 3. – С. 63–67.

Харьковский национальный университет
им. В. Н. Каразина

Поступило в редакцию 25.09.2006