

9. И. А. Викторов. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. / И. А. Викторов.- Москва: Наука.- 1966.- 168 с.
10. Ch Zhang. On Wave Propagation in Elastic Solids with Cracks (Advances in Fracture Mechanics) / Ch. Zhang, D. Gross.- Southampton: Computational Mechanics, 1997.- 272 p. - ISBN: 978-1853125355.

*В роботі дістала подальшого розвитку модель задачі оптимізації змісту проекту за строками і вартістю його виконання при наявності обмежень на якість продукту після виконання певних етапів проекту, також створено метод розв'язання цієї задачі з використанням узагальненого алгоритмічного критерію*

*Ключові слова: проект, утримання, двохкритеріальна оптимізація, час, вартість, якість*

*В работе получила дальнейшее развитие модель задачи оптимизации содержания проекта по срокам и стоимости его выполнения при наличии ограничений на качество продукта после выполнения определенных этапов проекта, а также создан метод решения этой задачи с использованием обобщенного алгоритмического критерия*

*Ключевые слова: проект, содержание, двухкритериальная оптимизация, время, стоимость, качество*

*The paper describes further development of the model of a project content optimization problem where fulfillment of project deadline and costs of its implementation is required. The model includes constraints on quality of a product after completion of certain stages of the project. The paper also describes the method that was created to solve this problem using a generalized algorithmic criterion*

*Key words: project, content, two-criterion optimization, time, cost, quality*

Традиционно формирование содержания проекта осуществляется на эвристическом уровне. Часто работы или комплексы работ включаются в состав проекта без глубокого анализа их влияния на другие работы. Количество рассматриваемых альтернатив при этом, как правило, невелико. Данная ситуация объясняется большой трудоемкостью анализа альтернативных вариантов работ или их комплексов в многоэтапных проектах. В работе [1] предложены модель и метод оптимизации содержания проекта с точки зрения времени его выполнения. В работе [2] рассматриваются модель и метод оптимизации содержания проекта по критерию затраты на его осуществление при наличии

ограничений на сроки. В работе [3] впервые предложена многокритериальная модель задачи оптимизации содержания проекта по критериям время и стоимость при наличии альтернативных вариантов выполнения работ или их комплексов, заданных в виде сетевых моделей. Для решения многокритериальной задачи предложено использовать минимаксный подход. Однако, часто лица, принимающие решения, предпочитают формировать содержание проекта, задавая веса целевым функциям. При этом в качестве ограничитель необходимо учитывать требования к показателям качества продукта после выполнения определенных этапов проекта.

УДК 658.012.23

## ДВУХКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ СОДЕРЖАНИЯ ПРОЕКТА ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА КАЧЕСТВО ПРОДУКТА

**И. В. Кононенко**

Доктор технических наук, профессор, заведующий  
кафедрой  
Контактный тел.: 707-67-35

**И. В. Протасов\***

\*Кафедра стратегического управления  
Национальный технический университет «Харьковский  
политехнический институт»  
ул. Фрунзе, 21, г. Харьков, Украина, 61002

В результате возникает задача оптимизации с обобщенным алгоритмическим критерием и с ограничениями.

Целью работы является дальнейшее развитие модели задачи оптимизации содержания проекта по срокам и стоимости его выполнения при наличии ограничений на качество продукта после выполнения определенных этапов проекта, а также создание метода решения этой задачи с использованием обобщенного критерия.

Предложена математическая модель задачи, которая содержит две подлежащие минимизации целевые функции, одна из которых представляет собой длительность критического пути в сетевой модели, описывающей проект, а другая – стоимость выполнения проекта.

В модели предполагается, что после завершения отдельных этапов выполнения проекта не должно быть финансовых задолженностей. Также ограничениями модели являются максимальное время выполнения проекта и качество продуктов на отдельных этапах проекта. При этом предполагается, что на каждом этапе проекта может осуществляться не более одного из альтернативных вариантов выполнения работ. Модель является дальнейшим развитием модели, предложенной в работе [3], путем учета более общих ограничений на качество продукта в результате выполнения этапов проекта. Модель задачи имеет вид:

$$T_{\text{проекта}} = \varphi(x_{hj}) \rightarrow \min_{x_{hj}}, \quad j = \overline{1, M_h}, \quad h = \overline{1, N}; \quad (1)$$

$$\sum_{h=1}^H \sum_{j=1}^{M_h} w_{hj} x_{hj} = F \rightarrow \min_{x_{hj}}, \quad (2)$$

$$S_h = S_{h-1} + K_h - \sum_{j=1}^{M_h} w_{hj} x_{hj};$$

$$S_h \geq 0, \quad h = \overline{1, N}; \quad (3)$$

$$T_{\text{проекта}} \leq T^{\text{задан}}, \quad T_{\text{проекта}} = \varphi(x_{hj}), \quad j = \overline{1, M_h}, \quad h = \overline{1, N}; \quad (4)$$

$$\Psi_r(x_{hj}) \geq Q_{hr}^{\text{задан}}, \quad j = \overline{1, M_h}, \quad h = \overline{1, N}, \quad r = \overline{1, R_h}; \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^{M_h} x_{hj} = 1, \quad h = \overline{1, N}; \quad (6)$$

$$x_{hj} \in \{0, 1\}, \quad j = \overline{1, M_h}, \quad h = \overline{1, N}; \quad (7)$$

где  $T_{\text{проекта}}$  – длительность выполнения всех операций проекта;

$w_{hj}$  – стоимость выполнения операций  $j$ -го варианта сетевой модели на  $h$ -м этапе (может складываться из стоимостей нескольких операций);

$M_h$  – количество вариантов выполнения операций на этапе  $h$ ,  $h = \overline{1, N}$ ;

$h$  – номер этапа выполнения операций;

$N$  – количество этапов в проекте;

$x_{hj}$  – булева переменная, равная единице, если осуществляется  $j$ -й вариант выполнения операций на  $h$ -м этапе, и равная нулю в противном случае;

Значение целевой функции (1)  $T_{\text{проекта}} = \varphi(x_{hj})$  представляет собой время выполнения проекта, которое рассчитывается с помощью метода критического пути или иного метода в сетевой модели  $G = \{A, Z, \tau, W\}$ , где

$G$  – сетевая модель операций проекта;

$A$  – множество узлов сети,

$$A = \{a_{hij}\}, \quad i = \overline{1, n_j}, \quad h = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, M_h},$$

где  $a_{hij}$  –  $i$ -я операция, осуществляемая на  $h$ -м этапе в  $j$ -м варианте (альтернативе) сетевой модели;

$n_j$  – количество операций в  $j$ -м варианте сетевой модели;

$Z$  – множество направленных дуг,

$$Z = \{z_{hi^i, pm^f}\}, \quad i = \overline{1, n_j}, \quad m = \overline{1, n_f}, \quad h, p = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, M_h},$$

$$f = \overline{1, M_p},$$

где  $z_{hi^i, pm^f}$  – дуга, которая выходит из узла  $i$  на этапе  $h$  альтернативного варианта  $j$  и входит в узел  $m$  на этапе  $p$  альтернативного варианта  $f$ ;  $i \neq m$  при  $p = h$ ;  $p \geq h$ ;

$\tau$  – множество сроков выполнения операций в узлах,

$$\tau = \{\tau_{hij}\}, \quad i = \overline{1, n_j}, \quad h = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, M_h};$$

где  $\tau_{hij}$  – срок выполнения  $i$ -й операции на  $h$ -м этапе для  $j$ -го варианта выполнения операций;

$W$  – множество стоимостей выполнения операций сети,

$$W = \{w_{hij}\}, \quad i = \overline{1, n_j}, \quad h = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, M_h},$$

где  $w_{hij}$  – стоимость выполнения  $i$ -й операции на  $h$ -м этапе для  $j$ -го варианта выполнения операций;

Значение целевой функции (2)  $\sum_{h=1}^H \sum_{j=1}^{M_h} w_{hj} x_{hj} = F$  представляет собой затраты на осуществление проекта;

$S_h$  – остаток денежных средств после выполнения работ на  $h$ -м этапе;

$K_h$  – объем денежных средств, выделяемых на  $h$ -м этапе;

$\Psi_r(x_{hj})$  – функция, определяющая значение  $r$ -го показателя качества продукта в результате выполнения  $h$ -го этапа для  $j$ -го варианта выполнения операций;

$Q_{hr}^{\text{задан}}$  – заданное граничное значение  $r$ -го показателя качества продукта в результате выполнения этапа  $h$ ;

$R_h$  – количество показателей качества продукта в результате выполнения этапа  $h$ .

Ограничение (3) предполагает, что при осуществлении проекта не должно быть финансовых задолженностей после завершения каждого этапа.

Ограничение (4) означает, что время выполнения проекта должно быть не больше значения  $T^{\text{задан}}$ , которое заранее указано заказчиком.

Выражение (5) определяет ограничение, согласно которому качество продукта в результате выполнения  $h$ -го этапа должно удовлетворять заданным граничным показателям качества  $Q_{hr}^{\text{задан}}$ .

Для каждого  $h$ -го этапа выполнения работ по проекту или их комплексов,  $h = \overline{1, N}$  задаются требования по значению  $r$ -го показателя качества продукта этапа, где  $r = \overline{1, R_h}$ , продукта проекта. Значение показателя качества  $r$  для  $j$ -го альтернативного варианта выполнения работ по проекту или их комплексов на этапе  $h$  определяется с помощью функции  $\Psi_r(x_{hj})$  или задается в виде элемента матрицы исходных данных.

Выражение (6) характеризует ограничение, согласно которому на каждом этапе  $h$  можно осуществить не более одного варианта выполнения работ.

В модели (1) – (7) могут быть и иные ограничения, например на расходование некоторых ресурсов, в том числе кадров, оборудования, сырья, материалов, комплектующих, на последовательность осуществления вариантов выполнения работ.

Предложенная модель является двухкритериальной, динамической, с булевыми переменными, с алгоритмической и аналитической целевыми функциями, с алгоритмическим и аналитическими ограничениями.

Для решения задачи (1) – (7) предложен метод многокритериальной оптимизации содержания проекта по срокам и стоимости его выполнения при наличии ограничений и заданных альтернативных вариантах выполнения работ или их комплексов, представленных в виде сетевых моделей, основанный на применении обобщенного критерия в сочетании с методом неявного перебора. Метод предназначен для решения задач оптимизации содержания проекта по критериям время и стоимость в условиях, когда любая работа последующего этапа в проекте не может быть начата, пока не будут закончены все работы предыдущего этапа. При этом альтернативные варианты могут относиться как к одному этапу выполнения работ, так и к нескольким этапам.

Опишем в виде последовательных стадий подготовку информации для разработанного метода, которая развивает подготовку информации для методов, описанных в работах [1-3].

1. Представить в виде сетевых моделей альтернативные варианты выполнения работ по проекту, установить их взаимосвязи друг с другом. Определить время и стоимость выполнения работ каждой из альтернатив.

2. Провести анализ, цель которого заключается в выявлении альтернатив, которые охватывают несколько этапов. Если некоторая альтернатива охватывает более одного этапа, то эти этапы объединить в один.

3. Вычислить нижние границы длительности выполнения операций на каждом  $h$ -м этапе,  $h = \overline{1, N}$ .

Вычисление значений нижней границы предполагает выполнение ряда следующих действий:

3.1. Для каждого из этапов  $h = \overline{1, N}$  ввести логические вершины начала  $S(\text{start})$  и окончания  $T(\text{target})$ .

3.2. Для каждого из этапов  $h = \overline{1, N}$  рассчитать по методу критического пути сроки выполнения всех операций каждой из альтернатив  $t_{hj}$ .

3.3. Для каждого из этапов  $h = \overline{1, N}$  рассмотреть времена выполнения работ каждой из альтернатив и выбрать среди них минимальное  $t_{\min_h}$ .

Множество выбранных минимальных сроков будет составлять:  $T_{\min} = \{ t_{\min_h} \}_{h=1}^H$ .

4. Вычислить оптимальное значение длительности выполнения операций  $F_1$  на  $N$  этапах с помощью метода оптимизации сроков проекта, предложенного в работе [1].

5. Вычислить нижние границы стоимости выполнения операций на каждом  $h$ -м этапе,  $h = \overline{1, N}$ .

Вычисление значений нижней границы предполагает выполнение ряда следующих действий:

5.1. Для каждого из этапов  $h = \overline{1, N}$  ввести логические вершины начала  $S(\text{start})$  и окончания  $T(\text{target})$ .

5.2. Для каждого из этапов  $h = \overline{1, N}$  рассчитать стоимости выполнения всех операций каждой из альтернатив  $w_{hj}$ .

5.3. Для каждого из этапов  $h = \overline{1, N}$  рассмотреть стоимости выполнения операций каждой из альтернатив и выбрать среди них минимальную  $w_{\min_h}$ .

Множество выбранных минимальных стоимостей будет составлять:  $W_{\min} = \{ w_{\min_h} \}_{h=1}^H$ .

6. Вычислить оптимальное значение стоимости выполнения операций  $F_2$  на  $N$  этапах с помощью метода оптимизации стоимости проекта, предложенного в работе [2].

Входные данные, необходимые для осуществления метода:

$G$  – сетевая модель проекта;

$N$  – количество этапов;

$\{ K_h \}_{h=1}^H$  – множество объемов денежных средств, выделяемых для выполнения проекта на каждом этапе;

$\{ M_h \}_{h=1}^H$  – множество, элементами которого являются количества возможных альтернативных вариантов на каждом этапе;

$t_{hj}$  – время выполнения операций  $j$ -го варианта сетевой модели на  $h$ -м этапе (рассчитывается предварительно по сетевой модели и представляется в виде элементов таблицы);

$w_{hj}$  – стоимость выполнения операций  $j$ -го варианта сетевой модели на  $h$ -м этапе (рассчитывается предварительно по сетевой модели и представляется в виде элементов таблицы);

$\Psi_r(x_{hj})$  – функция, определяющая значение  $r$ -го показателя качества продукта в результате выполнения этапа  $h$  для  $j$ -го варианта выполнения операций;

$Q_{hr}^{\text{задан}}$  – заданное граничное значение  $r$ -го показателя качества продукта в результате выполнения этапа  $h$ ;

$T_{\min} = \{ t_{\min_h} \}_{h=1}^H$  – множество минимальных сроков выполнения этапов проекта, рассчитанных на стадиях подготовки информации;

$W_{\min} = \{ w_{\min_h} \}_{h=1}^H$  – множество минимальных стоимостей выполнения этапов проекта, рассчитанных на стадиях подготовки информации;

$F_1$  – оптимальное значение срока выполнения проекта;

$F_2$  – оптимальное значение стоимости выполнения проекта;

$\lambda_1, \lambda_2$  – весовые коэффициенты первой и второй целевых функций;  $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ ;  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ .

$T^{\text{задан}}$  – максимально возможное время выполнения проекта. Значение  $T^{\text{задан}}$  задаётся заказчиком перед началом планирования проекта.

Переменные:

$f^*$  – рекордное значение нормированных целевых функций;

$f^t$  – текущее значение целевой функции (1);

$f^w$  – текущее значение целевой функции (2);

$f^1$  – значение нижней границы целевой функции (1);

$f^2$  – значение нижней границы целевой функции (2);

(1);  $f_{норм}^1$  – нормированное значение целевой функции

(2);  $f_{норм}^2$  – нормированное значение целевой функции

$h$  – номер этапа;

$S_h$  – остаток денежных средств после выполнения работ на  $h$ -м этапе;

$j_h$  – номер варианта на этапе  $h$ ;

$t_h$  – время выполнения операций на всех этапах от 1-го до  $h$ -го включительно;

$T'_{np_h}$  – нижняя граница сроков выполнения всех последующих этапов после  $h$ , которая представляет собой сумму вида:

$$T'_{np_h} = t_{min_{h+1}} + \dots + t_{min_H},$$

где времена  $t_{min_{h+1}}, \dots, t_{min_H}$ , являющиеся элементами множества  $T_{min} = \{ t_{min_h} \}_{h=1}^H$ , рассчитываются способом, описанным ранее;

$w'_h$  – стоимость выполнения операций на всех этапах от 1-го до  $h$ -го включительно, которая рассчитывается следующим образом:

$$w'_h = \sum_{k=1}^h \sum_{j=1}^{M_h} w_{kj} x_{kj};$$

$W'_{np_h}$  – нижняя граница стоимости выполнения всех последующих этапов после  $h$ , которая представляет собой сумму вида:

$$W'_{np_h} = w_{min_{h+1}} + \dots + w_{min_H},$$

где стоимости  $w_{min_{h+1}} + \dots + w_{min_H}$ , являющиеся элементами множества  $W_{min} = \{ w_{min_h} \}_{h=1}^H$ , рассчитываются способом, описанным ранее.

Результат решения:

$W_H$  – искомое решение, множество выбранных вариантов  $j$  на всех  $H$  этапах.

Рассмотрим предложенный метод двухкритериальной оптимизации содержания проекта по срокам и стоимости его выполнения при наличии ограничений в виде последовательности шагов:

1. Полагаем

$$W_H := \emptyset; T_{min} = \{ t_{min_h} \}_{h=1}^H; W_{min} = \{ w_{min_h} \}_{h=1}^H;$$

$$F_1 := \sum_{h=1}^H t_{min_h}; F_2 := \sum_{h=1}^H w_{min_h};$$

$h := 1;$

$$f^t := 0; f^w := 0; f^1 := 0; f^2 := 0;$$

$$f_{норм}^1 := 0; f_{норм}^2 := 0; f^s := +\infty.$$

2. Принимаем  $j_h := 1$ .

3. Проверяем выполнение ограничения (3) задачи на этапе  $h$ :

$$S_h = S_{h-1} + K_h - w_{hj},$$

$$S_h \geq 0.$$

Вычисляем  $t_h$  (время выполнения операций на всех этапах от 1-го до  $h$ -го включительно) путём расчё-

та длительности критического пути в сети – СРМ( $h, j$ ) от начала проекта до этапа  $h$  включительно. Для этого вводится фиктивная вершина «финиш», обозначающая окончание всех операций  $h$ -го этапа.

Полагаем  $f^t := t_h$ . Вычисляем  $T'_{np_h} = t_{min_{h+1}} + \dots + t_{min_H}$ .

Обозначим  $T_{проекта} = f^t + T'_{np_h}$  и проверяем выполнение ограничения (4) задачи:

$$T_{проекта} \leq T^{задан}.$$

Проверяем выполнение ограничений (5):

$$\psi_r(x_{ij}) \geq Q_{hr}^{задан}, r = \overline{1, R_h}.$$

Проверяем выполнение иных ограничений, если они имеются. Если хотя бы одно ограничение не выполняется, переходим к шагу 9.

4. Полагаем  $f^1 := T_{проекта}$ . Нормируем  $f^1$  следующим образом:

$$f_{норм}^1 = \frac{f^1 - F_1}{F_1}.$$

5. Рассчитываем значение:  $w'_h$ . Полагаем  $f^w := w'_h$ . Вычисляем:

$$W'_{np_h} = w_{min_{h+1}} + \dots + w_{min_H}.$$

Определим  $f^2 = f^w + W'_{np_h}$ . Нормируем  $f^2$  следующим образом:

$$f_{норм}^2 = \frac{f^2 - F_2}{F_2}.$$

6. Определим  $f = \lambda_1 f_{норм}^1 + \lambda_2 f_{норм}^2$ . Если  $f \geq f^s$ , переходим к шагу 9.

7. При  $h < H$  анализируем следующий этап проекта, т.е.  $h := h + 1$  и возвращаемся к шагу 2.

8. Величине  $f^*$  присваиваем новое значения  $f^* := f$  и фиксируем множество  $W_H := \{ j_h \}_{h=1}^H$ .

9. При  $j_h < M_h$  рассматриваем следующий вариант, т.е.  $j_h := j_h + 1$  и переходим к шагу 3.

10. При  $h > 1$  переходим на предыдущий этап, т.е.  $h := h - 1$ . Извлекаем из памяти  $j_h$ , и переходим к шагу 9. При  $h = 1$  и  $W_H = \{ \emptyset \}$  задача не имеет решения, в противном случае оптимальное решение получено. При этом значения величин  $f^t$  и  $f^w$  для  $W_H$  определяют время выполнения проекта  $T_{проекта}$  и его стоимость  $F$  соответственно.

Таким образом, в работе получила дальнейшее развитие модель задачи оптимизации содержания проекта по срокам и стоимости его выполнения путем учета ограничений на качество продукта метод её решения.

### Литература

1. Кононенко И.В. Математическая модель и метод минимизации сроков выполнения работ по проекту // И. В. Кононенко, Е.В. Емельянова, А.И. Грицай // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – 2007. – №2/6 (26). – С. 35–40.

2. Кононенко И.В. Математическая модель и метод минимизации затрат по проекту при ограничениях на сроки выполнения работ / И.В. Кононенко, Е.В. Емельянова // Вестник Национального технического университета «Харьковский политехнический институт»: сб. науч. тр. Темат. вып. : Системный анализ, управление и информационные технологии. – № 4. – Х., 2009. – С. 46–53.
3. Кононенко И.В., Мироненко В.А. Математическая модель и метод оптимизации содержания проекта с точки зрения времени и стоимости его выполнения. Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 1 / 2 (43) 2010 С. 12-17.

*Пропонується реалізація математичної моделі структури технологічної системи, що є основою комбінаторно - оптимізаційного проектування технологічного процесу. Розглядаються особливості формування інформаційної моделі технологічної системи в термінах мови XML*

*Ключові слова: технологічний процес, технологічна система, частковий порядок, граф, різальний інструмент*

*Предлагается реализация математической модели структуры технологической системы, которая является основой комбинаторно – оптимизационного проектирования технологического процесса. Рассматриваются особенности формирования информационной модели технологической системы в терминах языка XML*

*Ключевые слова: технологический процесс, технологическая система, частичный порядок, граф, режущий инструмент*

*Implementation of mathematical model of technological system structure which is a basis of combinatorial - optimization projection of manufacturing method is offered. Habits of forming of an entity set model of a technological system in terms of language XML are considered*

*Key words: manufacturing method, technological system, the fractional order, the graph, edge tool*

УДК 621.91:658.512+621.91:004.8

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ И ИНФОРМАЦИОННАЯ МОДЕЛИ СТРУКТУРЫ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

**В.В. Фролов**

Кандидат технических наук, доцент

Кафедра «Технология машиностроения и  
металлорежущие станки»

Национальный технический университет «Харьковский  
политехнический институт»

ул. Фрунзе, 21, г. Харьков, Украина, 61002

Контактный тел.: 067-526-06-92

E-mail: vvicfrol@rambler.ru

В работе [1] было предложено рассматривать математическую модель технологического процесса в виде помеченного упорядоченного графа дерева с фиксированной глубиной, которая определяется структурными особенностями технологической системы, что позволило разработать методику классификации технологических структур на основе искусственных нейронных сетей.

Цель данной статьи заключается в разработке информационной модели технологического процесса на основе языка разметки XML и математической постановки задачи проектирования технологического

процесса в терминах бинарных отношений, где исходной является указанная выше модель. Для этого необходимо решить следующие задачи: на основе модели, предложенной в [1], выявить базовые элементы структурной модели технологического процесса; выделить один основной элемент структуры технологического процесса в терминах бинарных отношений; разработать метод представления процесса проектирования технологического процесса в виде структурных формул. Рассмотрим последовательно решение данных задач. Поскольку модель представлена графом деревом, в терминах XML получаем ин-