Запропоновані модель задачі оптимізації параметричного синтезу проекту, що представлена системою нелінійних диференціальних рівнянь, і метод покрокової оптимізації для її розв'язання

Ключові слова: параметричний синтез, метод покрокової оптимізації

Предложены модель задачи оптимизации параметрического синтеза проекта, представленная системой нелинейных дифференциальных уравнений, и метод пошаговой оптимизации для её решения

Ключевые слова: параметрический синтез, метод пошаговой оптимизации

The model of optimization task for parametric synthesis of project, which presented by the system of nonlinear differential equalizations and method of step-by-step optimization, for her decision, are offered

Keywords: parametric synthesis, step-by-step optimization method

УДК 519.6:658.51

МЕТОД ПОШАГОВОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ ЗАДАЧИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СИНТЕЗА ПРОЕКТА

Н.В. Шатохина
Кандидат технических наук, доцент
Кафедра стратегического управления
Национальный технический университет
"Харьковский политехнический институт"
ул. Фрунзе, 21, г. Харьков, Украина, 61002
Контактный тел.: (057) 707-68-24, 066-230-38-67
E-mail: shatosha@mail.ru

1. Введение

С развитием компьютерной техники вопросы разработки оптимизационных методов для сложных нелинейных динамических систем поднимаются достаточно часто. Стремление получить от функционирования системы максимум возможного, оптимально распорядиться имеющимися ресурсами, выбрать параметры системы такими, чтобы та или иная динамическая характеристика было как можно лучше, приводит к постановке задач оптимизации. Однако существующие методы решения таких задач, во-первых, недостаточно совершенны, а во-вторых, не учитывают специфики задач анализа динамики сложных производственно-экономических систем и поэтому требуют усовершенствования. Обычная схема решения задач оптимизации такова: решается задача анализа, определяется динамическая характеристика (эффективность, полезность и т.п.), затем процедура оптимизации делает одну или несколько проб, после чего изменяются соответствующие параметры системы и задача решается снова. И так до тех пор, пока не будет удовлетворен необходимый критерий качества системы. Отсюда видны пути повышения эффективности существующих алгоритмов для моделей задач анализа сложных нелинейных систем. Необходимо применять такие алгоритмы оптимизации, при которых трудоемкая задача анализа динамики системы будет решаться меньшее количество раз.

В данной статье предложена постановка задачи оптимизации процесса развития проекта, где каждая работа представлена в виде динамического звена. Для решения задачи оптимизации, описанной системой нелинейных дифференциальных уравнений, предложено в качестве метода решения использовать пошаговую оптимизацию. Приведены оценки возможного выигрыша от использования метода пошаговой оптимизации по сравнению с традиционными методами нелинейного программирования.

2. Постановка задачи

Факторы, определяющие успех любого производственного проекта, традиционно требуют организации процесса развития проекта – решения задачи максимизации ценности проекта в определенные сроки, в заданных объемах, с учетом имеющихся финансовых ресурсов и удовлетворяя требованиям качества.

Реальный производственный процесс состоит из множества последовательных и параллельных этапов, каждый из которых в свою очередь состоит из набора работ. Каждая работа осуществляется за счет воздействия трудовых ресурсов на используемые материальные ресурсы. Эффективность труда определяется методами и средствами производства. В монографии [1] каждую работу предлагается представить в виде динамического звена, которое имеет несколько входов и выходов.

Мерой успешности – ценностью производственного проекта будем считать качество и количество произведенной продукции. Качество проекта определяется отношением количества ресурсов, обращенных в полезный продукт, обладающий заданными свойствами, к количеству преобразованных ресурсов, включая потери (например, за счет брака). Тогда ценность работы по проекту – количество продукта работы по проекту необходимого качества. Процесс реализации проекта растянут во времени. Запаздывание по работам проекта вызывается инерцией производственного процесса, присущей как оборудованию, задействованному в технологическом процессе, так и людям, выполняющим и организовывающим работы по проекту. Кроме того, процесс превращения ресурсов проекта в продукт проекта сопровождается рассеиванием некоторой части ресурсов, что связано с потерями информации, амортизацией оборудования, плохой работой сотрудников и т.п.

Для приведения разнородных величин к единой шкале измерения при рассмотрении производственно-экономических процессов будем использовать единую экономическую переменную – стоимость.

Согласно [1] под обобщенной силой, действующей на любой вход работы по проекту, будем понимать единую количественную меру, характеризующую свойства процесса преобразования ресурсов. Тогда обобщенные силы работы по проекту будем трактовать как цену суммарного ресурса вводимого в работу и рассчитывать следующим образом:

$$F(t)=\sum_j f_j(t),\ j=\overline{0,m}\ ,$$

где $f_j(t)$ – цена j-го ресурса проекта в момент времени t.

Далее полагаем, что приложенные обобщенные силы должны уравновешиваться реакциями, возникающими в процессе выполнения проекта, тогда

$$m(t)x''+g(t)x'+k(t,x)x=\sum_j f_j(t,x), \tag{1}$$

здесь x – объем произведенного продукта проекта, $m(t)$ – количество используемых ресурсов в производственном процессе; $g(t)$ – изменяющийся во времени коэффициент, стремящийся к пределу, определяемому производственной мощностью; $k(t,x)$ – стабилизационный коэффициент, определяемый успешностью выполнения предшествующих работ и формированием резервов ресурсов.

Полученное уравнение (1) в первом приближении описывает процесс динамики развития проекта. Поскольку проект состоит из набора работ, фактически будем иметь систему нелинейных дифференциальных уравнений, которая будет приведена ниже.

3. Метод пошаговой оптимизации нелинейных систем

В общем виде задача оптимизации процесса развития проекта, описанной системой нелинейных дифференциальных уравнений формулируется следующим образом. Необходимо найти

$$\max_{\mathbf{x}\in X}\Phi(t,\mathbf{x}) \tag{2}$$

при ограничениях по времени, стоимости, объемам работ, которые могут быть представлены как в виде равенств, так и в виде неравенств.

Целевая функция $\Phi(t,\mathbf{x})$ может иметь различный физический смысл. В частности, можно говорить об устойчивости проекта на этапе выполнения некоторой l-й работы, тогда

$$\Phi(t,\mathbf{x})=\max_{l\in L}\varphi_l(t,\mathbf{x}), \tag{3}$$

где $\varphi_l(t,\mathbf{x})$ – функция устойчивости, характеризующая отклонение некоторого параметра проекта от запланированной нормы на этапе выполнения l-й работы; L – множество номеров работ по проекту.

В рассматриваемом случае $\varphi_l(t,\mathbf{x})=k_{уст}\cdot\Delta x_l$, где $k_{уст}$ – коэффициент устойчивости проекта, обусловленный уровнем рисков; Δx_l – отклонение параметра.

Будем полагать, что для формирования оптимизируемой функции $\Phi(t,\mathbf{x})$ используются нелинейные дифференциальные уравнения типа (1).

Запишем систему дифференциальных уравнений для сформулированной выше постановки задачи:

$$\begin{gathered}m_i(t)x_l''+g_i(t)x_l'+k_i(t,\mathbf{x})x_l=\sum_j f_j^i(t,\mathbf{x}),\\ i=\overline{1,n};\ l=\overline{1,L}.\end{gathered} \tag{4}$$

Специфика указанной задачи нелинейного программирования заключается в громоздкости вычисления значения целевой функции. В силу этого непосредственное применение методов нелинейного программирования к решению задачи (2) не всегда является целесообразным. Если решение системы дифференциальных уравнений (4) удается организовать с использованием итерационных алгоритмов [2], то для поиска экстремальных значений варьируемых параметров возможно использование оптимизационной процедуры, основная идея которой состоит в следующем.

Пусть решение задачи синтеза определяется с помощью итерационного процесса, на каждом шаге которого для определения значения целевой функции используется также вложенный итерационный процесс, каждый шаг которого является достаточно трудоемким, тогда с практической точки зрения представляет интерес попытка переставить местами указанные итерационные процессы. Эффективность использования метода пошаговой оптимизации, прежде всего, заключается в замене целевой функции (3) более простой приближенной функцией

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{x})=\max_{l\in L}\varphi_l^{(k)}(t,\mathbf{x}), \tag{5}$$

где k – номер итерации.

Возможность такой замены основана на качественном совпадении поведения точных и приближенных целевых функций для рассматриваемого класса систем.

Многочисленные математические эксперименты показывают, что уже на первой итерации решения задачи анализа при использовании целевой функции (5) оптимизационная процедура, как правило, находит оптимальную точку $\mathbf{x}_{op}$ в пространстве параметров. На последующих итерациях работа оптимизационной процедуры заключается в проверке найденной точки на оптимальность. При этом уточняется значение приближенных целевых функций. В результате последней итерации задачи анализа их значение равно значению точной целевой функции (3) при $\mathbf{x}=\mathbf{x}_{op}$.

Оценим возможный выигрыш от использования метода пошаговой оптимизации по сравнению с традиционными методами нелинейного программирования. Пусть при использовании последних для поиска оптимума необходимо N раз вычислять целевую функцию (3) и каждое ее вычисление требует в среднем k итераций, тогда общее число решений задач анализа составит $S_1\approx kN$. В методе пошаговой оптимизации, только на первом шаге необходимо приблизительно N раз вычислить целевую функцию (5). На последних $k-1$ итерациях обычно производится проверка найденного решения на оптимальность, для чего целевые функции вычисляются еще $(k-1)n$ раз (n – размерность вектора варьируемых параметров $\mathbf{x}$). Общее число вычислений целевой функции в этом случае оказывается приблизительно равным $S_2 = N + n(k-1)$. В типичной ситуации, когда, например, $N = 24$, $n = 3$, $k = 5$, имеем $S_1 = 120$, $S_2 = 36$. Практически выигрыш оказывается чаще еще более существенным, причем с увеличением размерности задачи преимущество метода пошаговой оптимизации возрастает.

Очередная итерация производится в соответствии с линеаризованной системой дифференциальных уравнений, построенной на основе системы нелинейных уравнений (4).

Особенность выполнения этой итерации при работе оптимизационной процедуры заключается в том, что $\varphi^{(k)}(t, \mathbf{x})$ определяется не для всех $t \le T$, а лишь для некоторых $0 \le t_{max} - \Delta t \le t \le t_{max} + \Delta t$. Здесь t_{max} – момент времени, соответствующий максимальному значению $\varphi^{(k-1)}(t, \mathbf{x})$. Область изменения значений варьируемых параметров обычно является довольно небольшой, что приводит к незначительному изменению t_{max} в оптимальной точке пространства параметров по сравнению с начальной. Использование этой особенности значительно ускоряет работу оптимизационной процедуры и увеличивает выигрыш от использования метода пошаговой оптимизации, поскольку затраты времени на вычисление $\varphi^{(k)}(t, \mathbf{x})$ во всех точках интервала $[0, T]$ заметно больше затрат на вычисление той же функции в указанных точках интервала.

В качестве оптимизационной процедуры используется метод сопряженных градиентов [3], ориентированный на поиск условного экстремума. Определение положения минимума целевой функции вдоль направления поиска осуществляется методом золотого сечения.

Для найденной таким образом оптимальной точки $\mathbf{x}_{op}$ для $0 \le t \le T$ выполняется k-я итерация и определяется новое значение t_{max}, соответствующее полученной целевой функции $\tilde{\Phi}(\mathbf{x}_{op})$. Работа алгоритма прекращается, если после k-й итерации выполняется условие

$$\max_{l \in L} \sum_i \left[\varphi_l^{(k)}(t_i) - \varphi_l^{(k-1)}(t_i) \right]^2 < \varepsilon ,$$

где ε – заданная точность решения задачи анализа.

Как показывает практика расчетов, близость исходной целевой функции и функции, получаемой с помощью одной итерации решения задачи анализа, характерна не только для гладких целевых функций, что является достаточно очевидным, но также и для негладких. Это в большинстве случаев исключает необходимость оптимизации после первого шага и обеспечивает существенное преимущество описанному методу.

Несмотря на то, что в общем виде не удается доказать сходимость метода пошаговой оптимизации, опыт многочисленных расчетов говорит о его приемлемости для решения задач синтеза.

Сходимость предложенного итерационного процесса всегда имеет место, но скорость ее и качественные особенности существенно зависят от того, как выделена линейная часть в нелинейной модели.

4. Выводы

1. Для решения задачи оптимизации процесса развития проекта разработан эффективный алгоритм, использующий математическую модель в форме дифференциальных уравнений и метод пошаговой оптимизации. 2. Исследованы особенности работы этого алгоритма, приведены рекомендации по его эффективному применению.

Литература

1. Дабагян А.В. Теория и модели экономических и социально-политических волн [Текст] / А.В. Дабагян. – Харьков: Интехпром, 2000. – 597 с.
2. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика [Текст] / Л. Коллатц. – М.: Мир, 1969. – 448 с.
3. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование [Текст] / Д. Химельблау. – М.: Мир, 1975. – 534 с.