УДК 534.1

А. С. Пономарев

Почти периодические автоколебания в двухконтурной демпфированной системе

Исследуем возможность развития незатухающих почти периодических автоколебаний и условия их существования в двухконтурной демпфированной системе регулирования при отсутствии периодических внешних воздействий. Для систем с одной степенью свободы аналогичная задача решена в работе [1]. Практически все реальные системы обладают демпфированием, поэтому предлагаемое исследование полезно и целесообразно и для синтеза колебательных систем и для анализа паразитных автоколебаний в различных системах.

Характеристики обратных связей системы представим в виде полиномов, аргументом которых является сумма управляющего сигнала $v(t)$ неколебательного характера и обобщенных скоростей $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$. Такая система описывается дифференциальными уравнениями

$$\begin{gathered}\ddot{x}_1 + b_{11}\dot{x}_1 + b_{12}\dot{x}_2 + c_{11}x_1 + c_{12}x_2 = \varepsilon g(v + \dot{x}_1 + \dot{x}_2),\\ \ddot{x}_2 + b_{21}\dot{x}_1 + b_{22}\dot{x}_2 + c_{21}x_1 + c_{22}x_2 = \varepsilon f(v + \dot{x}_1 + x_2).\end{gathered} \tag{1}$$

Отметим, что при малом демпфировании порядка малости ε последнее может быть отнесено к функциям $g(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ и $f(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ и проблема сведется, таким образом, к уже решенным задачам. В настоящей работе рассматриваются существенно демпфированные системы.

Предположим, что характеристическое уравнение порождающей системы (при $\varepsilon = 0$)

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + b_{11}\lambda + c_{11} & b_{12}\lambda + c_{12} \\ b_{21}\lambda + c_{21} & \lambda^2 + b_{22}\lambda + c_{22} \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

имеет две пары комплексно сопряженных корней $\lambda_{1,2}^{(1)} = \alpha_1 \pm i\beta_1$ и $\lambda_{1,2}^{(2)} = \alpha_2 \pm i\beta_2$ с отрицательной действительной частью. Впрочем одно из α_j может быть и нулевым.

Приравняв нулю отдельно действительную и мнимую части, перепишем выражение (2) в виде двух уравнений

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 - \beta^2 + b_{11}\alpha + c_{11} & b_{12}\alpha + c_{12} \\ b_{21}\alpha + c_{21} & \alpha^2 - \beta^2 + b_{22}\alpha + c_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2\alpha\beta + b_{11}\beta & b_{12}\beta \\ b_{21}\beta & 2\alpha\beta + b_{22}\beta \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

и

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 - \beta^2 + b_{11}\alpha + c_{11} & b_{12}\beta \\ b_{21}\alpha + c_{21} & 2\alpha\beta + b_{22}\beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2\alpha\beta + b_{11}\beta & b_{12}\alpha + c_{12} \\ b_{21}\beta & \alpha^2 - \beta^2 + b_{22}\alpha + c_{22} \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Решение системы (1) ищем в виде асимптотических рядов

$$x_k = x_{k0} + \varepsilon x_{k1} + \varepsilon^2 x_{k2} + \ldots \quad (k = 1, 2), \tag{5}$$

сходимость которых, как обычно, определяется не количеством взятых членов, а малостью параметра ε. Начальное приближение x_{k0} выберем в форме общего решения порождающей системы.

Запишем начальное решение в виде

$$\begin{gathered} x_{10} = \sum_{j=1,2} e^{\alpha_j t} (a_j \cos\beta_j t + u_j \sin\beta_j t),\\ x_{20} = \sum_{j=1,2} e^{\alpha_j t} (p_j \cos\beta_j t + q_j \sin\beta_j t), \end{gathered} \tag{6}$$

где для краткости введены обозначения

$$p_j = \frac{-1}{(b_{12}\alpha_j + c_{12})^2 + b_{12}^2\beta_j^2}\{a_j[(\alpha_j^2 - \beta_j^2 + b_{11}\alpha_j + c_{11})(b_{12}\alpha_j + c_{12}) + \\ + (2\alpha_j + b_{11}) b_{12}\beta_j^2] + u_j[(2\alpha_j\beta_j + b_{11}\beta_j)(b_{12}\alpha_j + c_{12}) - \\ - (\alpha_j^2 - \beta_j^2 + b_{11}\alpha_j + c_{11}) b_{12}\beta_j]\}, \tag{7}$$

$$q_j = \frac{1}{(b_{12}\alpha_j + c_{12})^2 + b_{12}^2\beta_j^2}\{a_j[(2\alpha_j\beta_j + b_{11}\beta_j)(b_{12}\alpha_j + c_{12}) - (\alpha_j^2 - \beta_j^2 + b_{11}\alpha_j + \\ + c_{11}) b_{12}\beta_j] - u_j[(\alpha_j^2 - \beta_j^2 + b_{11}\alpha_j + c_{11})(b_{12}\alpha_j + c_{12}) + \\ + (2\alpha_j + b_{11}) b_{12}\beta_j^2]\} \quad (j = 1, 2).$$

При этом a_j, u_j — не произвольные постоянные, а медленно меняющиеся функции времени, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям

$$\frac{da_j}{dt} = \varepsilon A_{j1}(a_1, a_2, u_1, u_2) + \varepsilon^2 A_{j2}(a_1, a_2, u_1, u_2) + \ldots,$$
$$\frac{du_j}{dt} = \varepsilon U_{j1}(a_1, a_2, u_1, u_2) + \varepsilon^2 U_{j2}(a_1, a_2, u_1, u_2) + \ldots \; (j = 1, 2). \tag{8}$$

Выражения (6) удобнее принятых в [2], поскольку позволяют избежать комплексных коэффициентов, вызывающих изменение фазы в x_{20}. Правда, это приводит к совершенно иной форме уравнений (8) по сравнению с [2] и многими другими работами, где применяются классические асимптотические методы [3], но в принципе легко показать, что система (8) однозначно может быть преобразована в обычные амплитудно-фазовые уравнения, принятые в практике асимптотического интегрирования нелинейных систем.

Поскольку $\alpha_j < 0$, осциллирующие решения (6) затухают, если только скорость роста функций $a_j(t)$ и $u_j(t)$ ниже скорости роста функций $e^{\alpha_j t}$. Поставленная задача сводится, таким образом, к нахождению условий, когда хотя бы одна из этих функций имеет вид

$$a_j(t) = \tilde{a}_j(t)e^{-\alpha_j t}, \qquad u_j(t) = \tilde{u}_j(t)e^{-\alpha_j t}, \tag{9}$$

где $\tilde{a}_j(t)$ и $\tilde{u}_j(t)$ — ограниченные функции для всех $t > t_0$.

Подставляя решение (5) в систему (1) с учетом выражения (7) и уравнений (8), после несложных выкладок, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем последовательность систем линейных дифференциальных уравнений, определяющих последовательные приближения решения (5). Выражения при ε в нулевой степени совпадают с порождающей системой, при ε в первой степени линейная система указанной последовательности имеет вид

$$\ddot{x}_{11} + b_{11}\dot{x}_{11} + b_{12}\dot{x}_{21} + b_{11}x_{11} + c_{12}x_{21} = g(\dot{x}_1, \dot{x}_2) - \sum_{j=1,2} e^{\alpha_j t}\{[(2\alpha_j + b_{11})A_{j1} + \\ + 2\beta_j U_{j1} + b_{12}P_{j1}]\cos\beta_j t + [(2\alpha_j + b_{11})U_{j1} - 2\beta_j A_{j1} + b_{12}Q_{j1}]\sin\beta_j t\},$$
$$\ddot{x}_{21} + b_{21}\dot{x}_{11} + b_{22}\dot{x}_{21} + c_{21}x_{11} + c_{22}x_{21} = f(\dot{x}_1, \dot{x}_2) - \sum_{j=1,2} e^{\alpha_j t}\{[b_{21}A_{j1} + \\ + (2\alpha_j + b_{22})P_{j1} + 2\beta_j Q_{j1}]\cos\beta_j t + [b_{21}U_{j1} - 2\beta_j P_{j1} + (2\alpha_j + b_{23})Q_{j1}]\sin\beta_j t\}, \tag{10}$$

где P_{j1}, Q_{j1} определяют первое приближение производных $\frac{dp_j}{dt}$, $\frac{dq_j}{dt}$ аналогично (8) и являются линейной комбинацией A_{j1} и U_{j1}.

Принимая функции $g(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ и $f(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ в виде полиномов и ограничиваясь, в силу природы системы (10), только слагаемыми в $\dot{x}_1, \dot{x}_2$, содержащими ε в нулевой степени, получим

$$\begin{gathered} g = g_0 + g_0' \sum_{j=1,2} e^{\alpha_j t} \{[(a_j + p_j)\alpha_j + (u_j + q_j)\beta_j]\cos\beta_j t + [(u_j + q_j)\alpha_j - \\ - (a_j + p_j)\beta_j]\sin\beta_j t\} + G, \\ f = f_0 + f_0' \sum_{j=1,2} e^{\alpha_j t} \{[(a_j + p_j)\alpha_j + (u_j + q_j)\beta_j]\cos\beta_j t + [u_j + q_j)\alpha_j - \\ - (a_j + p_j)\beta_j]\sin\beta_j t\} + F, \end{gathered} \tag{11}$$

где $g_0 = \sum\limits_{s=0}^{m} g_s v^s$, $f_0 = \sum\limits_{s=0}^{n} f_s v^s$, $g_0' = \dfrac{dg_0}{dv}$, $f_0' = \dfrac{df_0}{dv}$ — соответственно характеристики обратных связей и их производные, вычисленные при $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$, $G(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ и $F(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ — слагаемые, содержащие «нерезонирующие» кратные и комбинационные гармоники.

Продифференцировав p_j и q_j из (7) по времени, подставим в (10) выражения P_{j1} и Q_{j1} через A_{j1} и U_{j1}. Обозначим через C_{jk} и S_{jk} соответственно коэффициенты при $e^{\alpha_j t}\cos\beta_j t$ и $e^{\alpha_j t}\sin\beta_j t$ в правой части k-го уравнения ($j, k = 1, 2$). С учетом (11) получим

$$\begin{gathered} C_{j1} = g_0'[(a_j + p_j)\alpha_j + (u_j + q_j)\beta_j] - y_j h_{3j} A_{j1} - (2\beta_j - y_j w_{3j}) U_{j1}, \\ S_{j1} = g_0'[(u_j + q_j)\alpha_j - (a_j + p_j)\beta_j] + (2\beta_j - y_j w_{3j}) A_{j1} - y_j h_{3j} U_{j1}, \\ C_{j2} = f_0'[(a_j + p_j)\alpha_j + (u_j + q_j)\beta_j] - y_j(h_{4j} + 2\beta_j^2) A_{j1} + (y_j w_{4j} + 2\beta_j z_j) U_{j1}, \\ S_{j2} = f_0'[(u_j + q_j)\alpha_j - (a_j + p_j)\beta_j] - (y_j w_{4j} + 2\beta_j z_j) A_{j1} - y_j(h_{4j} + 2\beta_j^2) U_{j1}, \end{gathered} \tag{12}$$

где

$$h_{1j} = \alpha_j^2 - \beta_j^2 + b_{11}\alpha_j + c_{11}, \quad h_{2j} = b_{21}\alpha_j + c_{21}, \quad h_{3j} = b_{12}\alpha_j + c_{12},$$
$$h_{4j} = \alpha_j^2 - \beta_j^2 + b_{22}\alpha_j + c_{22};$$
$$w_{1j} = 2\alpha_j\beta_j + b_{11}\beta_j, \quad w_{2j} = b_{21}\beta_j, \quad w_{3j} = b_{12}\beta_j, \quad w_{4j} = 2\alpha_j\beta_j + b_{22}\beta_j;$$
$$y_j = \frac{w_{1j}h_{3j} - h_{1j}w_{3j}}{\beta_j(h_{3j}^2 + w_{3j}^2)}; \qquad z_j = \frac{h_{1j}h_{3j} + w_{1j}w_{3j}}{h_{3j}^2 + w_{3j}^2}.$$

Воспользуемся условиями

$$C_{j1}h_{4j} + S_{j1}w_{4j} - C_{j2}h_{3j} - S_{j2}w_{3j} = 0,$$
$$C_{j1}w_{4j} - S_{j1}h_{4j} - C_{j2}w_{3j} + S_{j2}h_{3j} = 0$$

отсутствия вековых членов в решении системы (10). С учетом равенств (3), (4) и (7) получим линейную алгебраическую систему относительно искомых функций $A_{j1}(a_1, a_2, u_1, u_2)$ и $U_{j1}(a_1, a_2, u_1, u_2)$:

$$\begin{gathered} A_{j1}(\bar{a}, \bar{u})\cdot\xi_{1j} - U_{j1}(\bar{a}, \bar{u})\cdot\xi_{2j} = a_j\eta_{1j} - u_j\eta_{2j}, \\ A_{j1}(\bar{a}, \bar{u})\cdot\xi_{2j} + U_{j1}(\bar{a}, \bar{u})\cdot\xi_{1j} = a_j\eta_{2j} + u_j\eta_{1j}, \end{gathered} \tag{13}$$

где

$$\bar{a} = \{a_1, a_2\}, \quad \bar{u} = \{u_1, u_2\}, \quad \xi_{1j} = 2\beta_j(w_{1j} + w_{4j}), \quad \xi_{2j} = \frac{2}{\beta_j}[w_{1j}w_{4j} -$$

$$- w_{2j}w_{3j} + \beta_j^2 (h_{4j} + h_{1j})], \quad \eta_{1j} = g_0' [\beta_j (w_{4j} - w_{2j}) - \alpha_j (h_{4j} - h_{2j})] -$$
$$- f_0' [\beta_j (w_{3j} - w_{1j}) - \alpha_j (h_{3j} - h_{1j})], \quad \eta_{2j} = g_0' [\alpha_j (w_{4j} - w_{2j}) +$$
$$+ \beta_j (h_{4j} - h_{2j})] - f_0' [\alpha_j (w_{3j} - w_{1j}) + \beta_j (h_{3j} - h_{1j})].$$

Разрешая (13) относительно $A_{j1} (\overline{a}, \overline{u})$ и $U_{j1} (\overline{a}, \overline{u})$ и подставляя их значения в (8), найдем линейную систему дифференциальных уравнений первого приближения для $a_j (t)$, $u_j (t)$ в виде

$$\frac{da_j}{dt} = a_j \varepsilon \frac{\xi_{1j}\eta_{1j} + \xi_{2j}\eta_{2j}}{\xi_{1j}^2 + \xi_{2j}^2} - u_j \varepsilon \frac{\xi_{1j}\eta_{2j} - \xi_{2j}\eta_{1j}}{\xi_{1j}^2 + \xi_{2j}^2},$$
$$\frac{du_j}{dt} = a_j \varepsilon \frac{\xi_{1j}\eta_{2j} - \xi_{2j}\eta_{1j}}{\xi_{1j}^2 + \xi_{2j}^2} + u_j \varepsilon \frac{\xi_{1j}\eta_{1j} + \xi_{2j}\eta_{2j}}{\xi_{1j}^2 + \xi_{2j}^2} \quad (j = 1, 2). \tag{14}$$

Ее характеристическое уравнение

$$\frac{1}{(\xi_{1j}^2 + \xi_{2j}^2)^2} \begin{vmatrix} \varepsilon (\xi_{1j}\eta_{1j} + \xi_{2j}\eta_{2j}) - \mu (\xi_{1j}^2 + \xi_{2j}^2) & -\varepsilon (\xi_{1j}\eta_{2j} - \xi_{2j}\eta_{1j}) \\ \varepsilon (\xi_{1j}\eta_{2j} - \xi_{2j}\eta_{1j}) & \varepsilon (\xi_{1j}\eta_{1j} + \xi_{2j}\eta_{2j}) - \mu (\xi_{1j}^2 + \xi_{2j}^2) \end{vmatrix} = 0$$

имеет по одной паре комплексно сопряженных корней

$$\mu_{1,2}^{(j)} = \frac{\varepsilon}{\xi_{1j}^2 + \xi_{2j}^2} [\xi_{1j}\eta_{1j} + \xi_{2j}\eta_{2j} \pm i (\xi_{2j}\eta_{1j} - \xi_{1j}\eta_{2j})]$$

для каждого $j = 1, 2$.

При этом общее решение системы (14) имеет вид

$$a_j = e^{\varepsilon \frac{\xi_{1j}\eta_{1j} + \xi_{2j}\eta_{2j}}{\xi_{1j}^2 + \xi_{2j}^2} t} \left(B_{1j} \cos \frac{\xi_{2j}\eta_{1j} - \xi_{1j}\eta_{2j}}{\xi_{1j}^2 + \xi_{2j}^2} \varepsilon t + B_{2j} \sin \frac{\xi_{2j}\eta_{1j} - \xi_{1j}\eta_{2j}}{\xi_{1j}^2 + \xi_{2j}^2} \varepsilon t \right),$$
$$u_j = e^{\varepsilon \frac{\xi_{1j}\eta_{1j} + \xi_{2j}\eta_{2j}}{\xi_{1j}^2 + \xi_{2j}^2} t} \left(B_{1j} \sin \frac{\xi_{2j}\eta_{1j} - \xi_{1j}\eta_{2j}}{\xi_{1j}^2 + \xi_{2j}^2} \varepsilon t - B_{2j} \cos \frac{\xi_{2j}\eta_{1j} - \xi_{1j}\eta_{2j}}{\xi_{1j}^2 + \xi_{2j}^2} \varepsilon t \right), \tag{15}$$

где B_{1j}, B_{2j} — произвольные постоянные. Из начальных условий $a_j (0) = a_{j0}$, $u_j (0) = u_{j0}$ легко определить $B_{1j} = a_{j0}$, $B_{2j} = -u_{j0}$. Сравнивая (15) с (9), можно заметить, что $a_j (t)$ и $u_j (t)$ действительно представляют собой произведения ограниченных функций

$$\tilde{a}_j (t) = a_{j0} \cos \frac{\xi_{2j}\eta_{1j} - \xi_{1j}\eta_{2j}}{\xi_{1j}^2 + \xi_{2j}^2} \varepsilon t - u_{j0} \sin \frac{\xi_{2j}\eta_{1j} - \xi_{1j}\eta_{2j}}{\xi_{1j}^2 + \xi_{2j}^2} \varepsilon t,$$
$$\tilde{u}_j (t) = a_{j0} \sin \frac{\xi_{2j}\eta_{1j} - \xi_{1j}\eta_{2j}}{\xi_{j1}^2 + \xi_{2j}^2} \varepsilon t + u_{j0} \cos \frac{\xi_{2j}\eta_{1j} - \xi_{1j}\eta_{2j}}{\xi_{1j}^2 + \xi_{2j}^2} \varepsilon t$$

на экспоненту.

Таким образом, в двухконтурной демпфированной системе возможны незатухающие почти периодические автоколебания с частотами β_j $(j = 1, 2)$, если действительные части корней характеристического уравнения (2) удовлетворяют равенству

$$\alpha_j = -\varepsilon \frac{\xi_{1j}\eta_{1j} + \xi_{2j}\eta_{2j}}{\xi_{1j}^2 + \xi_{2j}^2}. \tag{16}$$

Величины ξ_{1j}, ξ_{2j} — функции только конструктивных параметров системы, а η_{1j}, η_{2j} зависят, кроме того, еще и от производных по управляющему сигналу характеристик обратных связей. Следовательно, условие (16) позволяет регулировать параметры колебательных режимов в системе или осуществлять синтез систем в соответствии с требуемым режимом работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гайсенюк Б. С., Пономарев А. С., Урбанская В. С. Об условиях существования незатухающих автоколебаний в системе с демпфированием.— Укр. мат. журн., 1977, **29**, № 1, с. 96—99.
2. Пономарев А. С., Гайсенюк Б. С., Кириченко А. М. Многочастотные колебания в нелинейных системах с демпфированием.— Вычислительная и прикладная математика. Киев, 1974, вып. 24, с. 152—156.
3. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Физматгиз, 1963. —410 с.

Харьковский
политехнический институт

Поступила в редакцию
18.VII 1977 г.