Лекция 2

Цель лекции – приступить к изучению свойств вероятностей

План лекции

1.5. Вероятность события в статистической формулировке

Классическое определение вероятности события может быть использовано в тех случаях, когда события представляют полную группу элементарных событий, и каждое из них является равновозможным. Но это лишь частный случай.

Существуют события, которые в этот частный случай не вписываются. Например, поражение мишени разными стрелками. Можно сделать вывод, что классическое определение не охватывает случаи, когда появление или не появление события связано с тем или иным испытанием или экспериментом. При этом под "испытанием" или "экспериментом" в ТВ понимают также и совокупность природных условий, при которых явление имеет может произойти. Для определенности в формулировке термина вероятность вводятся дополнительные термины:

Относительной частотой появления события W(A) или статистической вероятностью события $P^*(A)$ в данной серии опытов называется отношение числа опытов, в которых событие произошло, к общему числу произведенных опытов:

$$W(A) = \overset{*}{P}(A) = \frac{m}{n}$$

Пример: Вероятность рождения девочек ниже.

Вероятностью появления события A называется число, около которого колеблется (или больше или меньше) относительная частота появления события при неограниченном увеличении числа испытаний и сохранении условий эксперимента.

Пример: определение вероятности поражения цели из автомата Калашникова. Производят серии выстрелов (например, по сто выстрелов в каждой серии). Для каждой серии фиксируют относительную частоту поражения цели . Например, 95/100, 99/100, 97/100, 96/100, 100/100, 95/100 и т.д.

Статистическое определение вероятности появления события имеет тот недостаток, что:

- как правило, не имеется возможность произвести достаточное количество опытов;
- трудно сохранить одинаковые условия эксперимента.

1.6 Аксиомы теории вероятностей

Они используются для строго построения математической теории вероятностей, т.е. применяется при аналитических исследованиях свойств вероятности. Такие исследования базируются на использовании понятия поле событий.

Совокупность событий

$$\{A_1, A_2, \ldots\} = \Omega$$

называется полем события, если выполняются следующие условия:

1. $\mathrm{V}A_i, A_j \in \Omega;\quad A_i + A_j \in \Omega$. Такая запись означает, что для всяких A_i и A_j, взятых из поля событий, их сумма также входит в поле события. V – квантор общности;
2. $\mathrm{V}A_i, A_j \in \Omega;\quad A_i \cdot A_j \in \Omega$;
3. $U \in \Omega$;
4. $V \in \Omega$;
5. $\mathrm{V}A_i \in \Omega;\quad \overline{A}_i \in \Omega$.

Аксиома 1.
Всякому событию из поля события ставят в соответствие некоторое неотрицательное число, которое называют его вероятностью

$$A_i \to P(A_i);\quad P(A_i) \geq 0,\quad \text{где}\quad i = 1, 2, \ldots$$

Аксиома 2.
Вероятность достоверного события принимается равной единице

$$P(U) = 1.$$

Аксиома 3. (аксиома сложения).
Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей каждого

$$P(A_i + A_j) = P(A_i) + P(A_j);$$

$$A_i \cdot A_j = V;\qquad i,j = 1,2,\ldots.\qquad i \neq j.$$

Аксиома 3′. (расширенная аксиома сложения)
Вероятность суммы нескольких попарно несовместных событий равна сумме вероятностей каждого

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_i) + P(A_j) + \ldots + P(A_n);$$

$$A_i \cdot A_j = V;\qquad i,j = 1,2,\ldots.\qquad i \neq j.$$

Аксиома 4.
Если событие А равносильно наступлению хотя бы одного из попарно несовмест-

ных событий A_1, A_2, …,A_n , то вероятность этого события равна сумме вероятностей каждого

$$P(A)=\sum_1^n P(A_i).$$

Следствия:

1. Вероятность противоположного события равна 1 за вычетом вероятности прямого события

$$P(\overline{A})=1-P(A);$$

Доказательство $A+\overline{A}=U$;

$$P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})=1.$$

2. Вероятность невозможных событий равна 0

$$P(V)=0$$

Доказательство

$$U+\overline{U}=U;\quad U+V=U;\quad 1+P(V)=1.$$

3. Вероятность любого события лежит в пределах

$$0\le P(A_i)\le 1.$$

1.7 Основные свойства вероятности событий

Использование свойств вероятности события в большинстве случаев существенно упрощают расчет вероятности сложного события через вероятности простых событий его составляющих. Для практики применение этих свойств значительно уменьшают расход материальных ресурсов. Пример - определение вероятности поражения самолета при пуске двух ракет, если известна вероятность поражения одной ракетой.

1.7.1.Зависимые и независимые события. Условные вероятности.

Событие В называется зависимым от события А, если вероятность его появления или непоявления зависит от появления или непоявления события А.

Определение Условной вероятностью события В называется вероятность, вычисленнная в предположении, что событие А произошло

$$P_A(B)=P(B/A)=\frac{P(B\cdot A)}{P(A)}$$

Для условных вероятностей справедливы все 4 аксиомы и все следствия.

1.7.2. Теорема умножения вероятностей

Вероятность совместного появления двух событий А и В равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность второго при условии, что первое произошло.

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B)$$

Доказательство. По классическому определению вероятности одновременного появления (любых) двух событий (A и B) она равна отношению количества случаев, в которых эта пара появлялась, к общему количеству равновозможных элементарных случаев. Пример – четное число на грани игральной кости ($n_{AB/}$ n)

$$P(A \cdot B) = \frac{n_{ab}}{n} \cdot \frac{n_a}{n_a} = \frac{n_a}{n} \cdot \frac{n_{ab}}{n_a} = P(A) \cdot P(B/A)$$

Отсюда можно сформулировать:

Зависимы те события, для которых $P(B) \neq P(A/B)$.

Независимы те события, для которых $P(B) = P(A/B)$.

Следствие 1

Если появление события B не зависит от появления события A, то и появление события A не зависит от события B:

$$P(B) = P(B/A);\ P(AB) = P(A)\cdot P(B/A) = P(B)\cdot P(A/B);\quad P(A) = P(A/B).$$

Следствие 2

Если события A и B независимы, то вероятность их совместного появления равн изпроизведению их вероятностей

$$P(A\cdot B) = P(A)\cdot P(B).$$

Следствие 3

Для любого числа независимых событий $A_1, A_2, A_3, \ldots$

$$P(A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot\ldots) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)\cdot\ldots$$

Примеры на использование аксиом и теоремы умножения

Определить вероятность поражения цели двумя ракетами , если вероятность поражения каждой равна 0,9 . Поражение первой (событие A) и второй ракетой (событие B) есть события независимые.

Событие «поражение цели двумя ракетами » есть сумма A+B. Представим ее в виде трех несовместных событий

$$A + B = A\overline{B} + B\overline{A} + AB$$

Согласно аксиоме сложения вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей каждого. Тогда

$$P(A + B) = P(A\overline{B}) + P(B\overline{A}) + P(AB)$$

Согласно следствию 1 из аксиомы 4 вероятность противоположного события равна 1 за вычетом вероятности прямого события

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A);$$

а согласно теореме умножения для независимых событий их совместное появление равно произведению вероятностей

$$P(A+B) = P(A)P(\overline{B}) + P(B)P(\overline{A}) + P(A)P(B)$$

Подставляя числовые значения, получим

$$P(A+B) = 0{,}9 \cdot 0{,}1 + 0{,}9 \cdot 0{,}1 + 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}99\,.$$

Можно решить эту задачу иначе. Непоражение цели есть событие противоположное событию A+B, то-есть

$\overline{B}\overline{A}$ и тогда $P(\overline{B}\overline{A}) = 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}01$

Используя следствие 1, получим тот же результат.