Национальный технический университет
"Харьковский политехнический институт"
Факультет "Автоматика и приборостроение"
Кафедра "Радиоэлектроника"

Ю.И.Подъячий

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

(Конспект лекций)

Харьков – 2002 г.

1. Гармонические колебания

1.1. *Основные определения*

Колебаниями называются движения и процессы, которые характеризуются определенной повторяемостью во времени.

Исходя из этого определения подавляющее число явлений, с которыми мы повседневно сталкиваемся в жизни, можно отнести к колебаниям. Качание часового маятника, циклическое изменения времен года, смена дня и ночи и многое другое можно отнести к колебаниям (или к колебательным процессам). Огромный класс электромагнитных явлений также характеризуется определенной повторяемостью во времени (переменный ток, электромагнитные волны). В настоящее время даже в биологии обнаружены колебательные процессы (так называемые циклы жизни), которым подчиняются, например, популяции насекомых и млекопитающих.

В каждом из перечисленных примеров изменяются различные физические величины. При качании часового маятника изменяется координата его центра масс или угол отклонения маятника от положения равновесия. В годовом цикле изменяется время восхода и захода Солнца. В переменном токе изменяется напряжение и сила тока, в электромагнитных волнах – напряженность поля.

Несмотря на различную физическую природу периодических процессов, их можно изучать в рамках единого подхода – ***теории колебаний***. Это следует из того, что все такие процессы описываются одинаковыми характеристиками и одинаковыми уравнениями.

Совокупность материальных объектов, в которых совершается колебательный процесс, называется ***колебательной системой***. Наиболее очевидной колебательной системой являются механические часы. В них колебания совершает маятник. Он со строго определенной степенью повторяемости изменяет свое положение относительно неподвижного механизма часов. Колебательной системой является и соединенные друг с другом конденсатор и катушка индуктивности. В них с определенной повторяемостью изменяются величины тока, напряжения и заряда.

Колебания называются ***свободными*** (или ***собственными*** колебаниями системы), если они совершаются за счет первоначально сообщенной колебательной системе энергии при последующем отсутствии внешних воздействий на эту систему. Наиболее ярким примером свободных колебаний является солнечная система. Другим примером является металлический шарик на пружинке или на нити.

Колебания, при которых колеблющаяся величина (обозначим ее, например, s) изменяется по закону косинуса (или синуса), называются ***гармоническими***. Гармонические колебания такой величины описываются выражением

$$s(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0). \qquad (1.1.1)$$

Здесь A – ***амплитуда*** колебаний, т.е. максимальное отклонение колеблющейся величины от положения равновесия. Величина $(\omega_0 t+\varphi_0)$ называется ***фазой колебаний***. Она позволяет восстановить состояние колебательной системы в любой момент времени как в прошлом, так и в будущем. ω_0 – ***угловая*** (или *циклическая*) ***частота***, измеряемая в *рад/с*; φ_0 – начальная фаза колебаний в момент времени t=0.

Промежуток времени, за который фаза колебания изменяется на 2π *рад*, называется периодом колебания

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Заметим: если в моменты времени t_1 и t_2 фаза колебаний отличается на 2π *рад*, то в эти моменты времени колебательная система находится в одинаковых состояниях.

Число полных колебаний в единицу времени называется частотой колебаний

$$f = \frac{1}{T}.$$

Частота измеряется в Герцах (Гц). 1 *Гц* - частота периодического процесса, при которой за 1 секунду совершается один цикл процесса.

Угловая частота связана с частотой соотношениями

$$\omega_0 = 2\pi f, \quad f = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

График изменения величины, колеблющейся по гармоническому закону, показан на *рис. 1.1*.

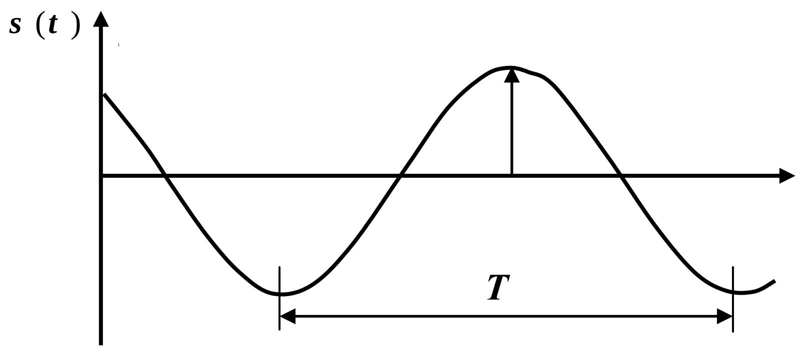

Рис. 1.1

1.2. Ряд и интеграл Фурье

В теории колебаний гармонические колебания очень часто являются объектом самостоятельного исследования. Причин этому несколько.

Во-первых, большое количество движений, встречающихся в природе и технике, подчиняются гармоническому закону. Например, вращение планет вокруг Солнца, движение часового маятника, вращение вала турбин, изменение напряжения в сети и многое другое.

Во-вторых, многие процессы в технике не являются в строгом смысле слова гармоническими, но очень близки к ним. Например, изменение напряжения на выходе электронного генератора в принципе не может описываться гармонической функцией, но для большинства технических применений это можно сделать. Возникающие при этом погрешности обычно вполне допустимы.

И, наконец, *в-третьих*: любой периодический процесс можно представить суммой нескольких гармонических периодических процессов с различной частотой и различной амплитудой. Математически это выражается *рядом Фурье.*

Любую периодическую функцию с периодом 2π можно разложить в ряд по тригонометрическим функциям:

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \qquad (1.2.1)$$

Такой ряд называется *рядом Фурье*, а разложение в ряд Фурье составляет задачу *гармонического анализа*. В приложениях зачастую ограничиваются конечным числом n членов и получают при этом приближение функции тригонометрическим многочленом

$$s_n(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Среднеквадратичная погрешность

$$\delta^2 = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - s_n(x)]^2 dx$$

минимальна тогда и только тогда, когда коэффициенты a_k и b_k определяются следующим образом:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \quad (k = 0, 1, 2, ...), \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \quad (k = 1, 2, ...).$$

Ряд Фурье можно также представить в следующей форме:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(kx + \varphi_k), \tag{1.2.2}$$

где

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \varphi_k = arctg \frac{a_k}{b_k}.$$

В радиотехнике и радиофизике выражение (1.2.2) часто называют разложением периодической функции $f(x)$ в ряд по гармоникам. При этом a_o равно математическому ожиданию (постоянной составляющей) функции $f(x)$, A_k – амплитуда k-той гармоники, а k и φ_k –ее частота и начальная фаза.

Непериодическая функция $f(x)$ не может быть разложена в ряд Фурье. Однако при определенных предположениях (основным из которых является условие абсолютной интегрируемости функции, т.е. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < +\infty$) из разложения в ряд Фурье на интервале ($-l$,$+l$) посредством предельного перехода $l \to +\infty$ можно получить разложение непериодической функции в так называемый *интеграл Фурье*:

$$f(x) = \int_{0}^{+\infty} [a(y)\cos(xy) + b(y)\sin(xy)] dy, \tag{1.2.3}$$

где

$$a(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos(yu) du, \qquad b(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \sin(yu) du.$$

Таким образом, из выражений (1.2.1 - 1.2.3) видно, что любая периодическая и большой класс непериодических функций в результате гармонического анализа могут быть представлены суммой или интегралом гармонических функций. Физически это означает, что любой периодический или непериодический процесс может быть представлен суперпозицией гармонических процессов. Это и является одной из основных причин того, что изучение гармонических процессов занимает особое место в теории колебаний.

1.3. Дифференциальное уравнение гармонического осциллятора

Гармоническим осциллятором называют колебательную систему с одной степенью свободы, изменение состояния которой подчиняются гармоническому закону. (Как известно, одна степень свободы означает зависимость состояния системы от одного параметра. В случае механической системы – от одной координаты).

Обычно анализ колебательной системы осуществляют по следующей процедуре (*рис. 1.2*). Сначала формулируют физические уравнения, описывающие движение системы или изменение ее состояния во времени. Затем с помощью преобразований получают из них дифференциальное уравнение (или систему дифференциальных уравнений). На последнем этапе решают дифференциальные уравнения с учетом начальных условий. В отдельных весьма простых случаях решение удается получить в конечных интегралах; чаще для решения уравнений используют приближенные методы, в том числе и численные.

Рис. 1.2

Общий вид дифференциального уравнения для гармонического осциллятора можно установить, зная его решение. Действительно, пусть в самом общем случае выражение для гармонического колебания имеет вид:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0). \qquad (1.3.1)$$

Возьмем первую и вторую его производные по времени:

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0);$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Учитывая (1.3.1) последнее уравнение можно записать в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \qquad (1.3.2)$$

Это и есть дифференциальное уравнение гармонического осциллятора. Часто его записывают так:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \qquad (1.3.3)$$

Решение этого линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами в общем виде можно представить так:

$$x = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t,$$

где A и B определяются начальными условиями. Если в начальный момент времени t=0 x=x_0, а $\dot{x} = \dot{x}_0$, то

$$x = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t, \qquad \dot{x} = -x_0 \omega_0 \sin \omega_0 t + \dot{x}_0 \cos \omega_0 t.$$

Общее решение может быть также записано в виде:

$$x = K \cos(\omega_0 t + \alpha), \qquad \dot{x} = -K\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha),$$

где

$$K = +\sqrt{A^2 + B^2} - \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_0^2}}, \qquad tg\alpha = -\frac{B}{A} = -\frac{\dot{x}_0}{\omega_0 x_0}.$$

Таким образом, зависимость от времени величины, колеблющейся в гармоническом осцилляторе, можно представить обычной "синусоидой".

1.4. Векторное и экспоненциальное представление гармонических колебаний

При анализе колебательных систем и при решении задач теории колебаний полезно представлять гармонический осциллятор в векторной форме. Особенно хорошие результаты такое представление дает при рассмотрении систем, которые включают в себя несколько взаимодействующих осцилляторов.

В векторном представлении гармонический осциллятор изображается вращающимся вектором, длина которого равна амплитуде колебания, а угловая скорость вращения равна частоте ω_o. При этом в начальный момент времени t=0 угол между вектором и осью x равен

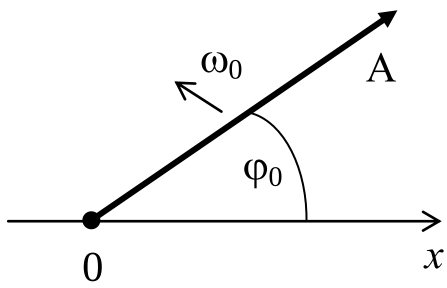

Рис. 1.3

φ_o (*рис. 1.3*).

При вращении вектора его проекция на некоторый произвольно направленный вектор (на рисунке – это ось x) будет изменяться во времени по закону

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Таким образом, гармоническое колебание можно представить проекцией на некоторую произвольно выбранную ось вращающегося с угловой скоростью ω_0 вектора, начало которого находится на этой же оси, а длина равна амплитуде колебания.

При расчете колебательных систем в радиотехнике и электротехнике широко используется экспоненциальное представление гармонического осциллятора. Согласно формуле Эйлера для комплексных чисел

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha.$$

Если гармоническое колебание записать в виде

$$x(t) = A\,e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)},$$

то вещественная часть этого комплексного числа

$$\mathrm{Re}\ \ x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

и будет соответствовать выражению для гармонического осциллятора.

Следует отметить, что в теории колебаний в качестве выражения для гармонического осциллятора принято выбирать вещественную часть комплексного числа, а в электротехнике и радиотехнике – мнимую часть:

$$\mathrm{Im}\ \ x = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

1.5. Фазовая плоскость

Состояние любой макроскопической системы (не квантовой) можно однозначно определить значением координаты и скорости в каждый момент времени.

Представим декартову систему координат, в которой по оси абсцисс откладывается величина x, а по оси ординат – ее производная $y=x'$. Плоскость, образованную такой системой координат называется плоскостью состояний или фазовой плоскостью. Любое состояние системы описывается точкой на этой плоскости с координатами (x,y). Верно и обратное утверждение: каждой точке на плоскости (x,y) соответствует одно и только одно состояние системы. Точка на фазовой плоскости называется ***изображающей*** или ***представляющей*** точкой. При изменении состояния системы изменяется и положение точки, представляющей состояние системы, на фазовой плоскости. Совокупность изображающих точек для конкретного движения образует ***фазовую траекторию***. Ее не следует путать с траекторией движения, т.е. траекторией перемещения, например, центра масс в механической колебательной системе. Скорость перемещения изображающей точки по фазовой траектории называется ***фазовой скоростью***. Ее также не следует путать с реальной скоростью в механической системе или с фазовой скоростью волн. ***Целой фазовой траекторией*** называют такую фазовую траекторию, которую описывает изображающая точка за все время своего движения (т.е. от $t=-\infty$ до $t=+\infty$).

Найти фазовую траекторию – это значит определить зависимость скорости движения от координаты для механических колебательных систем или зависимость величины тока от заряда для систем электрических. Довольно часто конечным результатом анализа колебательной системы и является нахождение фазовой траектории.

Наиболее просто определить фазовую траекторию для гармонического осциллятора. Запишем решения для уравнения гармонического осциллятора в виде:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \alpha), \quad y = \dot{x} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha). \tag{1.5.1}$$

Для получения уравнения фазовой траектории нужно избавиться в этих уравнениях от времени, т.к. форма фазовой траектории не изменяется со временем. Возведем их в квадрат и сложим:

$$x^2 = A^2\cos^2(\omega_0 t + \alpha), \quad \frac{y^2}{\omega_0^2} = A^2\sin^2(\omega_0 t + \alpha), \quad x^2 + \frac{y^2}{\omega_0^2} = A^2.$$

Или, окончательно

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{A^2\omega_0^2}=1.$$

Это уравнение эллипса, горизонтальная полуось которого равна A, а вертикальная – $A\omega_0$ (*рис. 1.4*).

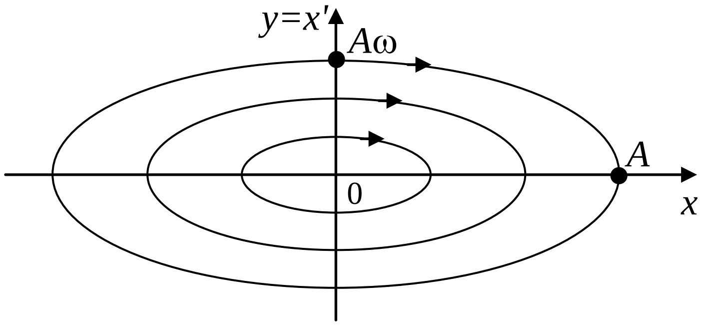

Рис. 1.4

Легко показать, что направление движения изображающей точки по эллипсу совпадает с направлением часовой стрелки. При выбранном направлении осей координат положительная скорость (y>0) всегда вызовет увеличение x с течением времени, а отрицательная - уменьшение x.

Таким образом, каждому колебанию с определенными значениями амплитуды и частоты соответствует свой эллипс на фазовой плоскости. Амплитуда колебаний определяется начальными условиями, а именно – начальной величине полной энергии системы. Притом, через любую точку на фазовой плоскости проходит один и только один эллипс. Точка x=0, y=0 называется особой точкой и является вырожденным эллипсом. Если фазовые кривые вокруг особой точки имеют замкнутый характер, то такая точка называется *особой точкой типа центр*.

Скорость перемещения изображающей точки по фазовой траектории называется фазовой скоростью. Для ее определения введем на плоскости (x,y) так называемый фазовый вектор

$$\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{i}}\,x+\vec{\mathbf{j}}\,y.$$

В этом случае, для фазовой скорости можно записать:

$$\vec{\mathbf{v}}=\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}=\vec{\mathbf{i}}\,\dot{x}+\vec{\mathbf{j}}\,\dot{y}.$$

Продифференцировав (1.5.1) и подставив в последнее уравнение, получим

$$\vec{\mathbf{v}}=\vec{\mathbf{i}}[-A\omega_0\sin(\omega_0 t+\alpha)]+\vec{\mathbf{j}}[-A\omega_0^2\cos(\omega_0 t+\alpha)].$$

Отсюда видно, что фазовая скорость никогда не обращается в нуль, так как синус и косинус одновременно в нуль не обращаются (за исключением тривиального случая A=0). Очевидно, что полный оборот изображающей точки по фазовой траектории осуществляется за период колебаний $T=2\pi/\omega 0$.

Таким образом, фазовая траектория дает общее представление о характере движения колебательной системы, позволяет оценить его качественные характеристики. Именно поэтому, определение фазовой траектории зачастую является самостоятельной и достаточной задачей при анализе таких систем.

Здесь форма фазовой траектории получена из решения (1.5.2) дифференциального уравнения гармонического осциллятора (1.3.3). Однако характер фазовой траектории может быть получен без решения дифференциального уравнения, а непосредственно из него.

Дифференциальное уравнение полностью описывает движение в колебательной системе. Например, дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

описывает движение любой системы, колебания в которой подчиняются гармоническому закону. Это уравнение можно записать в виде системы двух дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dx} = -\omega_0^2 x.$$

Разделив второе уравнение на первое, получим

$$\frac{dy}{dx} = -\omega_0^2 \frac{x}{y}.$$

Отсюда видно, что зависимость $y = \dot{x}$ от x (т.е. фазовая траектория) выражается дифференциальным уравнением первого порядка, в то время как зависимость x от t (т.е. – движение) выражается дифференциальным уравнением второго порядка. Другими словами, фазовая траектория является интегралом уравнения движения. В силу этого, фазовая траектория не может представить полное описание движения системы. Тем не менее, их анализ позволяет сделать определенные выводы о характере движения системы. Например, рассматривая фазовые траектории гармонического осциллятора (*рис. 1.4*), можно сказать следующее.

Во-первых, при любой величине первоначально сообщенной энергии (т.е. при любой амплитуде A) движение в системе будет периодическим. Это следует из того, что все фазовые траектории (в данном случае – эллипсы) представляют собой замкнутые кривые. Следовательно, изображающая точка в процессе своего движения будет *периодически* возвращаться в исходную точку. Физически это означает, что состояние системы *периодически* изменяется.

Во-вторых, Время оборота изображающей точки вокруг эллипса является конечной величиной. Действительно, длина эллипса конечна, а фазовая скорость никогда не обращается в ноль. Это означает, что период колебаний не бесконечен. В противном случае периодичность движения теряла бы смысл.

В-третьих, выродившаяся траектория x=0, y=0 соответствует состоянию равновесия. Фазовая скорость для нее равна нулю, т.к. длина фазового вектора равна нулю. Следовательно, изображающая точка, находящаяся в исходный момент времени в начале координат, там и останется, если внешнее воздействие не выведет ее оттуда.

1.6. Устойчивость состояния равновесия

Вообще состояниям равновесия соответствуют такие точки фазовой плоскости, для которых одновременно

$$\frac{dx}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dt} = 0.$$

Физически для механической системы это означает, что в определенный момент времени (или интервал времени) скорость и ускорение движения одновременно равны нулю. Естественно, что система будет неподвижна, т.е., иными словами, будет находиться в состоянии равновесия. Вопрос состоит в том, как долго система будет находиться в этом состоянии. Или, пользуясь терминологией теории колебаний, будет ли это состояние равновесия устойчивым или неустойчивым.

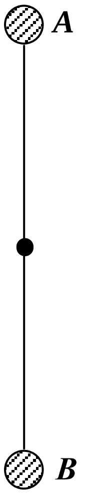

Рис. 1.5

Рассмотрим простейший пример – математический маятник. Для него возможны два состояния равновесия: в самой нижней точке и в самой верней точке траектории движения (*рис. 1.5*). Очевидно, что в точке ***B*** маятник находится в устойчивом состоянии равновесия, а в точке ***A*** – в неустойчивом. Действительно, если маятник находится в точке ***A***, то достаточно малейшего воздействия (толчка) на него, чтобы маятник ушел от этой точки на сколь угодно большое расстояние (ограниченное, разумеется, длиной нити). *При этом сила толчка не имеет никакого значения*.

Если же маятник находится в точке ***B***, то характер движения будет совсем иной. Толчок маятника вызовет его движение с уменьшающейся скоростью, в результате которого маятник отклонится на некоторое расстояние от точки ***B***. Затем он снова возвратится в точку ***B*** и станет колебаться вокруг нее с определенным периодам. Главным отличием от первого случая является то, что *расстояние, на которое отклоняется маятник от точки **B**, зависит от силы первоначального толчка*. Чем меньше будет сила толчка, тем на меньшее расстояние отклонится маятник от точки ***B***. При достаточно малом толчке можно указать область вокруг точки B, за пределы которой маятник не выйдет и его скорость не превзойдет наперед заданной величины.

Исходя из этого примера и пользуясь фазовой плоскостью, можно дать следующее определение устойчивого состояния равновесия (А.А.Андронов, А.А.Витт, С.Э.Хайкин).

Состояние равновесия является устойчивым, если при любой заданной области допустимых отклонений от состояния равновесия O (область ε на рис. 1.6) можно указать область $\delta(\varepsilon)$, окружающую состояние равновесия и обладающую тем свойством, что ни одно движение, начинающееся внутри $\delta(\varepsilon)$, никогда не достигнет границы области ε.

Наоборот, состояние равновесия неустойчиво, если может быть указана такая область отклонений от состояния равновесия (область ε) для которой не существует области $\delta(\varepsilon)$, окружающей состояние равновесия и обладающей тем свойством, что ни одно движение, начинающееся внутри δ, никогда не достигнет границы области ε.

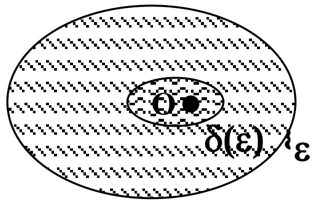

Рис. 1.6

Мы уже говорили, что особая точка, окруженная фазовой траекторией, называется центром. Нетрудно показать, что особые точки типа центр соответствуют устойчивому состоянию равновесия.

1.7. Общая классификация колебательных систем

Основные признаки колебательных систем, от которых зависят методы их анализа, можно сформулировать следующим образом:

1. ***Консервативные или неконсервативные***. Если в процессе движения суммарная энергия системы остается неизменной, то такая система является консервативной; в противном случае она – неконсервативная.
2. ***Линейные и нелинейные***. Если движение системы описывается линейными дифференциальными уравнениями, то она является линейной; в противном случае – система нелинейная.

3. ***По количеству степеней свободы***. Если состояние системы зависит от одной величины (координаты), то такие системы называются системами с одной степенью свободы, а если от многих величин (координат), – то системами с соответствующим количеством степеней свободы.

Кроме этих основных признаков можно назвать, в частности, автономность, стационарность и др.

Провести разделение реальных колебательных систем по этим признакам невозможно. Реальные физические системы, строго говоря, не являются ни линейными, ни консервативными. Количество степеней свободы в них также не является точно определенным. Поэтому классификация колебательной системы, вообще говоря, зависит от рассматриваемой задачи. А от того, какая задача относительно этой системы решается, зависит и степень идеализации системы. Как раз степень идеализации системы и является основным фактором, определяющим классификацию системы. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Очевидно, что математический маятник не является консервативной системой. Трение о воздух при его движении, трение в точке подвеса вызывает уменьшение энергии маятника. Так как это трение невелико, то при рассмотрении движения системы в течение небольшого промежутка времени его можно не учитывать. Продолжительность этого промежутка зависит от величины силы трения, действующий на маятник – чем больше трение, тем меньше интервал времени, в течение которого систему можно рассматривать консервативной. Кстати, это время нужно определять в периодах колебания маятника, а не в абсолютных единицах. Таким образом, если мы рассматриваем колебательную систему (маятник) в течение нескольких периодов, то ее можно считать консервативной; если же задача заключается в исследовании колебаний маятника в течение сотен или тысяч периодов, то необходимо учитывать рассеяние энергии, т.е. систему нужно считать неконсервативной.

Такое же положение возникает и при оценке нелинейности системы. В обычном электромагнитном колебательном контуре происходят колебания величин напряжений, заряда и тока. Если изменения этих физических величин незначительны (по отношению, конечно же, к их усредненным значениям), то связи между ними описываются линейными уравнениями:

$$dq = C\,du, \quad u = L\frac{di}{dt}, \quad i = \frac{dq}{dt}, \quad u = L\frac{d^2q}{dt^2}.$$

Контур в этом случае можно считать линейной колебательной системой. Если же изменения напряжения на обкладках конденсатора достаточно велики, то они вызывают изменения расстояния между ними, и, как следствие, изменение емкости конденсатора. Подобный эффект может иметь место и в катушке индуктивности: при значительных колебаниях тока через нее может измениться расстояние между витками, что приведет к изменению величины индуктивности катушки. Тогда приведенные выше уравнения приобретут нелинейный вид:

$$dq = C(u)du, \quad u = L(i)\frac{di}{dt}.$$

Контур при этом нельзя считать линейной системой. Но если даже при значительном увеличении амплитуды колебаний принять меры к усилению жесткости конденсатора и катушки, то систему снова можно будет считать линейной.

Вопрос о количестве степеней свободы в колебательной системе является одновременно и простым и сложным. Рассмотрим обычный вертикальный пружинный маятник – тело массой m, подвешенное на упругой пружине. Максимально возможное число степеней свободы в такой системе равно числу молекул в ней. Но, рассматривая систему на макроскопическом уровне, и принимая массу m абсолютно твердым телом, можно резко ограничить число степеней свободы. При предельной идеализации принимают, что движение массы m

происходит только в вертикальном направлении. Тогда при анализе достаточно принять число степеней свободы равным единице.

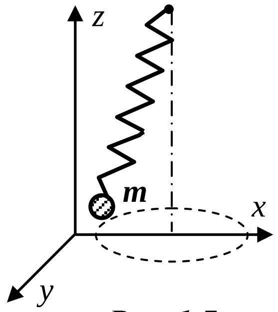

Рис. 1.7

При более внимательном рассмотрении движения маятника обнаруживаются его колебания не только в вертикальном направлении z, но и в горизонтальной плоскости – по осям x и y (*рис. 1.7*). Следовательно, исследование реального движения вертикального пружинного абсолютно твердого маятника требует введения как минимум трех степеней свободы – одной в вертикальном направлении и двух в горизонтальном.

Ситуация изменится, если вместо твердого тела на пружине подвесить сосуд с жидкостью или с сыпучей субстанцией (кстати, такая задача решается при проектировании танкеров и сухогрузов для перевозки песка). В такой системе в процессе движения будут изменяться координаты центра тяжести массы m. Для описания этих изменений нужно ввести от одной до трех степеней свободы (в зависимости от формы сосуда и условий решаемой задачи).

Даже приведенные выше простые примеры способны проиллюстрировать тот факт, что проблема определения числа степеней свободы колебательной системы не является однозначной и в, конечном итоге, тоже зависит от условий решаемой задачи. При этом следует иметь в виду, что увеличение числа степеней задачи приводит к увеличению количества уравнений, описывающих систему, а, следовательно, к усложнению получения их решения.