4.5. *Затухающий апериодический процесс*

Рассмотрим случай, когда оба корня характеристического уравнения (4.1.4) действительны. Физически это имеет место при наличии сильного трения в системе, т.е. $\delta>\omega_0$. Тогда решение дифференциального уравнения затухающих колебаний записывается в виде:

$$y = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}.$$

Так как r_1, $r_2<0$, то

$$y = C_1 e^{-|r_1|t} + C_2 e^{-|r_2|t}. \qquad (4.5.1)$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются начальными условиями. Из этого уравнения следуют два важных вывода: а) при любых начальных условиях движение с течением времени затухает, т.к. при $t\to\infty$ отклонение $y\to 0$; б) система за все время может пройти положение равновесия y=0 не больше одного раза, следовательно, осциллирующее затухание невозможно. Второе утверждение требует пояснения. Экспоненты не могут обращаться в нуль. Поэтому отклонение y может быть равно нулю только в том случае, если оба слагаемых в (4.5.1) равны по величине и имеют различные знаки. На интервале t от 0 до ∞ такое равенство может иметь место только один раз. Таким образом, здесь мы имеет дело не с осциллирующим процессом, а с *апериодическим*.

Развитие апериодического процесса определяется начальными условиями, а именно значениями скорости и отклонения системы от положения равновесия в момент времени t=0.

Рассмотрим три случая, различающихся начальными условиями.

1. Начальная скорость и начальное отклонение одного знака. В этом случае зависимость отклонения от времени имеет вид, показанный на *рис. 4.4*. В начальный момент t_0 отклонение x_0 и скорость V_0 положительны.

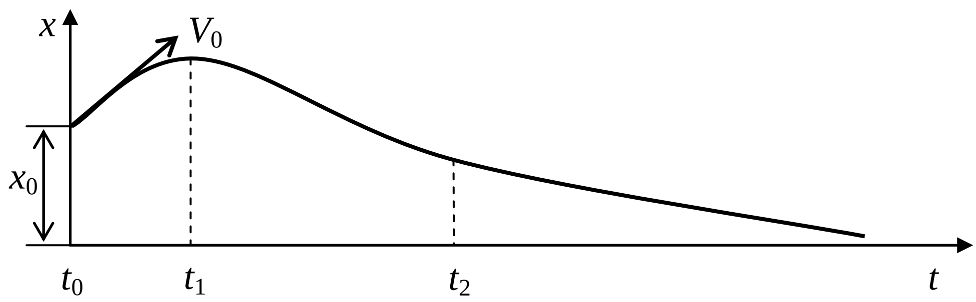

Рис. 4.4

Поэтому система сначала будет удаляться от положения равновесия, причем скорость ее будет постепенно убывать, т.к. начальная кинетическая энергия расходуется на увеличение потенциальной энергии и на преодоление трения. Когда скорость падает до нуля (точка t_1), система начнет двигаться назад к положению равновесия, причем сначала скорость будет возрастать, т.к. восстанавливающая сила больше силы трения. Но при движении сила трения возрастает (т.к. скорость возрастает), а восстанавливающая сила убывает (т.к. система приближается к положению равновесия). Следовательно, начиная с какого-то момента (точка t_2), скорость, достигшая к этому моменту максимума, начнет снова убывать. Система будет асимптотически приближаться к положению равновесия.

2. Начальная скорость и начальное отклонение имеют противоположные знаки, при этом начальная скорость относительно невелика, а начальное отклонение относительно велико. начальный толчок направлен в сторону, противоположную начальному отклонению.

В этом случае зависимость отклонения от времени можно представить в виде графика, пример которого приведен на *рис. 4.5*.

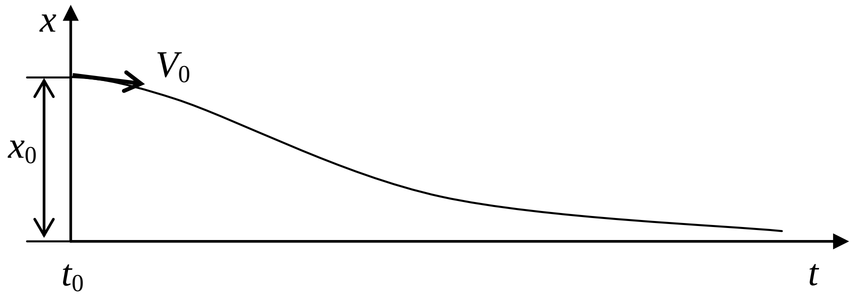

Рис. 4.5

Система, вследствие наличия значительного трения и небольшой начальной скорости, не может перейти через положение равновесия (x=0), и будет асимптотически приближаться к положению равновесия.

3. Начальная скорость и начальное отклонение имеют противоположные знаки, но при этом начальная скорость относительно велика, а начальное отклонение мало.

График зависимости отклонения от времени для этого случая показан на *рис. 4.6*.

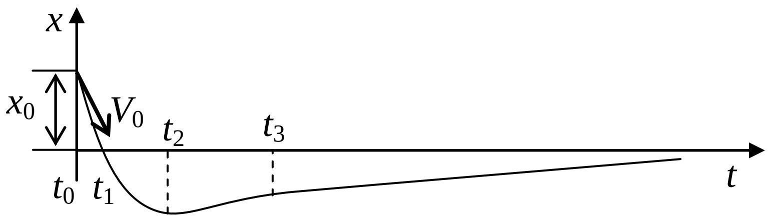

Рис. 4.6

Система обладает достаточной начальной скоростью, чтобы пройти положение равновесия, и после этого еще будет обладать некоторой скоростью, направленной в сторону отклонения (как и в первом случае). Поэтому в дальнейшем система будет вести себя аналогично первому случаю.

4.6. Фазовые траектории апериодического процесса

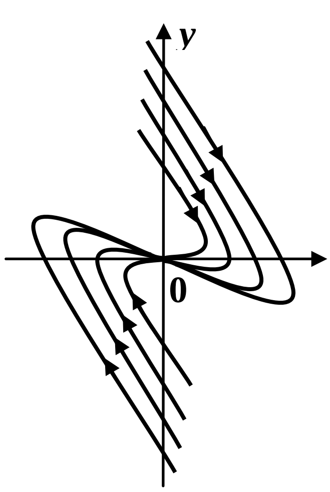

Рис. 4.7

Пример семейства фазовых траекторий апериодического процесса изображен на *рис. 4.7*. Незамкнутый характер траекторий говорит о том, что движение не является осциллирующем. Единственная особая точка семейства имеет координаты x=0, y=0, которая соответствует положению устойчивого равновесия системы. Каждая траектория пересекает координату x=0 только один раз либо может не пересекать ее ни разу, что соответствует физике апериодического процесса, рассмотренной выше. После прохождения точки максимального отклонения (пересечение оси x) система асимптотически устремляется к положению равновесия.

Направление движения представляющей точки определяется теми же соображениями, что и в случае гармонического осциллятора, рассмотренного ранее, а именно из условия, что при $y = \dot{x} > 0$ значение x должно возрастать. Так как тангенс угла касательной к интегральной кривой с осью x изменяет знак только один раз при пересечении с осью x, то сразу видно, что представляющая точка будет двигаться по фазовым траекториям в направлениях, указанным на рис. 4.7 стрелками, т.е. всегда будет приближаться к началу координат. Скорость движения представляющей точки, как и в предыдущих случаях, обращается в нуль только там, где одновременно $\dot{x} = 0$ и $\dot{y} = 0$, т.е. в особой точке рассматриваемого дифференциального уравнения.

x