

5. Линейные системы с "отрицательным трением"

В рассмотренных в предыдущем разделе колебательных системах коэффициент затухания был положительной величиной, т.е. $\delta > 0$. Действительно, для пружинного маятника $\delta = r/2m$, а для колебательного контура – $\delta = R/2L$. Так как трение и сопротивление – всегда положительные величины, то и коэффициент затухания в любом случае будет больше нуля. Амплитуда колебаний в такой системе экспоненциально уменьшается. Положительные коэффициент трения и сопротивление физически означают, что энергия системы расходуется на преодоление сил трения и сопротивления. Действительно, если в уравнении движения затухающих колебаний

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

умножить все члены на dx/dt , а затем проинтегрировать полученное выражение на временном интервале от 0 до τ , то получим:

$$m \int_0^\tau \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{dx}{dt} dt + 2\delta \int_0^\tau \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 dt + \omega_0^2 \int_0^\tau x \frac{dx}{dt} dt = 0.$$

Проведем интегрирование:

$$\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \Big|_0^\tau + \omega_0^2 \frac{x^2}{2} \Big|_0^\tau = -2\delta \int_0^\tau \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 dt.$$

Слева стоят члены, выражающие изменение кинетической и потенциальной энергии системы за время от 0 до τ . Если $\delta > 0$, то это изменение отрицательно, т.е. энергия системы убывает.

Очевидно, что если бы δ было отрицательно, то энергия системы возрастала. Но, для того, чтобы δ было меньше нуля, должны быть "отрицательными" трение или сопротивление. Тогда они были бы причиной пополнения энергии системы. Естественно, это возможно только в том случае, если система обладает собственным источником энергии.

Конечно, обычное трение и сопротивление в силу своей физической природы не могут быть отрицательными. Но если создать систему, дифференциальное уравнение которой имеет отрицательное значение коэффициента при диссипативном слагаемом, то можно, в силу сложившихся представлений, говорить о ней, как о системе с отрицательным трением. Рассмотрим несколько примеров таких систем.

5.1. Пружинный маятник на движущейся ленте

В отличие от рассмотренного раньше пружинного маятника, этот маятник движется по ленте, которая в свою очередь приводится в движение вращающимися валами (рис. 5.1).

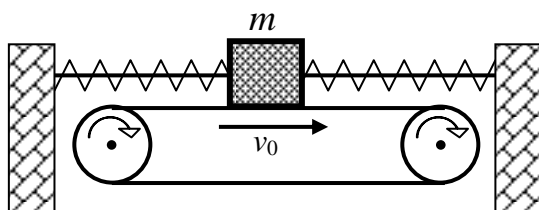


Рис. 5.1

При этом маятник испытывает трение о ленту, величина которого зависит от относительной скорости движения массы m и ленты. Обозначим силу трения маятника о ленту F и тогда

$$F = F(v_0 - \dot{x}),$$

где \dot{x} – скорость движения маятника в неподвижной системе координат.

Тогда, согласно второму закону Ньютона,

$$m\ddot{x} = F_{yn} + F_{mp} + F,$$

где F_{yn} – сила упругости пружин, а F_{mp} – сумма остальных сил трения. Если считать, что все остальные силы трения (трение о воздух, внутренне трение пружин и пр.) пропорциональны первой степени скорости движения маятника, т.е. $F_{mp} = -r\dot{x}$, а сила упругости пружин подчиняется закону Гука $F_{yn} = -kx$, то уравнение движения маятника можно записать в виде:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F(v_0 - \dot{x}). \quad (5.1.1)$$

Зависимость силы трения сухих поверхностей от скорости имеет вид, представленный на рис. 5.2. Главной особенностью этих характеристик является наличие участка, на котором сила трения уменьшается с увеличением скорости движения. Если предположить, что $\dot{x} \ll v_0$ (например, выбрав достаточно большую скорость v_0), то функцию $F(v_0 - \dot{x})$ можно разложить в ряд Тейлора в окрестности v_0 и ограничиться линейным членом этого разложения:

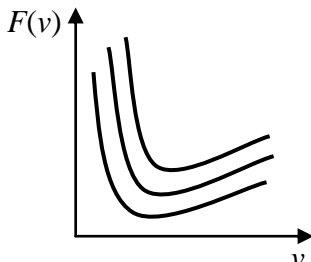


Рис. 5.2

$$F(v_0 - \dot{x}) = F(v_0) - \dot{x}F'(v_0) + \dots$$

Подставим это разложение в (5.1.1):

$$m\ddot{x} + [r + F'(v_0)] + kx = F(v_0).$$

Стоящий справа постоянный член обуславливает только смещение положения равновесия на величину $F(v_0)/k$ в направлении движения ленты. Если же скорость движения ленты лежит в пределах падающего участка характеристики $F(v)$ (рис. 5.2), то значение $F'(v_0) < 0$. Если при этом выполняется неравенство $|r| < F'(v_0)$, то коэффициент при диссипативном члене становится отрицательным, т.е. $2\delta = [r - F'(v_0)] < 0$. И тогда решение уравнения будет иметь вид:

$$x(t) = A_0 e^{\delta t} \cos(\omega t + \varphi). \quad (5.1.2)$$

Очевидно, что с течением времени амплитуда колебаний увеличивается.

5.2. Маятник Фроуда

Другой механической системой, в которой существует область "отрицательного трения", является маятник Фроуда (рис. 5.3). Он устроен так: на равномерно вращающемся с угловой скоростью Ω вала подвешен с некоторым трением обычный маятник. В уравнении движения этого маятника необходимо учесть момент силы трения вращающегося о подшипник, на котором подвешен маятник. Так как сила трения зависит от относительной скорости трущихся поверхностей, то момент силы можно выразить функцией $M(\Omega - \dot{\phi})$. Тогда уравнения движения маятника будет иметь вид (по аналогии с уравнением движения физического маятника)

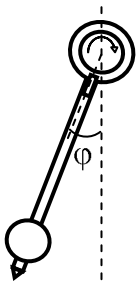


Рис. 5.3

$$J\ddot{\phi} + r\dot{\phi} + mgl\phi = F(\Omega - \dot{\phi}).$$

Ограничиваясь, как и в предыдущем примере, линейным членом разложения функции $F(\Omega - \dot{\phi})$ в ряд Тейлора при $\dot{\phi} \ll \Omega$, получим уравнение движения маятника Фроуда:

$$J\ddot{\phi} + r\dot{\phi} + mgl\phi = F(\Omega) - \dot{\phi}F'(\Omega)$$

Постоянный член $F(\Omega)$ вызывает только смещение положения равновесия (т.е. линия, от которой отсчитывается угол ϕ , отклоняется от вертикали). Если отсчитывать этот угол от новой угловой координаты, то постоянный член обращается в нуль, и уравнение движения принимает вид:

$$J\ddot{\phi} + [r + F'(\Omega)]\dot{\phi} + mgl\phi = 0.$$

Очевидно, что если $F'(\Omega) < 0$ и по абсолютной величине больше r , то член при $\dot{\phi}$ становится отрицательным, а маятник Фроуда приобретает свойства колебательной системы с "отрицательным трением". В ней с течением времени амплитуда колебаний (максимальный угол отклонения) увеличивается.

5.3. Генератор синусоидальных колебаний на туннельном диоде

Можно также создать электрическую колебательную систему, сопротивление которой при определенных условиях будет отрицательным. Примером такой системы может служить генератор на туннельном диоде. Его схема приведена на *рис. 5.4*.

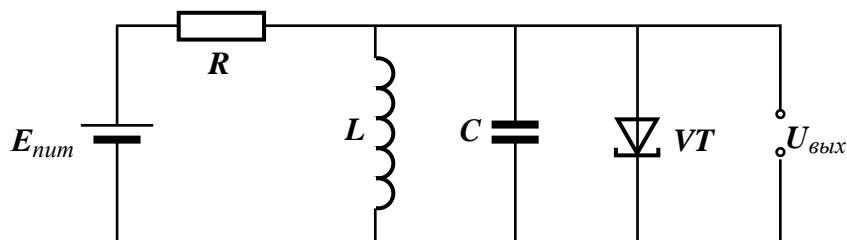


Рис. 5.4

Основной особенностью вольтамперной характеристики туннельного диода, пример которой приведен на *рис. 5.5*, является наличие "падающего" участка $a-b$. На этом участке увеличение напряжения, прикладываемого к диоду, вызывает уменьшение тока, протекающего через него. Следовательно, сопротивление диода по переменному току на этом участке

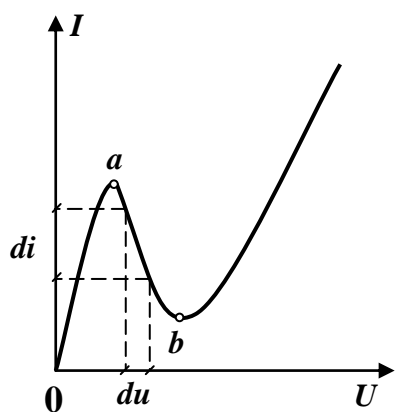


Рис. 5.5

$$r_i = \frac{du}{di} < 0.$$

Поэтому, если с помощью резистора R создать ток через диод, величина которого лежит в пределах участка $a-b$, то туннельный диод будет обладать отрицательным сопротивлением.

Колебательный контур и туннельный диод, как это видно из схемы, включены параллельно относительно друг друга, поэтому их активное эквивалентное сопротивление

$$r_{\text{экг}} = (r_k \parallel r_i) = \frac{r_k r_i}{r_k + r_i}.$$

где r_k – активное сопротивление колебательного контура.

Если r_k больше абсолютного значения r_i , т.е. $r_k > |r_i|$, то эквивалентное сопротивление контура и диода становится отрицательным, а, следовательно, и коэффициент при диссипативном члене дифференциального уравнения колебательной системы

$$\delta = \frac{R_{\text{экг}}}{2L} < 0.$$

Это означает, что изображенный на схеме генератор является колебательной системой с отрицательным трением, в которой амплитуда колебаний со временем нарастает.

5.4. Ламповый генератор с обратной связью

В качестве еще одного примера колебательной системы с "отрицательным сопротивлением" можно привести схему лампового генератора с обратной связью (рис. 5.6). В этой схеме колебательный контур включен в цепь сетки; обратная связь образуется катушкой индуктивности в анодной цепи, индуктивно связанной с катушкой колебательного контура (на схеме такая связь показана фигурной скобкой).

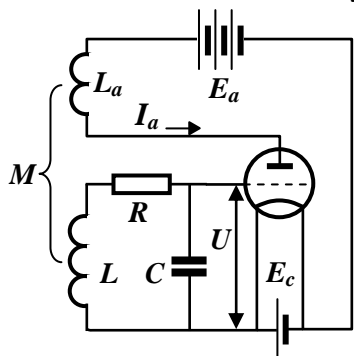


Рис. 5.6

Катушка обратной связи L_a вносит в контур ЭДС обратной связи $E_a = M \frac{dI_a}{dt}$, и тогда уравнение для контура в схеме нужно переписать в виде (еще раз отметим, что сеточные токи не учитываются):

$$LC \frac{d^2U}{dt^2} + RC \frac{dU}{dt} + U = 0.$$

Так как заряд конденсатора пропорционален напряжению на нем ($q=CU$), то дифференциальное уравнение изолированного колебательного контура для напряжения на конденсаторе имеет такой же вид, как и для заряда конденсатора:

$$LC \frac{d^2U}{dt^2} + RC \frac{dU}{dt} + U = M \frac{dI_a}{dt}. \quad (5.4.1)$$

Здесь следует сделать одно важное замечание. Знак в правой части уравнения зависит от взаимного расположения витков катушек L и L_a . Если анодная катушка подключена так, что она увеличивает напряжение на контуре, то $M > 0$, и образуемая при этом обратная связь называется *положительной*. В рассматриваемой схеме образована именно такая обратная связь.

Анодный ток является сложной функцией сеточного и анодного напряжений. Считая анодное напряжение почти постоянным, зависимостью анодного тока от U_a можно пренебречь, тогда можно записать

$$I_a = I_a(U).$$

Связь анодного тока с напряжением на сетке определяется анодно-сеточной характеристикой, пример которой приведен на рис. 5.7. Производная анодного тока по времени

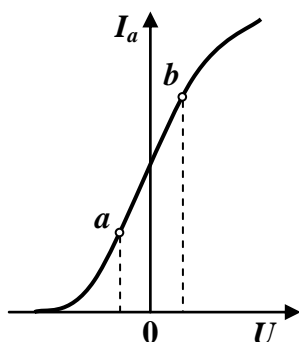


Рис. 5.7

$$\frac{dI_a}{dt} = \frac{dI_a}{dU} \frac{dU}{dt}. \quad (5.4.2)$$

Здесь производная анодного тока по сеточному напряжению определяется одним из основных параметров лампы – *крутизной* анодно-сеточной характеристики

$$S_i = \frac{dI_a}{dU}. \quad (5.4.3)$$

Для нелинейного элемента, которым является электронная лампа, крутизна не является постоянной величиной, и зависит от на-

пряжения U . Если напряжение на сетке не выходит за пределы линейного участка $a-b$ анодно-сеточной характеристики, то величину крутизны можно считать постоянной. Подставляя (5.4.3) в (5.4.2), а затем в (5.4.1), получим дифференциальное уравнение для генератора в виде

$$LC \frac{d^2 U}{dt^2} + (RC - MS_i) \frac{dU}{dt} + U = 0.$$

Введя обозначения $2\delta = \frac{RC - MS_i}{LC}$ и $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, это уравнение можно переписать в привычном виде:

$$\frac{d^2 U}{dt^2} + 2\delta \frac{dU}{dt} + \omega_0^2 U = 0.$$

При достаточно большой положительной величине коэффициента взаимной индукции M можно получить отрицательное значение коэффициента затухания δ , а рассматриваемая схема будет представлять собой линейную колебательную систему с "отрицательным" сопротивлением. (Заметим, что линейность системы справедлива только на участке $a-b$ анодно-сеточной характеристики).

Графики колебаний в системе с "отрицательным" трением и их фазовый портрет приведены на *рис. 5.8* и *5.9*. Амплитуда колебаний увеличивается со временем экспоненциально. Представляющая точка движется по фазовой траектории, как обычно, по часовой стрелке.

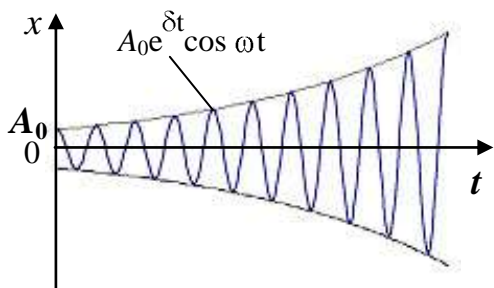


Рис. 5.8

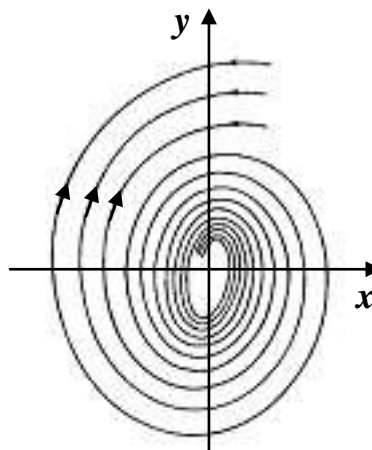


Рис. 5.9

В заключение этого раздела сделаем несколько замечаний.

Любая колебательная система с "отрицательным" трением должна иметь в своем составе источник энергии. В примерах механических систем – это движущаяся лента и вращающийся вал, в электрических системах – источник ЭДС. Энергия этих источников поступает в систему благодаря элементам, обладающим "отрицательным" трением или "отрицательным сопротивлением". В случае рассмотренных механических систем "отрицательное" трение проявляется в физическом характере трения сухих поверхностей. В электрических системах "отрицательное" сопротивление может при определенных условиях проявляться либо в характеристике активного элемента (сопротивление *по переменному току* меньше нуля), либо в свойствах цепи положительной обратной связи.

Согласно решению дифференциального уравнения для систем с отрицательным трением (5.1.2) амплитуда колебаний со временем нарастает бесконечно. Этот результат является следствием наших предположений о линейности рассматриваемых систем. При выводе

уравнений мы либо ограничивались линейным членом разложения функций трения в ряд, либо делали предположения, что величины напряжений и токов не выходят за пределы линейных участков вольтамперных характеристик. В реальных колебательных системах, конечно, увеличение амплитуды колебаний ограничивается нелинейностью системы. В частности, в примерах генератора на туннельном диоде и лампового генератора величина амплитуды ограничивается длиной линейных участков $a-b$ вольтамперных характеристик.

Колебания, возникающие в системах с "отрицательным" трением также не являются в строгом смысле этого слова периодическими (как и в системах с затуханием). Но промежутки времени, через которые система проходит положение равновесия в одном направлении, одинаковы и равны

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$. Заметим, что частота колебаний в системах с "отрицательным" трением также меньше частоты собственных колебаний аналогичной системы без трения.