МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОГО ЗАДАНИЯ ПО КУРСУ "Теория вероятностей и математическая статистика"

**для студентов специальностей "Информационно-измерительная техника", "Метрология, стандартизация и сертификация", "Радиофизика и электроника"**

Утверждено
редакционно-издательским
советом университета,
протокол N 3 от 11.10.01

Харьков НТУ "ХПИ" 2001

Методические указания к выполнению расчетно-графического задания по курсу"Теория вероятностей и математическая статистика для студентов специальностей "Информационно-измерительная техника", "Метрология, стандартизация и сертификация", "Радиофизика и электроника" / Сост. Е.В.Рогожкин. – Харьков: НТУ "ХПИ", 2001. - 16с.

Составитель Е.В.Рогожкин

Рецензент Д.Ф.Богданов, доц., канд.техн.наук

Кафедра радиоэлектроники

## ВВЕДЕНИЕ

Теория вероятностей - это наука, которая занимается изучением массовых случайных явлений. Основным понятием и предметом изучения в этой науке является вероятность события, которая представляет собой численную меру возможности появления этого события [1].

Математическая статистика ориентирована на сбор, обработку и описание данных опыта с целью выявления теоретических закономерностей, которым подчиняются случайные явления, и, следовательно, является источником и базой теории вероятностей.

Цель методических указаний к расчетному заданию – обучить студентов практическим навыкам обработки экспериментальных данных. В частности, предлагается провести анализ результатов измерений автокорреляционной функции стационарного случайного процесса, а именно - автокорреляционной функции флуктуационных шумов радиоприемного тракта.

## ТЕРМИНЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В процессе работы над расчетным заданием студенты должны усвоить суть основных терминов и определений, используемых в математической статистике и теории вероятностей.

Относительной частотой появления события W(A) или статистической вероятностью события P*(A) в данной серии опытов называется отношение числа опытов $m$, в которых событие произошло, к общему числу произведенных опытов $n$:

$$W(A) = P^*(A) = \frac{m}{n} \quad . \tag{1}$$

Случайной называют величину, зависящую от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены, и которая в результате испытания принимает одно и только одно возможное значение, наперед неизвестное. Вероятность появления того или иного значения определяется законом распределения случайной величины. Одной из наиболее важных числовых характеристик случайной величины является ее математическое ожидание.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины $X$ называется сумма произведений всех ее возможных значений $x_i$ на их вероятности $p_i$

$$M(x) = \sum_1^n x_i p_i \; . \tag{2}$$

Для непрерывной случайной величины

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \cdot dx \quad .$$

Возможны другие обозначения:

$$M(x) = M_x = m_x = m \,.$$

Среднее арифметическое дискретной случайной величины $X$ определяется как

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_i \quad ,$$

где $x_i$ –значения, которые случайная величина X принимала в конкретном эксперименте.

В зависимости от природы случайной величины ее среднеарифметические значения отличаются от математического ожидания в ту или иную сторону в большей или меньшей степени. Мерой разброса служит среднеквадратичное отклонение (СКО), квадрат которого называют дисперсией $D_x$:

$$(СКО)^2 = \sigma^2 = D_x = M[(x-m)^2] \qquad \text{– для дискретной величины;}$$

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 \cdot f(x) \cdot dx \qquad \text{– для непрерывной величины,}$$

где $f(x)$ – плотность распределения вероятностей.

Случайным процессом обычно называют случайную функцию, аргументом которой является время.

В радиофизике и радиолокации существует проблема выделения слабых сигналов на фоне флуктуационных помех. Складываются эти помехи из внешних шумов, которые определяются совокупностью излучения от большого числа источников внеземного происхождения, и шума, который является следствием флуктационных процессов в используемой электронной аппаратуре. Эти шумы являются наиболее характерным примером случайных функций.

Функция *x(t)* называется случайной, если ее значение при любом аргументе $t$ является случайной величиной. Понятие «случайная функция» является обобщением понятия случайной величины. Когда при анализе случайных функций оперируют и с обычными функциями (не случайными), то в этих случаях обычные функции принято называть детерминированными.

Реализацией случайной функции называют конкретный вид, который она принимает в результате опыта. Например, магнитофонная запись шума на выходе радиоприемника в отсутствие полезного сигнала. Если записи делать в разные интервалы времени, то реализации в деталях будут различны.

Сечением случайной функции *X(t)* называется мгновенное случайное значение, которое функция приняла в момент времени $t$. Мгновенное случайное значение принято обозначать как $x(t)$.

Случайная функция считается описанной полностью, если известны ее автокорреляционная функция и закон распределения, который определяет вероятность $p(x)$ того, что *X(t)* примет значение $x$.

Корреляционной или автокорреляционной функцией (АКФ) от случайной функции $x(t)$ с нулевым математическим ожиданием называется неслучайная функция двух аргументов $t$ и $t'$

$$R_x(t,t') = M[x(t)\cdot x(t')] \text{ .} \qquad (3)$$

Шумы радиоприемного тракта являются стационарным случайным процессом, для которого характерно, что независимо от текущего времени значение $R_x$ определяется лишь разностью

$$\tau = t - t' \quad ,$$

следовательно, АКФ случайного стационарного процесса является только функцией задержки

$$R_x(t,t') = R(\tau) \text{ .}$$

При $t = 0$ АКФ численно равна дисперсии

$$R(0) = D_x = \sigma^2 \text{ .}$$

Нормированная АКФ (коэффициент корреляции)

$$r(\tau) = \frac{1}{\sigma^2}\cdot R(\tau) \text{ .} \qquad (4)$$

Для стационарного случайного процесса характерно также, что его АКФ является затухающей функцией задержки. Значение задержки, начиная с которой значения АКФ на порядок (в некоторых случаях на два) меньше дисперсии, называют интервалом корреляции

$$R(\tau_{корр}) \le \frac{D_x}{10} \text{ .}$$

На практике время сеанса наблюдений ограничено и поэтому любые результаты измерений АКФ случайного процесса являются случайными, носят название оценок и помечаются значком *:

$$R^*(\tau),\ R^*(0),\ D^* \ \text{ .}$$

В тех случаях, когда из приведенного текста ясно, что речь идет об оценках, значок * может быть опущен.

## ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

1. Установление на основе данных опыта неизвестных законов распределения случайной величины.

2. Определение на основе опытных данных неизвестных параметров распределения.

3. Проверка статистических гипотез.

В частности, проверка статистических гипотез (т.е. предположений о законе распределения вероятностей появлений значений случайной величины) включает в себя сглаживание экспериментальных данных. При измерениях параметров случайных величин получают их оценки, при этом вносится статистическая погрешность, которая тем меньше, чем больше количество проведенных испытаний.

При обработке возникает вопрос подбора зависимостей, отражающих наиболее существенные черты экспериментального материала. Такая задача называется задачей выравнивания или сглаживания.

## ТЕРМИНЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Генеральная совокупность. Предположим, исследуется некий параметр. Например, отклонение в изготовлении элементов поверхности зеркальной антенны. Каждый из элементов такой антенны по размерам сопоставим с длиной волны, и для параболоида с диаметром раскрываю 100 м при длине волны 2 м их будет не менее 2500 тыс.

Совокупность всех без исключения N, полученных в испытаниях_ значений случайной величины (в нашем примере это отклонения от заданного размера) называется генеральной совокупностью. Число N называется объемом генеральной совокупности. Чтобы получить генеральную совокупность надо произвести замеры по всей поверхности. Только в этом случае может быть получена исчерпывающая информация.

Выборочная совокупность. На практике сплошных обследований обычно не делают. Чаще всего выбирают какую-то часть (или несколько частей). Отсюда появляется термин «выборочная совокупность». Ясно, что выборочная совокупность с объемом выборки $n$ $(n < N)$, дает менее доверительную информацию об исследуемом признаке.

Выбор будет тем более точным, чем меньше $n$ отличается от $N$.

Простой статистический ряд. Этот ряд представляет собой первичные статистические данные, и они могут быть оформлены в виде таблицы:

*Таблица 1*

| Порядковый номер измерения | Результат измерения |
|---|---|
| | |

Вариант подлежащих статистической обработке экспериментальных данных представлен в виде таблицы в приложении А. В заголовке таблицы дан номер варианта, время измерений, номер цикла измерений, продолжительность сеанса измерений, дата и шаг по задержке.

1. Данные (см. табл.1) представляют собой выборочную совокупность результатов измерений АКФ шума радиотракта в отсутствие полезного сигнала. В каждой строке даны результаты замера АКФ на конкретном участке радиолокационной развертки по дальности, шаг по дальности 6 км; а шаг по задержке - 40 мкс.

2. Необходимо выполнить следующее

2.1. Найти среднеарифметические значения оценок АКФ для всех значений задержек:

$$\overline{R}(\tau_k) = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} R_i(\tau_k), \; n = 20, \; \tau_k = 40 \cdot k, \; k = 0,1,2,...,9,$$

где $i$ – номер участка развертки, $n$ – усредняемое количество участков развертки дальности.

Найти оценки усредненного коэффициента корреляции

$$\overline{r}(\tau_k) = \frac{\overline{R}(\tau_k)}{\overline{R}(0)}, \; k = 0,1,2,...,9 \; .$$

Результаты свести в табл 2.

*Таблица 2*

| $\tau$, мкс | 0 | 40 | 80 | 120 | 160 | 200 | 240 | 280 | 320 | 360 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\overline{R}(\tau_k)$ | | | | | | | | | | |
| $\overline{r}(\tau_k)$ | | | | | | | | | | |
| $r_{\min}(\tau_k)$ | | | | | | | | | | |
| $r_{\max}(\tau_k)$ | | | | | | | | | | |

Построить график коэффициента корреляции, соблюдая масштаб – по оси Y 1см - 0.1 , по оси задержек 1см - 40 мкс. На рис.1 в качестве примера для выполнения графика приведен ожидаемый вид зависимости $\overline{r}(\tau)$:

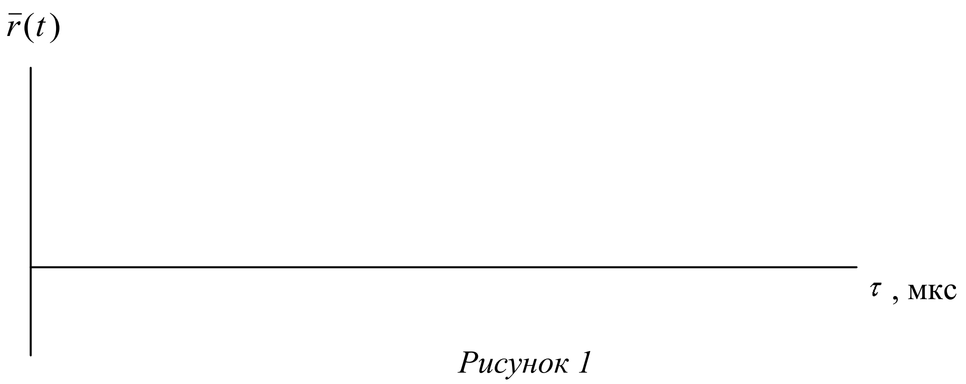



*Рисунок 1*

Чтобы иметь представление об эффекте, который дает усреднение, на этом же графике нанести оценки коэффициента корреляции для тех двух участков дальности, где R(0) принимает максимальное и минимальное значения.

2.2. Найти среднеквадратичное отклонение (СКО) для R(0):

– абсолютное значение (без учета смещения)

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum [R_i(0) - \overline{R}(0)]^2}{n}} = СКО\ ; \qquad i = 1,2,...,20\ ;$$

– нормированное (относительное) значение

$$\delta_0 = \frac{\delta}{\overline{R}(0)} \quad .$$

2.3. Используя отрезки прямых, построить график распределения относительных отклонений $\Delta_i$ (в %) по развертке дальности

$$\Delta_i = \frac{[R_i(0) - \overline{R}(0)]}{\overline{R}(0)} \quad ,$$

где $i = 1$ соответствует участку дальности 1265 км.

Обязательный масштаб:

- по оси X — 1 см соответствует 12 км;
- по оси Y — 1 см соответствует 2%.

Пример распределения приведен на рис.2.

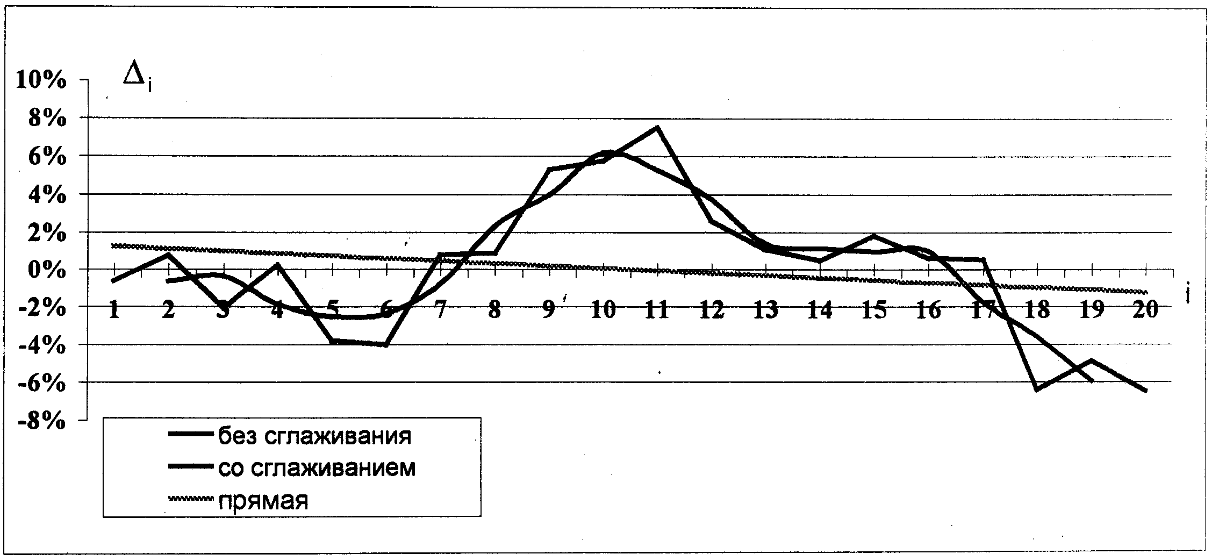



*Рисунок 2*

2.4. Провести сглаживание по формуле

$$\overline{\Delta}_{i+1} = \frac{\Delta_i + \Delta_{i+1} + \Delta_{i+2}}{3} \quad .$$

Результат сглаживания отобразить на рис.2 с использованием лекальных кривых.

2.5. Другой подход к сглаживанию экспериментальных данных заключается в предположении (гипотезе), что их изменение (по оси абсцисс) описывается некоторой функцией $\Delta(i)$, на которую накладывается случайная ошибка измерений, т.е.

$$\Delta_i = \Delta(i) + \delta_i \quad .$$

Предполагая, что закон изменения функции $\Delta(i)$ носит линейный характер, найти его параметры, используя результаты [1], полученные на основе метода наименьших квадратов для такого вида зависимости:

$$\Delta(i) = \frac{K}{D}(i - m_i)\,; \qquad i = 1,2,..,n\,;$$

$$D = \frac{\left(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right)}{n} - (m_i)^2;$$

$$K = \frac{\Delta_1 \cdot 1 + \Delta_2 \cdot 2 + \ldots + \Delta_n \cdot n}{n}\,;$$

$$m_i = \frac{(1 + 2 + 3 + \ldots + n)}{n}.$$

При $n = 20$ $\quad m_i = 10.5$, $\quad D = 33.25$.

Полученное уравнение прямой построить на рис.2

3. Предполагая (выдвигая гипотезу), что ошибка измерений $R(0)$ носит только случайный характер и имеет нормальный закон распределения, проверить это предположение. Для этого необходимо:

а) значения $\Delta_i$ нормировать на $\delta_0$

$$\Delta_{0i} = \frac{\Delta_i}{\delta_0}\,;$$

б) результаты расчетов значений $\Delta_{0i}$ свести в табл. 3 в порядке изменения от наибольшего отрицательного к наибольшему положительному отклонению: такая таблица представляет собой простой статистический ряд.

*Таблица 3*

| $i$ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta_{0i}$ | | | | | | | |

Для экспериментальных данных, представленных в таком виде применимы специальные таблицы (см., например, приложения в [1, 2]), которые рассчитаны для нормированного нормального закона распределения вероятностей:

$$f(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}.$$

В тех же приложениях приводятся значения интеграла

$$\Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}}\, dt = 0.5 + \Phi(x).$$

Используя указанные таблицы, можно найти вероятность нахождения величины $x$ на интервале $(a,b)$:

$$P(a \le x \le b) = \Phi^*(b) - \Phi^*(a).$$

С использованием сформированной таблицы определяется простая статистическая совокупность; для этого данные разбиваются на разряды, и подсчитывается частота появления случайной величины в каждом из разрядов.

Разбиение на разряды делается произвольно, в нашем случае рекомендуется использовать вариант табл. 4:

*Таблица 4*

| Разряд | -3,-2 | -2,-1 | -1,0 | 0,1 | 1,2 | 2,3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Частота | $n_1$ | $n_2$ | $n_3$ | $n_4$ | $n_5$ | $n_6$ |
| $p*$ | $\frac{n_1}{N}$ | $\frac{n_2}{N}$ | $\frac{n_3}{N}$ | $\frac{n_4}{N}$ | $\frac{n_5}{N}$ | $\frac{n_6}{N}$ |
| $p_{равн}$ | | | | | | |
| $p_{норм}$ | | | | | | |

в) результаты сопоставить с расчетами теоретических значений *p(x)* для двух законов распределения – равномерного и нормального, заполнив две нижние строки таблицы, считая, что для нормального закона в нормированном виде известно [1, 4]:

$$p(0,1) = 0.34;$$
$$p(0,2) = 0.48;$$
$$p(0,3) = 0.498.$$

3.1. Используя критерий согласия Пирсона и схему его применения, сделать заключение о соответствии (или несоответствии) закона распределения шума этим двум законам.

3.2. Найти доверительные границы величины $\overline{R}(0)$ для доверительной вероятности $\beta = 0{,}99$.

Выполненное расчетное задание должно содержать все упомянутые в методических указаниях графики и таблицы, а также результаты расчетов по пп. 2.1-2.5, 3.1, 3.2.

## Список литературы

1.Вентцель Е.С. Теория вероятностей – М. Наука, 1964 .
2.Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш. шк. 1972.
3.Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М. Высш. шк. 1979
4.Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории вероятностей - М.: Радио и связь, 1983.
5.Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. – М. Наука, 1987.

*Приложение А*

## Образец экспериментальных данных

500 11:58:39 $N = 300$ $T = 1.70$ min 03-20-1996 $t = 40$ $mks$

| Высота, км | Задержка, мкс | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 40 | 80 | 120 | 160 | 200 | 240 | 280 | 320 | 360 |
| 1289 | 7.966 | 3.503 | -0.505 | 0.107 | 0.374 | 0.060 | -0.134 | -0.109 | -0.082 | -0.122 |
| 1295 | 8.070 | 3.590 | -0.666 | -0.252 | 0.083 | -0.025 | -0.042 | -0.043 | -0.037 | -0.032 |
| 1300 | 8.124 | 3.515 | -0.666 | -0.258 | 0.170 | 0.043 | -0.086 | 0.014 | 0.191 | 0.146 |
| 1306 | 8.184 | 3.621 | -0.564 | -0.255 | 0.045 | -0.009 | -0.019 | 0.078 | 0.175 | 0.130 |
| 1312 | 8.060 | 3.555 | -0.762 | -0.086 | 0.064 | -0.056 | -0.101 | -0.046 | 0.089 | 0.155 |
| 1318 | 8.163 | 3.591 | -0.668 | -0.198 | 0.226 | -0.006 | -0.150 | 0.036 | 0.040 | -0.061 |
| 1324 | 8.204 | 3.763 | -0.558 | -0.107 | 0.272 | 0.064 | -0.084 | 0.056 | 0.242 | 0.063 |
| 1330 | 7.993 | 3.627 | -0.556 | -0.265 | 0.089 | 0.019 | -0.083 | 0.005 | 0.158 | 0.187 |
| 1335 | 7.967 | 3.586 | -0.481 | -0.129 | 0.042 | -0.156 | -0.162 | -0.128 | 0.099 | -0.066 |
| 1341 | 8.121 | 3.608 | -0.592 | -0.192 | 0.094 | -0.083 | -0.192 | -0.021 | -0.014 | -0.002 |
| 1347 | 8.122 | 3.666 | -0.562 | -0.296 | -0.013 | -0.041 | -0.089 | -0.027 | 0.027 | 0.072 |
| 1353 | 8.209 | 3.579 | -0.512 | 0.093 | 0.270 | 0.043 | -0.061 | -0.005 | 0.007 | -0.111 |
| 1359 | 7.942 | 3.526 | -0.580 | -0.020 | 0.363 | 0.181 | 0.030 | 0.022 | 0.029 | -0.122 |
| 1365 | 8.250 | 3.443 | -0.760 | -0.102 | 0.168 | -0.009 | -0.070 | -0.034 | 0.095 | 0.037 |
| 1370 | 8.149 | 3.740 | -0.576 | -0.166 | 0.150 | -0.048 | -0.067 | -0.033 | 0.031 | 0.036 |
| 1376 | 8.250 | 3.699 | -0.510 | -0.111 | 0.211 | 0.074 | -0.078 | 0.006 | -0.019 | -0.086 |
| 1382 | 7.845 | 3.631 | -0.529 | -0.141 | 0.103 | 0.053 | -0.054 | -0.049 | 0.071 | 0.066 |
| 1388 | 7.977 | 3.482 | -0.796 | -0.249 | 0.148 | 0.013 | -0.067 | -0.094 | 0.014 | -0.042 |
| 1394 | 7.601 | 3.627 | -0.464 | -0.240 | 0.086 | 0.101 | -0.029 | -0.032 | 0.058 | -0.031 |
| 1400 | 7.784 | 3.231 | -0.575 | -0.047 | 0.029 | -0.109 | -0.035 | -0.027 | 0.174 | 0.062 |

*Приложение Б*

## Рекомендации

к выполнению п. 3.1 расчетно-графического задания по курсу
"Теория вероятностей и математическая статистика"

Пусть в результате обработки получен частный случай распределения, который приведен в таблице:

| Разряд | -3, -2 | -2, -1 | -1, 0 | 0, 1 | 1, 2 | 2, 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Частота | 1 | 2 | 6 | 7 | 4 | 0 |
| p* | 0.05 | 0.10 | 0.30 | 0.35 | 0.20 | 0 |
| $p_{i\ равн}$ | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 |
| $p_{i\ норм}$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ | $p_5$ | $p_6$ |

Для равномерного закона вероятности попасть в заданные разряды одинаковы, поэтому все они равны $p_i$= 1/6 = 0.16(6). Для нормального закона в нормированном виде известны вероятности попадания случайной величины в указанные ниже интервалы значений [1, 4]:

P(0, 1) = 0.34;  P(0, 2) = 0.48;  P(0, 3) = 0.498;
P(0,-1) = 0.34;  P(0,-2) = 0.48;  P(0,-3) = 0.498.

По этим справочным данным находим вероятности попадания величины в конкретный разряд $p_1...p_6$ и подставляем в таблицу.

Используя формулу для расчета критерия согласия Пирсона (он также носит название "критерий хи-квадрат")

$$\chi^2 = \sum_1^k \frac{(p_i^* - p_i)^2}{p_i} \cdot n, \quad n = 20 \quad ,$$

находим его значение сначала для равномерного закона, затем - для нормального. Например, для приведенных в таблице данных эксперимента получим

для равномерного

$$\chi^2 = 20\sum_1^6 \frac{(p_i^* - p_i)^2}{p_i} = 11.823 \quad ,$$

для нормального

$$\chi^2 = 20\sum_1^6 \frac{(p_i^* - p_i)^2}{p_i} = 2.33 \quad .$$

Далее согласно схеме применения этого критерия делаются заключения о соответствии или несоответствии распределения шума этим двум законам. Для этого полученный результат сопоставляется с приведенной в [1] таблицей: **"Значения $\chi^2$ в зависимости от r и p"**, принимая, что число степеней свободы r = 3.

Если найденная по этой таблице вероятность менее 0.1 - рекомендуется проверить результаты расчетов. Если результат повторится, тогда появляются основания признать, что результаты эксперимента противоречат гипотезе и ее следует отвергнуть. В этом случае заключение выглядит следующим образом:

"Закон распределения не соответствует нормальному (равномерномерному) закону распределения".

Для других значений вероятности можно предложить такие формулировки:

p = 0.1 - 0.4.

"Закон распределения скорее не соответствует нормальному (равномерномерному) закону распределения"

p = 0.7 - 0.9 .

"Закон распределения шума соответствует нормальному (равномерномерному) закону распределения"

p = 0.6 - 0.7.

"Закон распределения достаточно хорошо соответствует нормальному (равномерномерному) закону распределения"

p = 0.6 - 0.5 (0.5 - 0.4).

"Закон распределения шума скорее соответствует (не соответствует), чем не соответствует (соответствует) нормальному (равномерномерному) закону распределения".

*Приложение В*

## Рекомендации

к выполнению п. 3.2 расчетно-графического задания по курсу
"Теория вероятностей и математическая статистика"

Найденное в п. 2.1 среднеарифметическое значение R(0) является величиной случайной, так как для этого было использовано достаточно ограниченное количество (n=20) замеров величины R(0). Полученное значение R(0) в математической статистике называют *оценкой,* подчеркивая тот факт, что это значение является приближенным. Чтобы получить представление о точности и надежности оценки в математической статистике, пользуются понятиями **доверительного интервала и доверительной вероятности.**

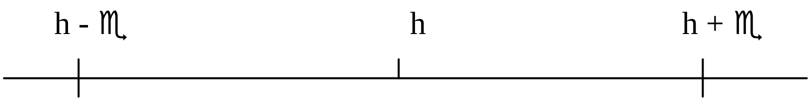
Представим, что в статистических расчетах получена оценка некоторого параметра h. Назначается достаточно высокая вероятность (например, $\beta$= 0,8 ...0,99), чтобы считать практически достоверным событие, суть которого можно определить таким образом: "найденное значение (оценка) параметра отличается от истинного значения не более, чем на ♏", то есть:

$$P(|h - h^*| \le \text{♏}) = \beta \quad ,$$

где h - истинное значение параметра, h* - значение (оценка) параметра, полученная при эксперименте.

Говорят: "с вероятностью $\beta$ неизвестное истинное значение параметра попадает в интервал:

$$I_в = (h - \text{♏},\ h + \text{♏}\ ) ,$$




то есть истинное значение параметра с вероятностью $\beta$ будет накрыто этим интервалом. Чем выше назначенная вероятность, тем будет шире интервал. Интервал тем уже, чем меньше дисперсия (разброс) полученной оценки.

Обозначения: $\beta$ - доверительная вероятность,

$I_\beta$ - доверительный интервал,

$h_1 = h - \text{♏}$, $h_2 = h + \text{♏}$ - доверительные границы.

Доверительный интервал рассматривают как интервал значений искомого параметра, не противоречащих опытным данным.

### Приближенные вычисления доверительных границ

Как правило, закон распределения оценки параметра заранее неизвестен, поэтому при приближенных вычислениях:

<u>*- закон распределения параметра принимают как нормальный (гауссов);*</u>

<u>*- полученную в результате эксперимента оценку параметра (ее называют точечной) принимают равной ее истинному значению.*</u>

Дальнейшие действия рассмотрим на примере расчета доверительных границ для математического ожидания.

Пример: Требуется найти доверительный интервал $I_\beta$, соответствующий доверительной вероятности β для оценки математического ожидания величины R(0). Имеем:

1. по п. 2.1 по п. 2.2

$$\overline{R}(0)=\frac{1}{n}\sum_{1}^{n=20}R_i(0), \qquad \sigma=\sqrt{\sum_{1}^{n}[R_i(0)-\overline{R}(o)]^2/n}=СКО\ .$$

2. Найденное без учета смещения среднеквадратичное отклонение (СКО) для R(0) корректируем с учетом смещения

♦к = ♦ ⌡[n/(n-1)] .

3. Известно, что математическое ожидание среднеарифметического случайной величины равно математическому ожиданию самой величины, а среднеквадратическое отклонение в ⌡n раз меньше, отсюда

♦ [R(0)] = ♦ к / ⌡n = СКО/⌡(n –1) .

4. Так как принято закон распределения считать нормальным, то границы доверительного интервала находим с использованием таблиц, заранее рассчитанных для наиболее употребимых значений доверительных вероятностей.

Таблица для простых оценок доверительных интервалов

| ♌ | .8 | .9 | .95 | .97 | .99 | .9973 | .999 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ♍ | 1.282 | 1.643 | 1.96 | 2.169 | 2.58 | 3.000 | 3.29 |

Тогда

♏ (♌) = x ♦ $\overline{[}$R(0)] ,

Iв = ( R$(\bar{0})$ - ♏ (♌), $\overline{R}$(0) + ♏ (♌) .

В сокращенной записи это выглядит так:

M[R$(\bar{0})$] = $\overline{R}$(0) ⌖ ♏ .

Учебное издание

# Методические указания
к выполнению расчетно-графического задания
по курсу
"Теория вероятностей и математическая статистика"
для студентов специальностей
"Информационно-измерительная техника",
"Метрология, стандартизация и сертификация",
"Радиофизика и электроника"

Составитель Рогожкин Евгений Васильевич

Ответственный за выпуск А.М. Капустян
Работу рекомендовал к изданию А.И. Рогачев

Редактор О.И. Шпилева

Свидетельство о регистрации ДК N 116 от 07.10. 2000 г.

План 2001 г.,  поз 233/

Подп. к печати  .  .  . Формат  60х84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Гарнитура Таймс . Печать - ризография.
Усл. печ.л. 0,7. Уч.-изд. л. 0,8. Тираж 100 экз. Зак. N
Цена договорная.

Издательский центр НТУ "ХПИ" 61002, Харьков , ул Фрунзе, 21

Типография НТУ "ХПИ"

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
"ХАРЬКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ"

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
# К ВЫПОЛНЕНИЮ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОГО ЗАДАНИЯ
# ПО КУРСУ
## "Теория вероятностей и математическая статистика"

ХАРЬКОВ 2001

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ**

**НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**"ХАРЬКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ"**

В печать разрешаю

проф. Товажнянский Л.Л.

В свет разрешаю

проф. Товажнянский Л.Л.

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
# К ВЫПОЛНЕНИЮ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОГО ЗАДАНИЯ
# ПО КУРСУ
## "Теория вероятностей и математическая статистика"

ХАРЬКОВ 2001