Лекция 3

План лекции

1.7.3 Теорема сложения

Теорема: Вероятность суммы (любых) двух событий равна сумме вероятностей каждого за вычетом вероятности их совместного появления

P(A+B) = P(A) + P(B) – P(A·B).

***Доказательство*:**

Представим событие A+B как сумму несовместных событий:

$$A+B=A\cdot\overline{B}+B\cdot\overline{A}+A\cdot B.$$

Используем аксиому о вероятности суммы несовместных событий

$$P(A+B)=P(A\cdot\overline{B})+P(B\cdot\overline{A})+P(A\cdot B)$$

Далее применяем теорему умножения: ***P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B)***

$$P(A+B)=P(A)P(\overline{B}/A)+P(B)P(\overline{A}/B)+P(A\cdot B)$$

Согласно следствию из аксиомы 4 можно переписать

$$\boxed{P(\overline{A})=1-P(A)}$$

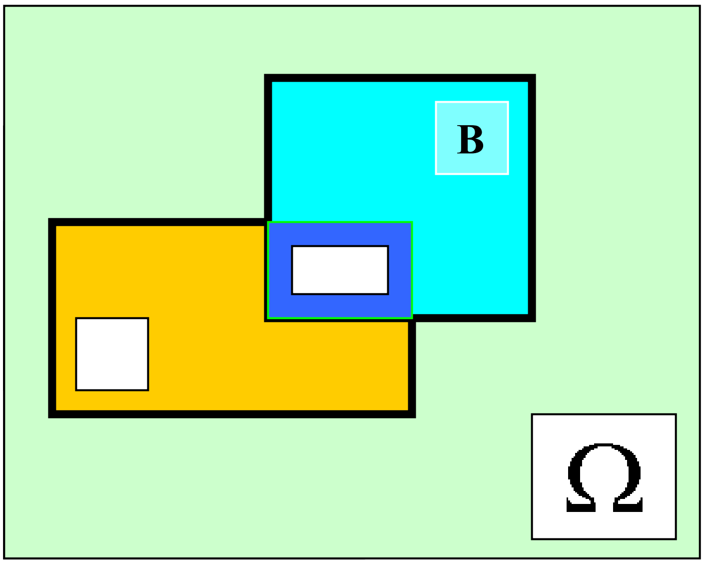
$$P(A+B)=P(A)[1-P(B/A)]+P(B)[1-P(A/B)]+P(A\cdot B)$$

Далее

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B/A)-P(B)P(A/B)]+P(AB)=$$

$$=P(A)+P(B)-2P(AB)+P(AB)$$

Тот же результат можно получить, используя геометрическое толкование вероятности события.



$$\mathbf{P(A+B)=\frac{S_{A+B}}{S_\Omega}=\frac{S_A+S_B-S_{AB}}{S_\Omega}}$$

Пример

Прозводится залп из двух орудий. Найти вероятность P(C) поражения цели, если события A и B - соответственно попадание первым и вторым орудием- независимые события

C = (A + B), P(A)= 0.7, P(B) = 0.8

Подставляя получим *P(A+B) = 0.7 + 0.8 - 0.56 = 0.94*

Тот же ответ мы получим , если используем следствие 1 , вытекающее из аксиомы 4

$$P(A+B)=1-P(\overline{A+B})=1-P(\overline{A})P(\overline{B})= 1-0.3\cdot 0.2=0.94$$

Частные случаи теоремы сложения

а) несовместные события AB = V , P(AB)=0 P(A+B) = P(A) + P(B)

б) совместные события

* зависимые события P(B)-P(B/A) , P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B/A)

** независимые события P(B)=P(B/A)

Выражение для суммы трех событий получим, используя правила из алгебры событий.

P(A+B+C) = P[(A+B)+C] = P(A+B) + P(C) – P(AC+BC) =

= P(A) +P(B) – P(AB) + P(C) - [P(AC) + P(BC) - P(AC.BC)] =
= P(A) +P(B) + P(C) - P(AC) - P(AB) -P(BC) + P(ABC).

Выражение для суммы n событий находится обобщением полученных результатов:

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{C_n^2}P(A_iA_j)+\sum_{C_n^3}P(A_iA_jA_k)-\ldots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\ldots A_n)$$

Частный случай: события независимы и $P(A_i) = p$;

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=np-C_n^2p^2+C_n^3p^3+\ldots+p^n(-1)^{n-1}.$$

Пример1:

Радиопередатчик выходит в эфир, в течение короткого промежутка времени передает сообщение и выключается. Для контроля эфира используется 4 независимых идентичных радиоприемных пунктов. Какова вероятность обнаружения работающего передатчика при работе всех

радиоприемных пунктов (событие А) , если вероятность обнаружения на одном p=0,9 ?

$$P(A) = np - C_n^2 p^2 + C_n^3 p^3 + \ldots + p^n (-1)^{n-1} = 4p - C_4^2 p^2 + C_4^3 p^3 - p^4 =$$

$- 6p^2 = 4p + 4p^3 - p^4 =$

Какой должна быть вероятность обнаружения на одном приемном пункте, чтобы все вместе они обеспечивали вероятность обнаружения 0.9999

$P(A_i) = ?$

1.7.4 Теорема о вероятности появления хотя бы одного из независимых событий

Пусть событие А есть сумма событий $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$, где все события независимы. Тогда

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A}_n).$$

Теорема: Вероятность появления хоты бы одного из независимых событий равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий.

***Доказательство*:** Предварительно покажем, что

$$\overline{A_1 + A_2 + \ldots + A_n} = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n;$$

Как следует из алгебры событий

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}; \qquad \overline{A + (B + C)} = \overline{A} \cdot \overline{(B + C)} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}.$$

Событие А, равносильное наступлению хотя бы одного из независимых событий $A_1, A_2, \ldots A_n$, соответствует по определению их сумме $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$.

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1;$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = P(A) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A}_n).$$

Частный случай, который соответствует условиям задачи:

$$P(A_i) = p; \quad P(\overline{A}_i) = 1 - p = q \quad P(A) = 1 - q^n.$$

Применительно к условиям задачи об обнаружении работы передатчика получим

$0{,}9999 = 1 - (1-p)^4 = 1 - q^4$; $q^4 = 0{,}0001$; $q = 0{,}1$; $p = 1 - q = 0{,}9$.

Пример 2:

Вероятность поражения самолета одной ракетой равна р. Найти вероятность поражения при одновременном пуске трех ракет, считая, что поражение цели любой из ракет есть независимые события .

Два варианта решения

1. P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C) - P(AB)-P(AC)-P(BC) + P(ABC)

2. $P(A+B+C) = 3p - 3p^2 + p^3$

$P(A+B+C) = 1 - q^n = 1 - q^3 = 1 - (1-p)^3$

До сих пор мы рассматривали свойства вероятностей сумм и произведений событий. На практике появление или не появление интересующего нас события может быть связано с несколькими взаимно исключающими условиями.

1.7.5 Формула полной вероятности

Пусть событие A может происходить с одним из событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$. Эти события составляют полную группу несовместных событий. Вероятности появления каждого из них известны:

$$P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n).$$

Поскольку неизвестно, с каким из событий H_i появилось событие A, то эти события называются гипотезами. Условные вероятности появления события A - $P(A/H_i)$ – известны.

Теорема: Вероятность события A, которое может наступить при появлении одного из полной группы несовместных событий – гипотез равна сумме произведений вероятностей каждой из этих гипотез на соответствующую условную вероятность события A

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i).$$

Доказательство: $A = AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n$ - несовместны;

$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + \ldots + P(H_n)P(A/H_n)$.

Пример: В урне находится два шара, и в неё бросают белый шар. Затем наугад извлекают один шар. Найти вероятность извлечения белого шара (событие A), считая равновозможными следующие гипотезы:

H_1 – в урне два белых, H_2 – в урне два черных, H_3 – в урне черный и белый шары, $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3$.

Условные вероятности :

$P(A/H_1) = 1$, $P(A/H_2) = 1/3$, $P(A/H_3) = 2/3$

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

Проверка : $P(B) = \frac{1}{3}\left(0 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$, B - извлечен черный шар.