Лекция 7

План лекции

2.4.3 Моменты случайных величин

Моменты случайных величин используются для описания свойств функций распределения вероятностей. В механике моменты используются для описания распределения масс. Есть много общего в описаниях распределения плотности вещества вдоль прямой и плотности распределения вероятностей.

В теории вероятностей используют два типа моментов случайной величины: начальный и центральный.

Начальным моментом порядка k случайной величины X называют математическое ожидание случайной величины X^k:

$$\alpha_k = M\left[X^k\right] = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p(x_i) \text{ - для дискретной случайной величины;}$$

$$\alpha_k = M\left[X^k\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\,dx \text{ - для непрерывной случайной величины.}$$

Отсюда следует, что математическое ожидание есть начальный момент 1-го порядка случайной величины : $m_x = \alpha_1$.

Центральным моментом порядка k случайной величины X называют математическое ожидание центрированной случайной величины $(X - m)^k$:

$$\mu_k = M\left[(X - m_x)^k\right] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^k \cdot p(x_i) \text{ - для дискретной случайной величины;}$$

$$\mu_k = M\left[(X - m_x)^k\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k f(X)\,dx \text{ - для непрерывной случайной величины.}$$

Таким образом, дисперсия $D_x = \mu_2$ - это центральный момент второго порядка случайной величины X или начальный момент второго порядка центрированной случайной величины $\overset{\circ}{X} = X - m_x$. Наиболее употребимы следующие моменты:

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = M[X], \ \alpha_2 = M[X^2], \ \alpha_3 = M[X^3];$$

$$\mu_0 = 1, \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = D[X], \quad \mu_3 = M[(X-m)^3].$$

2.5 Математическое ожидание и дисперсия основных законов распределений случайной величины

Закон распределения случайной непрерывной величины определяется ее природой и следовало бы ожидать существование множества функций, описывающих плотность распределения вероятностей. Однако, несмотря на весьма большое разнообразие физических причин, определяющих поведение случайных величин, кривые распределений описываются значительно меньшим набором законов. Наиболее часто встречаются такие законы распределения вероятностей :

равномерное ;
биноминальное ;
пуассоновское ;
показательное;
нормальное .

2.5.1 Закон равномерного распределения

Пусть случайная величина X может принимать любые значения в пределах отрезка $\longleftrightarrow a\,b$. Закон распределения называется равномерным, если

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b; \\ 0, & a > x > b. \end{cases}$$

Найдём математическое ожидание

$$\mathbf{M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_{a}^{b} \frac{x}{b-a}xdx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{b^2-a^2}{2}\right] = \frac{b+a}{2}}.$$

Математическое ожидание случайной величины, равномерно распределенной на отрезке $(a\,b)$, равняется середине этого отрезка.

Дисперсия:

$$D(X) = M(X^2) - m_x^2 = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 dx - m_x^2 = \frac{1}{3(b-a)}(b^3 - a^3) - \frac{1}{4}(a+b)^2 =$$

$$= \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{b^2+ab+a^2}{12} = \frac{(a-b)^2}{12} = \frac{\Delta^2}{12}$$

Величина $\frac{\Delta^2}{12}$ называется поправкой Шеппарда.

Пример: При использовании стрелочных измерительных приборов его показания округляют до ближайшего целого деления. Ошибка, которая при этом возникает, имеет равномерное распределение плотности вероятности. Аналого-цифровые преобразователи (АЦП), которые в настоящее время широко используются , имеют тот же самый закон распределения ошибки.

Если b-a=D это шаг квантования АЦП, то $D^2/12$ - поправка Шеппарда

2.5.2 Биноминальный закон распределения

Дискретная случайная величина X =(0,1,2,…,n) распределена по биноминальному закону, если

$$p(x_i) = p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad , \quad k = 0,1,2,\ldots,n$$

Теорема: Математическое ожидание для биноминального распределения с параметрами n и p равняется np

$$M[X] = np\,,\ X = (1,2,\ \ldots,\ n),$$

где $\mathbf{x_i}$ - значение k в формуле для биноминального закона распределения.

Доказательство:

$$\mathbf{M[X]} = \sum_{\mathbf{k=o}}^{\mathbf{n}} \mathbf{x_i p(x_i)} = \sum_{\mathbf{k=o}}^{\mathbf{n}} \mathbf{k \cdot p(k)} = 0 + 1 \cdot \mathbf{C_n^1 pq^{n-1}} + 2 \cdot \mathbf{C_n^2 p^2 q^{n-2}} + 3\mathbf{C_n^3 p^3 q^{n-3}} + \ldots + \mathbf{np^n} =$$

$$= np(q^{n-1} + 2\frac{(n-1)}{1 \cdot 2}pq^{n-1} + 3 \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}p^2 q^{n-2} + \ldots + p^{n-1}) = np(q+p)^{n-1}$$

В то же время биноминальное распределение описывает распределение числа положительных исходов при независимых повторных испытаниях, и тогда доказательство теоремы и ее формулировку можно сделать иначе

Математическое ожидание числа появления события А в **n** независимых повторных испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытании.

Доказательство

Число наступлений события А в n независимых испытаниях есть сумма:

$$\mathbf{X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n}$$

$$\mathbf{M[X] = \ldots M[X_1] + M[X_2] + + M[X_n]}$$

Закон распределения для каждой из $\mathbf{X}_i$ соответствует таблице

$\mathbf{X_i}$	**1**	**0**
P	**p**	**q**

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} M(X_i)=nM(X_i)=np\,; \quad \text{так как} \quad M(X_i)=1\cdot p+0\cdot q=p\,.$$

<u>Теорема:</u> Дисперсия для биноминального распределения с параметрами n и p равняется npq

$$D(X)=npq\,.$$

или

Дисперсия числа положительных исходов при независимых повторных испытаниях, в котором событие A появляется с вероятностью p, равно произведению количества испытаний n на вероятности их появления и непоявления.

$$D(X)=npq$$

Доказательство:

$$X=X_1+X_2+\ldots+X_n\,; \qquad \mathbf{X_i}=\{1,0\};$$

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n} D(X_i)=nD(X_i)=npq\,,$$

так как $\quad D(X)=M[X^2]-m_x^2 \qquad D(X_i)=(1^2\cdot p+0^2\cdot q)-p^2=p-p^2=p(1-p)=pq$

.