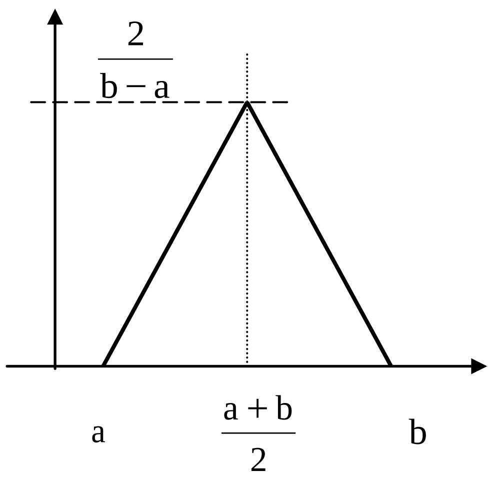
Лекция 9

План лекции

2.5.6. **Распределение Симпсона (треугольное распределение)**

Случайная величина распределена по треугольному распределению, если

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{b-a}\left[1 - \dfrac{|a+b+2x|}{b-a}\right], & \text{при} \quad a \le x \le b; \\ 0, & \text{при} \quad b < x < a. \end{cases}$$



Такое распределение наблюдается тогда, когда суммируются две или вычитаются две случайные величины, которые имеют равномерный закон распределения.

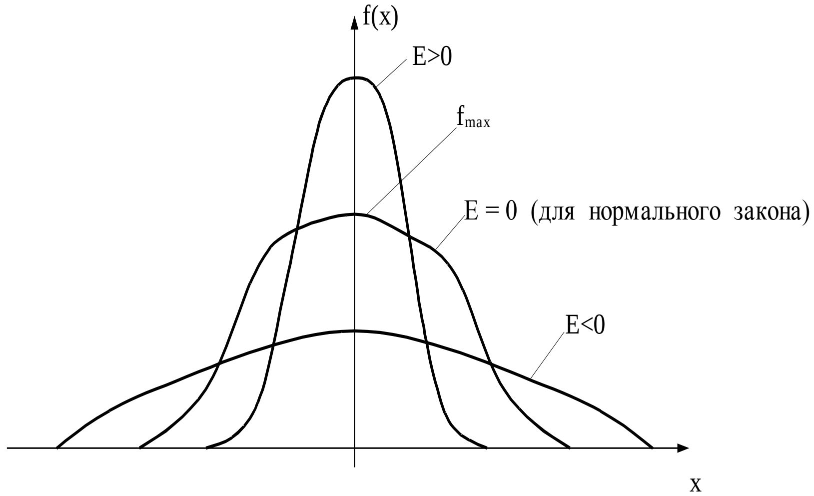
$$m_x = \frac{a+b}{2}; \qquad D_x = \frac{(b-a)^2}{24}.$$

2.6. Эксцесс и асимметрия

Эксцессом называется численная характеристика случайной величины, которая определяется выражением:

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 \quad ; \qquad \mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^k f(x)\,dx$$

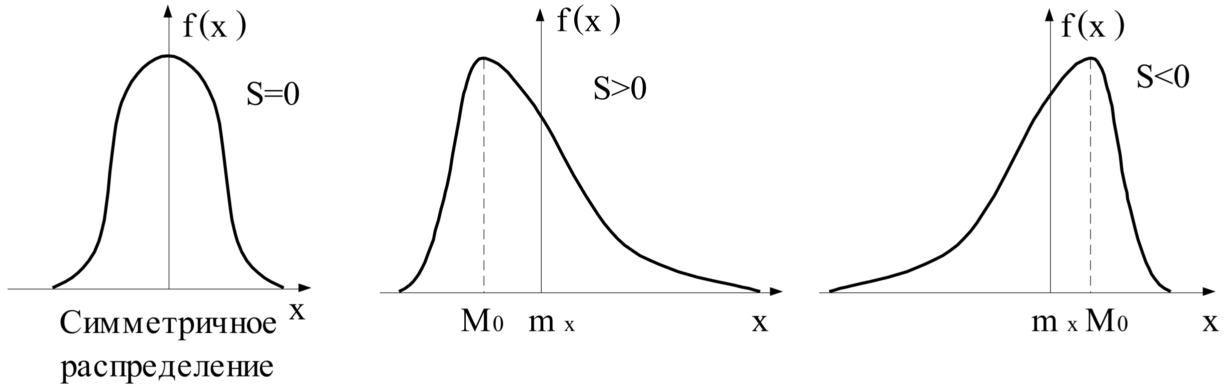
Для нормального закона $\mu_4 / \sigma^4 = 3$. Отсюда следует, что для нормального закона $E = 0$. Смысл термина «эксцесс» состоит в том, что он показывает, как быстро уменьшается плотность распределения вблизи её максимального значения.



Асимметрией, или коэффициентом асимметрии, называется числовая характеристика, определяемая выражением:

$$S = \mu_3 / \sigma^3 .$$

Для всех без исключения симметричных распределений нечётные центральные моменты равны 0, поэтому и коэффициент асимметрии S для симметричных распределений также равен нулю.



2.7 Теорема Ляпунова и её следствия

Если сумма $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ представлена независимыми случайными величинами, то при $n \to \infty$ интегральная функция распределения суммы определяется соотношением:

$$P\left(\frac{X - A_n}{\sqrt{B_n}} < x\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt ,$$

где A_n и B_n - мат. ожидание и дисперсия суммы. При этом третий начальный момент суммы $C_n \to 0$, а третьи начальные моменты каждого слагаемого имеют конечное значение.

Следствие: Если случайная величина X представлена суммой очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на сумму ничтожно мало, то X имеет распределение, близкое к нормальному.

3. СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН (СЛУЧАЙНЫЕ ВЕКТОРЫ)

Мы рассматривали случайные одномерные величины, которые можно отобразить точкой на числовой оси. Этой величине ставилась в соответствие то, что мы называли вероятностью появления возможного значения случайной величины.

Но кроме одномерных существуют и другие величины, которые для своего полного описания требуют большего набора переменных. Например, чтобы отобразить положение точки на плоскости, или положение точки в пространстве. Соответственно потребуются двух- и трехмерные величины . Их называют векторами или системами случайных величин. Существуют и N-мерные величины, и их по аналогии называют N-мерными векторами или N-мерными системами.

Принято для двумерной системы использовать обозначение (X,Y), трехмерной - (X,Y,Z), N- мерной - (X_1, X_2, ... X_n).

Каждую из величин X,Y,Z называют составляющими системы. Если составляющие дискретны , то система называется дискретной ; если составляющие непрерывны , то система называется непрерывной.

Отметим, что по одному из определений система – это целое, состоящее из частей, связанных единой функцией.

3.1 Закон распределения вероятностей дискретной двумерной системы.

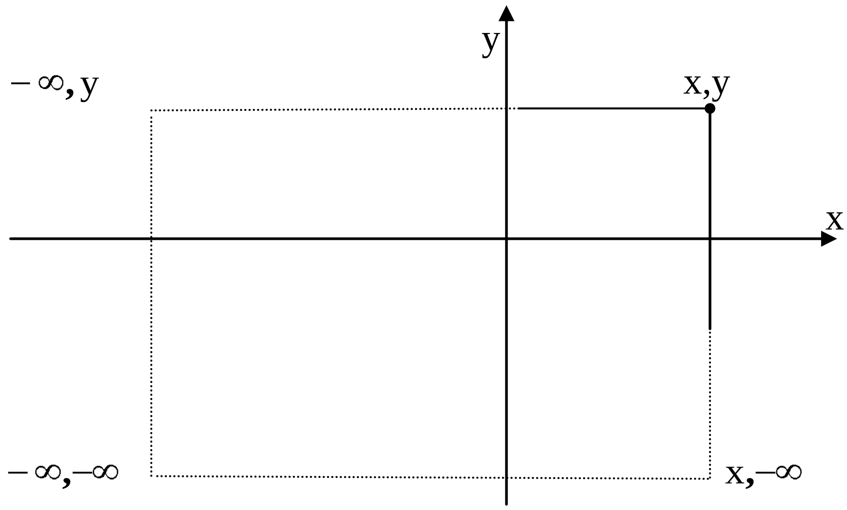
Закон распределения такой системы может быть задан таблицей возможных значений составляющих и вероятностей их совместного появления.

	x_1	x_2	…	x_n
y_1	p_{11}	p_{21}	…	p_{n1}
y_2	p_{12}	p_{22}	…	p_{n2}
:	:	:	:	:
y_{mn}	p_{1n}	p_{2n}	…	p_{nm}

Сумма элементов таблицы равна 1. Сумма элементов строки y_i равняется $p(y_i)$. Сумма элементов в столбце x_i равняется $p(x_i)$.

3.2 Интегральная функция распределения двумерной случайной величины

Интегральной функцией распределения двумерной случайной величины (X,Y) называют функцию F(x,y), определяющую для каждой пары чисел x,y вероятность того, что X примет значения меньше , чем x, а Y меньше y. В геометрической интерпретации функция F(x,y) определяет вероятность попадания случайной величины (X,Y) в полубесконечный прямоугольник с вершиной x,y.



Полубесконечный прямоугольник

3.2.1. Свойства функции $F(x,y)$

1) Значение интегральной функции $F(x,y)$ удовлетворяет двойному неравенству $0 \le F(x,y) \le 1$.

2) Функция $F(x,y)$ есть неубывающая функция по каждому аргументу

$$F(x_2,y) > F(x_1,y), \quad x_2 > x_1;$$

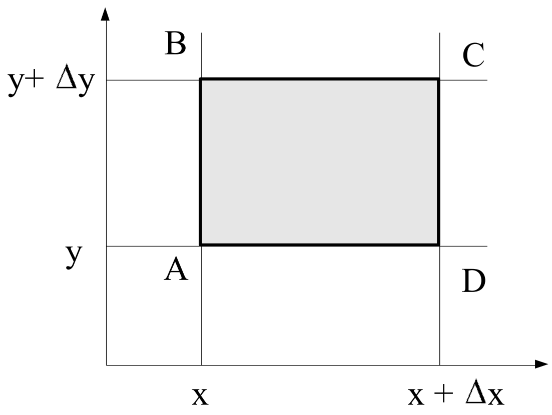
$$F(x,y_2) > F(x,y_1), \quad y_2 > y_1.$$

3) $F(-\infty,y)=0$, т.к. событие $x<-\infty$ - событие невозможное;
$F(x,-\infty)=0$, т.к. событие $y<-\infty$ - событие невозможное;
$F(-\infty,-\infty)=0$; $F(\infty,\infty)=1$.

При $y=\infty$ функция $F(x,y)$ становится функцией только одного аргумента, а именно x. При $x=\infty$ функция $F(x,y)$ становится функцией только аргумента y.

3.2Дифференциальная функция распределения непрерывной двумерной случайной системы (двумерная плотность вероятности)

Плотностью распределения вероятности двумерной системы называется предел отношения вероятности попадания этой случайной величины в бесконечно малый прямоугольник $\Delta x\ \Delta y$ к площади этого прямоугольника.



Обозначим P(A) – вероятность появления значений функции (X,Y) в полубесконечном прямоугольнике с вершиной x,y . Согласно определения

$$P(A) = F(x,y).$$

Соответственно

$$P(B) = F(x, y+\Delta y);$$
$$P(C) = F(x+\Delta x, y+\Delta y);$$
$$P(D) = F(x+\Delta x, y).$$

Найдём вероятность $P(ABCD)$ попадания двумерной случайной величины (X,Y) в прямоугольник ABCD, считая, что Δx , $\Delta y \to 0$

$$P(ABCD) = P(C) - P(B) - P(D) + P(A) = -\left[F(x,y) + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\Delta y\right] - \left[F(x,y) + \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\Delta x\right] + F(x,y) +$$

$$+\left\{\left[F(x,y) + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[F(x,y) + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y\right]\cdot\Delta x\right\} = -\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\cdot\partial y}\Delta x\,\Delta y =$$

$$= \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y}\Delta x\,\Delta y\ . \qquad f(X,Y) = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{P(ABCD)}{\Delta x\,\Delta y} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y}$$

Таким образом,

Дифференциальной функцией двумерной непрерывной случайной величины называют вторую смешанную производную от интегральной функции