Лекция 10

План лекции

3.3.1 Свойства дифференциальная функции f(x,y)
3.4 Плотности распределения составляющих системы
3.4.1 Условные распределения
3.5 Зависимые и независимые системы

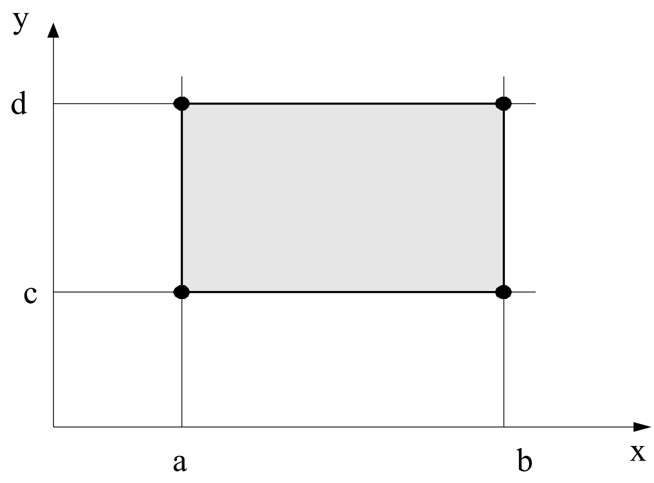
3.3.1. Свойства дифференциальной функции $f(x,y)$

$f(x,y)\cdot dxdy$ - элемент вероятности для случайной двумерной величины.

1. Попадание случайной величины (X,Y) в некоторую область D определяется вероятностью

$$P((X,Y)\in D)=\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy.$$

1′. Если область D - прямоугольник, то $P((X,Y)\in D)=\int\limits_a^b\int\limits_c^d f(x,y)\,dx\,dy$.



2) Для полубесконечного прямоугольника $F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dx\,dy$.

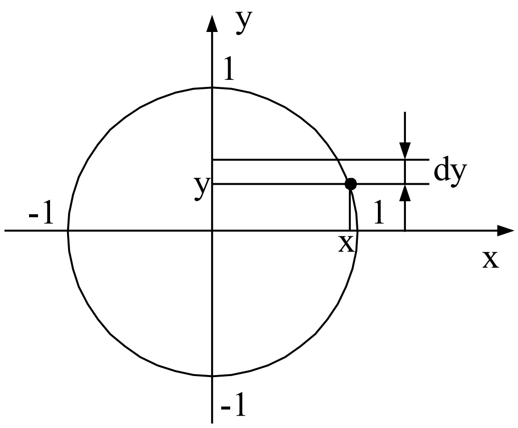
3) Плотность вероятности $f(x,y)\ge 0$.

4) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy=1$.

Пример: Выражение для дифференциальной функции имеет вид:

$$f(x,y)=\begin{cases} C, & x^2+y^2\le 1 \\ 0, & x^2+y^2>1 \end{cases};\qquad C=?$$

$$S=\pi r^2=\pi;\qquad \iint\limits_s C\,dx\,dy=1;\qquad C\cdot\pi=1\Rightarrow C=\frac{1}{\pi}.$$



$$4\int_0^1\int_0^1 C\,dx\,dy\,; \qquad x^2+y^2=1; \qquad x=\sqrt{1-y^2}\,;$$

$$\int_0^{\sqrt{1-y^2}} C dx = Cx\Big|_0^{\sqrt{1-y^2}} = C\sqrt{1-y^2}\,.$$

$$4C\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,dy = 4C\frac{1}{2}\left(y\sqrt{1-y^2}+\arcsin y\right)\Big|_0^1 = 4C\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \pi C\,.$$

3.4. Законы распределения составляющих системы

$F_1(x)$, $F_2(y)$ - интегральные функции составляющих;
$f_1(x)$, $f_2(y)$- дифференциальные функции составляющих;

Для дискретной двумерной системы эти функции могут быть определены из таблицы:

	x_1	x_2	x_3	…	x_n
y_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	…	p_{1n}
y_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	…	p_{2n}
y_3	p_{31}	p_{32}	p_{33}	…	p_{3n}
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
y_m	p_{m1}	p_{m2}	p_{m3}	…	p_{mn}

Если просуммировать все вероятности в строке y_1, то мы найдем вероятность того, что $Y < y_2$, то есть найдем $F_2(y_2)$;

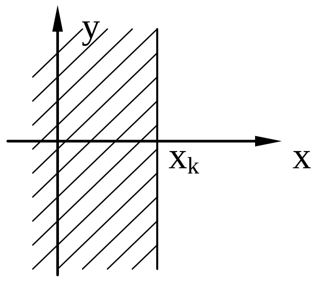
если суммировать все вероятности в строках y_1 и y_2, то мы найдем вероятность того, что $Y < y_3$, то есть найдем $F_2(y_3)$ и т.д. Аналогично, при суммировании по столбцам мы найдем значения интегральной функции $F_1(x_2)$, $F_1(x_3)$, …,$F_1(x_n)$.

Отсюда и вероятность появления y_1 (или y_j) - это сумма всех элементов первой (или j [-ой]) строки ;

Вероятность   появления x_1 (или x_i) - это сумма всех вероятностей первого (или i $^{\text{-ого}}$) столбца .

Для непрерывной системы имеем:

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dx\,dy \;;$$



$$F_1(x)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy\;;$$

$$F_2(y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy\;.$$

Если фиксировать значение x (например, $x=x_k$) и интегрировать в бесконечных пределах по y (см. рис.), то результат $F_1(x_k)$, означает вероятность того, что при испытаниях составляющая X не превзойдёт значение x_k.

Если фиксировать значение $y=y_k$ и интегрировать по x, то результат $F_2(y_k)$ будет означать вероятность того, что составляющая Y не превзойдёт значение y_k.

Дифференциальная функция составляющей X - $f_1(x)$ - равна интегралу с бесконечными пределами от дифференциальной функции системы f(x,y), в которой переменной интегрирования является составляющая Y

$$f(x)=F'(x) \text{ - для случайной одномерной величины;}$$

$$f_1(x)=\frac{dF_1(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)\,dx\cdot dy=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy\,;$$

аналогично $f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,.$

3.4.1 Условные распределения

Известно, что для случайных событий условная вероятность

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)};\qquad\qquad P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Дискретная двумерная система

Условным распределением составляющей $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ при условии, что составляющая Y приняла значение y_i , называется совокупность условных распределений

$$P(X/y_j)=(p_{1j},\ p_{2j},\ .\ .\ .\ ,p_{nj}) ,\ \text{где}\ \ p_{nj}=p(x_n/y_j)\ \ j=1,2,\ldots,m$$

$$P(Y/x_i) = (p_{1i}, p_{2i}, \ldots, p_{mi}), \text{ где } p_{mi} = p(y_m/x_i) \quad i = 1,2,\ldots,n$$

Пример: Закон распределения дискретной двумерной системы задан таблицей:

$$P(y/x_1) = \left(\frac{0,1}{0,16}; \frac{0,04}{0,16}; \frac{0,02}{0,16} \right)$$

Условные вероятности

y \ x	x_1	x_2	x_3		
y_1	0.1	0.2	0.3	0.6	$p(y_1)$
y_2	0.04	0.12	0.1	0.26	$p(y_2)$
y_3	0.02	0.06	0.06	0.14	$p(y_3)$
	0.16	0.38	0.46		
P(X)	$p(x_1)$	$p(x_2)$	$p(x_3)$		P(Y)

Непрерывная двумерная система

Пусть (X, Y) - непрерывная двумерная система случайных величин. Условной дифференциальной функцией составляющей X при заданном значении y называется отношение дифференциальной функции системы $f(x, y)$ к дифференциальной функции составляющей Y

$$\varphi_1(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}; \qquad \varphi_2(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)};$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx; \qquad f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy.$$

Такой результат следует, если применить теорему умножения (см. 1.7.2). Согласно этой теореме вероятность совмещения событий «случайные величины X и У попали в бесконечно малый прямоугольник dxdy »определяется выражением:

$$P(x<X<x+dx,\ y<Y<y+dy) =$$

$$f(x,y)dxdy = f_1(x)dx\varphi_2(y/x)dy = f_2(y)dy\varphi_1(y/x)dx$$

$$f(x,y) = f_1(x)\varphi_2(y/x) = f_2(y)\varphi_1(y/x)$$

3.5. Зависимые и независимые системы

Часто при анализе двумерных систем требуется выявить наличие или отсутствие зависимости между составляющими системы.

Двумерная система называется независимой, если условные распределения её составляющих равны их безусловным распределениям

$$\varphi_1(x/y) = f_1(x); \qquad \varphi_2(y/x) = f_2(y).$$

Теорема: Для того, чтобы случайные величины X X и Y были независимы необходимо и достаточно, чтобы интегральная функция системы $F(x,y)$ была равна произведению интегральных функций составляющих

$$F(x,y)=F_1(x)\cdot F_2(y)\quad(*).$$

Доказательство необходимости. Если X и Y независимы , то независимы и события $X < x$ и $Y < y$. Следовательно, вероятность совмещения этих событий равна произведению их вероятностей

$$P(X < x, Y < y) = P(X < x)P(Y < y),$$

или, что одно и то же

$$F(x,y)=F_1(x)\cdot F_2(y)$$

Доказательство достаточности: Из равенства * следует, что вероятность совместного появления событий $X < x$ и $Y < y$ равна произведению вероятностей каждого, следовательно, эти события независимы. Отсюда следует, что и составляющие X и Y независимы.

Следствие: Для того, чтобы непрерывные случайные величины были независимы, необходимо и достаточно, чтобы дифференциальная функция системы была равна произведению дифференциальных функций по каждой составляющей.

$$f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$$

Действительно: по определению имеем:

$$\varphi_1(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)};\qquad \varphi_2(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)};$$

Подставляя $f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$ получим

$$\varphi_1(x/y)=f_1(x);\qquad \varphi_2(y/x)=f_2(y).$$