Лекция 12

План лекции

4.1 Неравенство Чебышёва

Пусть случайная величина X имеет математическое ожидание m_x и дисперсию D_x.

Для любого положительного числа α вероятность отклонения случайной величины от её математического ожидания на величину больше, чем α, ограничена сверху отношением D_x/α^2 :

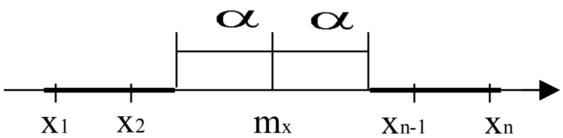
$$P\left(|X - m_x| \ge \alpha\right) \le \frac{D_x}{\alpha^2}.$$

Доказательство:

Пусть X - дискретная случайная величина с законом распределения

X	x_1	x_2	…	x_{n-1}	x_n
P	p_1	p_2	…	p_{n-1}	p_n

Геометрическая интерпретация условия теоремы представляется рисунком:



Вероятность того, что случайная выйдет за пределы отрезка 2α , можно найти из выражения, в котором суммируются вероятности всех значений X, кроме тех, которые соответствуют отрезку ab

$$P\left(|X - m_x| \ge \alpha\right) = \sum_{p_i \notin (a,b)}^{n} p_i .$$

Умножим обе части равенства на α^2 и проанализируем его правую часть

$$\alpha^2 P\left(|X - m_x| \ge \alpha\right) = \sum_{p_i \notin (a,b)}^{n} \left(p_i \alpha^2\right) \le D_x = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - m_x\right)^2 p_i \text{ ; отсюда}$$

$$P\left(|X-m_x|\geq\alpha\right)\leq\frac{D_x}{\alpha^2}.$$

Существует другая форма записи теоремы Чебышева

.

> Вероятность того, что отклонение случайной величины от её матожидания будет меньше, чем α, будет больше разницы между единицей и отношением D_x/α^2.
>
> $$P\left(|X-m_x|\leq\alpha\right)>1-\frac{D_x}{\alpha^2}$$

Задача 1: Оценить вероятность того, что случайная величина X с неизвестным законом распределения отклонится от m_x на величину 2σ

$$D_x=\sigma^2;\quad \alpha=2\sigma;\quad \frac{\sigma^2}{(2\sigma)^2}=\frac{1}{4}=0{,}25.$$

Задача 2: Математическое ожидание скорости ветра на заданной высоте m_x = 25 км/час , σ_x =4,5 км. Какие скорости ветра можно ожидать с вероятностью P= 0,91

$$P\left(|V-m_x|\leq\alpha\right)>1-\frac{D_x}{\alpha^2};\quad 0{,}91=1-\frac{D_x}{\alpha^2};\quad \frac{D_x}{\alpha^2}=0{,}09;$$

$$D_x=\sigma_x^2=20{,}25;\quad \alpha^2=\frac{20{,}25}{0{,}09}=225\ \Rightarrow\ \alpha=15\ ;$$

V = 10…40км/час.

4.2 Теорема Чебышёва

При доказательстве неравенства была использована числовая характеристика – математическое ожидание. Эта неслучайное число определяется природой наблюдаемых случайных величин и не зависит от того, как были проведены испытания. На практике почти всегда отсутствует возможность найти математическое ожидание и приходится вместо него использовать среднее арифметическое наблюдаемых значений. Разумеется, что это случайное число , которое все-таки меньше отличается от математического ожидания, чем отдельный результат испытания.

Средним арифметическим величины X называется случайная величина $\overline{X}$, которая определяется выражением

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i.$$

Теорема Чебышева устанавливает связь между средним арифметическим и математическим ожиданием случайной величины. Предварительно решим две задачи:

Задача 1. Найти математическое ожидание среднего арифметического результатов эксперимента. Результаты эксперимента представлены в таблице. В колонке N – номер эксперимента, в колонке X- его результаты.

N	X
1	x_1
2	x_2
.	**.**
.	**.**
n	x_n

$$X_i - m_{x_i} \to m_x; \quad \text{т.е.} \quad M(X_i) = m_x;$$

$$M(\overline{X}) = M\left[\frac{1}{n}\sum X_i\right] = \frac{1}{n}(n \cdot m_x) = m_x.$$

Математическое ожидание среднего арифметического n одинаково распределенных взаимно-независимых случайных величин равно математическому ожиданию каждой.

Задача 2. Найти дисперсию среднего арифметического случайной величины X при n независимых повторных испытаниях.

$$D(\overline{X}) = D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2} D\left[\sum_{1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2}(D_x \cdot n) = \frac{D_x}{n}.$$

Дисперсия среднего арифметического n одинаково распределенных взаимно-независимых случайных величин в n раз меньше дисперсии каждой.

$$D(\overline{X}) = \frac{D_x}{n}$$

Математическое ожидание среднего арифметического n одинаково распределенных взаимно-независимых случайных величин равно математическому ожиданию каждой, а дисперсия среднего арифметического в n раз меньше дисперсии каждой.

Теорема: При достаточно большом числе независимых опытов среднее арифметическое полученных в опытах значений случайной величины X сходится по вероятности к ее математическому ожиданию

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - m_i\right| < \varepsilon\right) > 1 - \delta,$$

где δ, ε – сколь угодно малые величины; при $n \to \infty$ будет выполняться данное неравенство.

Доказательство: Применим неравенство Чебышева для случайной величины $\overline{X}$

$$P\left(\left|\overline{X} - M\left(\overline{X}\right)\right| \le \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{D\left(\overline{X}\right)}{\varepsilon^2},$$

где $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_i$, $M\left(\overline{X}\right) = m_x$, $D\left(\overline{X}\right) = \frac{D_x}{n}$. Тогда

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - m_x\right| \le \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{D_x}{n \cdot \varepsilon^2}.$$

При любом сколь угодно малом значении ε можно всегда подобрать n такое, чтобы сделать δ значительно меньше единицы.

4.2.1 Применение теоремы Чебышёва на практике

1.При измерении физических величин делают несколько замеров, к которым можно применить теорему Чебышева, т.к. математическое ожидание каждого замера равно математическому ожиданию измеряемой величины. Их дисперсии также одинаковы. При усреднении случайная ошибка измерений уменьшается. При этом остается приборная ошибка.

2. Теорема Чебышева обосновывает выборочный метод проверки. Суть этого метода заключается в том, что по сравнительно небольшой выборке судят о всей совокупности.

4.3 Теорема Бернулли

Вероятностью появления события называется число, около которого колеблется относительная частота появления события при неограниченном количестве экспериментов и сохранении условий экспериментов

$$W = p^* = \frac{m}{n}.$$

Теорема Бернулли: При неограниченном увеличении числа опытов n относительная частота появления события сходится по вероятности к его вероятности его появления p

$$n \to \infty \quad P\left(\left|p^* - p\right| < \varepsilon\right) > 1 - \delta \qquad ( ),$$

где ε и δ –любые сколь угодно малые числа.

Доказательство этой теоремы сводится к приведению выражения ( ) к виду, который соответствует теореме Чебышева.

Напомним, что (см. 1.5) статистической вероятностью p^* появления события A или относительной частотой появления события W в данной серии опытов называется отношение числа опытов m, в которых событие произошло, к общему числу произведенных опытов n:

$$W = p^* = \frac{m}{n} = \frac{\sum_{1}^{n} x_i}{n}; \qquad X = \{0,1\}; \qquad m_x = p;$$

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_i - m_x\right| < \varepsilon\right) > 1 - \delta; \qquad (*)$$

$$n \to \infty.$$

Выражение (*) соответствует теореме Чебышева