Лекция 13

План лекции



# 5. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Процесс − последовательное изменение состояния. В теории вероятности случайным процессом обычно называют случайную функцию, аргументом которой является время $X(t)$. Характерным примером случайного процесса является шум, который наблюдается в электронных приборах.

Процессы могут быть непрерывными и дискретными и по времени, и по состоянию. Приведём примеры таких процессов.

| | Время | Состояние |
|---|---|---|
| 1 | Д | Д |
| 2 | Д | Н |
| 3 | Н | Д |
| 4 | Н | Н |

Д − дискретное, Н − непрерывное.

1 − состояние оперативной памяти компьютера;
2 − отсчёт показаний измерительного прибора;
3 − состояние измерительного прибора вообще (включен, выключен);
4 − запись температуры воздуха на самописце.

## 5.1 Случайная функция

Функция $X(t)$ называется случайной, если её значение при любом значении t есть случайная величина. Случайная функция есть обобщение понятия случайной величины.

К примеру, случайная функция $Z(t)$ может быть произведением детерминированной функции $f(t)$ и случайной функции $X(t)$ или их суммой:

$$f(t) = \cos\omega t; \qquad Z(t) = X(t)\cos\omega t; \qquad Z(t) = X(t) + f(t).$$

<u>Реализацией</u> случайной функции называют конкретный вид, который она принимает в результате опыта. Пример: магнитофонные записи шума в лесу. Если их делать в разные моменты времени, то записи будут различаться в деталях.

<u>Сечением</u> случайной функции называют то мгновенное случайное значение,

которое функция $f(t)$ приняла в момент t. То есть она приняла одно из возможных значений; могла принять и другое. Это определяется законом распределения.

### 5.1.1 Скалярная и векторная случайные функции

Если состояние объекта или системы описывается одной случайной величиной, то это случайный скалярный процесс. Если состояние системы в момент t описывается несколькими случайными функциями: $X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)$, то это будет векторный случайный процесс. А совокупность этих случайных функций называется вектором состояния системы, или N−мерным вектором.

Случайный процесс с дискретным временем называется случайной последовательностью.

### 5.1.2 Характеристики случайных функций. Законы распределения

Одномерный закон распределения сечения случайной функции $X(t)$ −это закон распределения сечения этой функции для любого значения t. Для непрерывной скалярной функции он представляется дифференциальной функцией $f(x, t)$.

Двумерный закон распределения − это совместный закон распределения двух сечений функций X(t) для любых двух моментов времени $t_1$ и $t_2$

$$f(x_1, t_1; x_2, t_2).$$

Случайная функция называется нормально распределённой, если совместное распределение любого числа N её сечений, взятых в последовательно случайные моменты времени есть N−мерный случайный закон.

Математическое ожидание случайной функции $X(t)$ − это неслучайная функция $m_x(t)$, которая при каждом значении t представляет собой математическое ожидание соответствующего сечения случайной функции:

$$m_x(t) = M[X(t)].$$

### 5.1.3 Автокорреляционная функция и дисперсия случайного процесса. Их свойства

Автокорреляционной функцией (АКФ) или корреляционной функцией (КФ) процесса X(t) называется неслучайная функция двух значения времени t и t':

$$K_x(t, t') = M\left[(X(t) - m_x(t)) \cdot (X(t') - m_x(t'))\right].$$

Если $t = t'$, то $K_x(t, t') = D_x(t) = \sigma_x^2(t)$.

**Свойства автокорреляционной функции:**

1. $K_x(t, t') = K_x(t', t)$ −свойство симметрии;

2. $K_x(t, t') \le \sigma_x(t) \cdot \sigma_x(t')$;

3. $K_x(t,t) = \sigma_x^2 \geq K_x(t,t')$.

Для нормально распределённой случайной функции математическое ожидание и автокорреляционная функция являются исчерпывающими характеристиками. Часто используют коэффициент корреляции

$$r(t,t') = \frac{K_x(t,t')}{\sigma_x(t)\cdot\sigma_x(t')}.$$

Нормально распределённая случайная функция X(t) называется стационарной, если математическое ожидание и дисперсия не являются функциями времени:

$$m_x = \text{const}, \qquad D_x = \text{const}.$$

Для стационарных случайных функций автокорреляционная функция является только функцией разности двух аргументов

$$K_x(t,t') = K_x(\tau), \quad \tau = t' - t \quad K_x(\tau) = K_x(-\tau).$$

Взаимнокорреляционной функцией (ВКФ) двух процессов $X(t)$ и $Y(t)$ называется

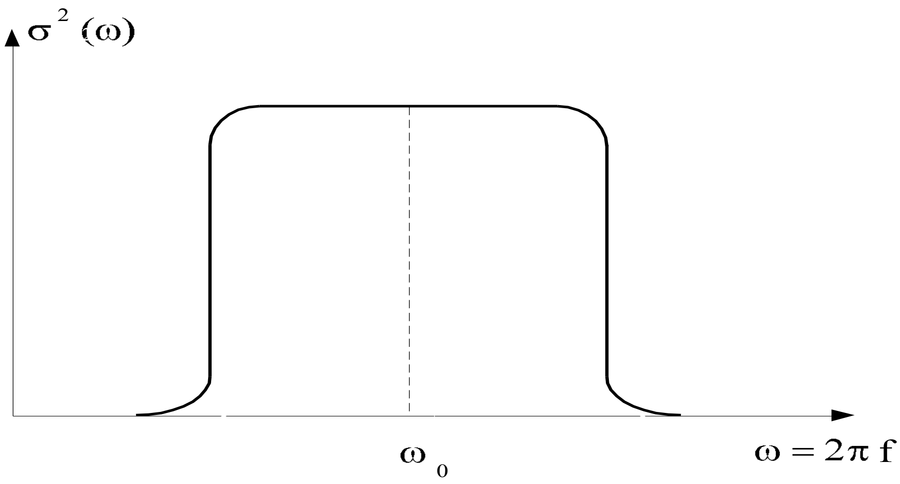
$$K_{xy}(t,t') = M\{[X(t) - m_x(t)]\cdot[Y(t') - m_y(t')]\}.$$

Случайные процессы некоррелированы, если их взаимнокорреляционная функция равна нулю для любых значений t и t' :

$$K_{xy}(t,t') = 0 \quad .$$

### 5.1.4 Спектр случайного процесса и его связь с автокорреляционной функцией

Случайный стационарный процесс может быть описан спектральной функцией. Она показывает распределение дисперсии в полосе частот, которую занимает процесс и численно равна пределу отношения значения дисперсии , приходящуюся на бесконечно малый интервал частот :




$$\sigma^2(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} K(\tau)\cdot\cos\omega\tau\, d\tau \quad (*)$$ - соотношение Винера - Хинчина

Из этого соотношения *) следует , что АКФ и спектр однозначно полно описывают случайный стационарный процесс.

## 5.2 Основные виды случайных процессов
### 5.2.1 Белый шум

Белый шум − это случайный процесс, для которого любые сколь угодно близкие сечения не коррелированны:

$$K(t,t') = G(t)\cdot\delta(t'-t);$$

$\delta(t'-t)$ − дельта − функция ; $\quad \boldsymbol{\delta(0)=1.} \quad \boldsymbol{\delta(t'-t)=0}$, *если* $t' \neq t$.

$G(t)$ − называется интенсивностью шума . Если $G(t) = \mathrm{const}$ − то это стационарный белый шум. Для белого шума спектральная функция равномерна в интервале частот от нуля до бесконечности.

### 5.2.2 Эргодический процесс

Говорят, что стационарная случайная функция $X(t)$ обладает эргодическими свойствами, если её характеристики $m_x$ и $K_x(\tau)$ могут быть определены как соответствующие средние для любой достаточно длинной реализации $X(t)$.

Достаточным условием эргодичности является соотношение

$$\lim_{\tau\to\infty} K(\tau) = 0 \quad .$$

### 5.2.3 Марковский процесс

Примером такого процесса может служить распад радиоактивного вещества. Характерным свойством марковского процесса является отсутствие связи между тем, каким путём пришла система в данное состояние, и дальнейшим развитием процесса.