

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛАНЕТАРНЫХ ПЕРЕДАЧ И ТРАНСМИССИЙ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОСТРАНСТВЕННО – ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ВЗАИМОСВЯЗЕЙ ИХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ

*Универсализирована и автоматизирована методика расчета кинематики планетарных передач, которая позволяет определить кинематическую функциональность трансмиссий транспортных средств; проиллюстрирована инвариантность кинематических матричных систем - кинематические матричные системы планетарных механизмов, несмотря на различие в записи с разными значениями характерных параметров сателлитов, инвариантны по отношению к вектору неизвестных; получена пространственно – топологическая иллюстрация допустимых угловых скоростей сателлитов на множестве допустимых внутренних передаточных отношений планетарных рядов*

**В.Б. Самородов**

Доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой\*  
Контактный тел.: (057) 707-60-66

**А.О. Островерх**

Аспирант\*  
Контактный тел.: (057) 707-60-66  
E-mail: ostrov.sasha@gmail.com

\*Кафедра «Автомобиле- и тракторостроения»  
Национальный технический университет «Харьковский  
политехнический институт»  
ул. Фрунзе, 21, г. Харьков, Украина, 61002

## Введение

В трансмиссиях современных транспортных средств широко используются планетарные передачи. Их применяют в качестве редукторов в составных коробках передач для переключения передач на ходу, в качестве дифференциального механизма в гидропередачах, в качестве механизма поворота гусеничных тракторов, приводов валов отбора мощности, и т.д.

Относительно малые габариты, вес, низкие потери на трение, благоприятные виброустойчивые свойства, высокая надежность, возможность разветвления мощности в трансмиссиях транспортных средств с целью передачи энергии нескольким ведомым элементам, в том числе и с бесступенчатым регулированием, - все это неоспоримые достоинства планетарных передач. Такое широкое использование планетарных передач также связано с повышением мощности и производи-

тельности сельскохозяйственных и промышленных тракторов, комбайнов, тяжелых грузовых автомобилей и дорожных машин.

Следовательно, модернизация трансмиссий в целом и отдельно коробок перемены передач или раздаточных коробок, главных передач и конечных бортовых передач требует совершенствования расчетных методов планетарных передач и в частности их универсализацию и автоматизацию.

**Анализ последних достижений и публикаций**

Классический кинематический анализ планетарных механизмов изложен в трудах [1-3]. Попытка введения характерных параметров, учитывающих вид зубчатых зацеплений и универсализация расчета кинематики планетарных механизмов, включая относительные скорости сателлитов, была предпринята в работах [4,5].

Проблеме автоматизации анализа и синтеза планетарных передач посвящены десятки работ, из которых наиболее авторитетными трудами являются работы Кудрявцева В.Н., Кирдяшева Ю.Н. [1,2], Кристи М.К., Красненькова В.И., Вашеца А.Д. [3,6], Цитовича И.С. [7], Кисточкина Е.С., Бабаева О.М. [8]. На основании указанных работ целесообразно построить универсальную и весьма простую методику автоматизированного анализа кинематики сколь угодно сложных планетарных механизмов.

Цель работы

1) Построение универсальной матричной методики расчета кинематики планетарных механизмов.

2) Иллюстрация инвариантности кинематических матричных систем на примере механической трансмиссии с трехзвенными планетарными механизмами (рядами).

3) Пространственно – топологическая иллюстрация допустимых угловых скоростей сателлитов на множестве допустимых внутренних передаточных отношений планетарных рядов.

Универсализация математической модели кинематики планетарных механизмов

На основании уравнения Виллиса [1-3] для трёхзвенного планетарного механизма (ТПМ), имеющего в общем случае двухвенцовые сателлиты имеем:

$$\frac{\omega_1 - \omega_3}{\omega_2 - \omega_3} = k = \pm \frac{z_{cm1} \cdot z_2}{z_{cm2} \cdot z_1}, \quad (1) \quad \frac{\omega_{cm} - \omega_3}{\omega_1 - \omega_3} = \pm \frac{z_1}{z_{cm1}} = S_1,$$

$$\frac{\omega_{cm} - \omega_3}{\omega_2 - \omega_3} = \pm \frac{z_2}{z_{cm2}} = S_2, \quad (3) \quad k = \pm \frac{z_{cm1} \cdot z_2}{z_{cm2} \cdot z_1} = \frac{S_2}{S_1}, \quad (4)$$

где индексы "1", "2", "3", "ст" относятся соответственно к абсолютным угловым скоростям  $\omega$  солнечной (1), коронной (2) шестерен, водила (3) и сателлитов (ст);  $z_1, z_2$  и  $z_{ст1}, z_{ст2}$  - числа зубьев на соответствующих шестернях;  $k$  - внутреннее передаточное отношение планетарного ряда ( $k < 0$ , если ТПМ имеет внешнее и внутреннее зацепления и  $k > 0$  - в случае только внутренних или только внешних зацеплений [1-3]);  $z_{ст1}$  и  $z_{ст2}$  – числа зубьев в общем случае двухвенцовых сателлитов, входящих в контакт с солнечной ( $z_{ст1}$ ) и

коронной ( $z_{ст2}$ ) шестернями;  $z_{ст}$  - число зубьев в случае одновенцовых сателлитов,  $S_1, S_2$  – характерные параметры сателлитов, которые имеют физический смысл передаточных отношений зубчатых зацеплений. Знак при  $k$  автоматически определяется знаками характерных параметров сателлитов  $S_1$  и  $S_2$  следующим образом:  $S_{1,2} < 0$ , если венец сателлита имеет внутреннее зацепление с солнечной или коронной шестернями и  $S_{1,2} > 0$  - в случае только внешних зацеплений. В случае одновенцовых сателлитов  $z_{ст1} = z_{ст2} = z_{ст}$ :

$$\frac{\omega_1 - \omega_3}{\omega_2 - \omega_3} = k = \pm \frac{z_2}{z_1}, \quad (5) \quad \frac{\omega_{cm} - \omega_3}{\omega_1 - \omega_3} = \pm \frac{z_1}{z_{cm}} = S_1, \quad (6)$$

$$\frac{\omega_{cm} - \omega_3}{\omega_2 - \omega_3} = \pm \frac{z_2}{z_{cm}} = S_2, \quad (7) \quad k = \pm \frac{z_2}{z_1} = \frac{S_2}{S_1}. \quad (8)$$

Любое из уравнений (1)-(4) или (5)-(8) есть тождественное следствие трех других уравнений, что в итоге приводит к инвариантности кинематических базисных матриц ТПМ и, как будет показано ниже, – к инвариантности кинематических матричных систем трансмиссий в целом.

Основное кинематическое уравнение планетарного ряда и относительная угловая скорость сателлита  $\omega_s$  в его относительном движении вокруг водила на основании формул (4)–(6) с учетом введенной выше аксиоматики для знаков характерных параметров  $S_1$  и  $S_2$  по виду зацепления (внешнего – «+» или внутреннего – «-») записываются в виде:

$$\omega_1 - k\omega_2 + (k-1)\omega_3 = 0; \quad (9)$$

$$\omega_s = \omega_{cm} - \omega_3 = -S_1\omega_1 + S_1\omega_3; \quad (10)$$

$$\omega_s = \omega_{cm} - \omega_3 = -S_2\omega_2 + S_2\omega_3 \quad (11)$$

Особенностью уравнений (10), (11) является то, что знак их правой части изменен на противоположный по сравнению с рекомендациями трудов [1,2]. Как будет проиллюстрировано ниже введение в рассмотрение характерных параметров зубчатых зацеплений  $S_1$  и  $S_2$  с учетом их знаков от вида зацепления позволяет эффективно автоматизировать анализ кинематики сколь угодно сложных планетарных механизмов.

Кинематические базисные матричные уравнения ТПМ на основе (9)-(11) имеют вид [4,5]:

$$\begin{bmatrix} 1 & -k & k-1 & 0 \\ S_1 & 0 & -S_1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_s \end{bmatrix}^T = 0, \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -k & k-1 & 0 \\ 0 & S_2 - S_2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_s \end{bmatrix}^T = 0. \quad (13)$$

Для наиболее распространенного и часто встречающегося в планетарных передачах, планетарного ряда с одновенцовым сателлитом соотношения для числа зубьев солнца ( $z_1$ ), короны ( $z_2$ ) и сателлита ( $z_{cm}$ ) через радиусы этих зубчатых колес  $r_1$  (солнца),  $r_2$  (короны) и модуль  $m$  зубчатого зацепления имеют вид:

$$z_1 = \frac{2r_1}{m}, \quad z_2 = \frac{2r_2}{m}, \quad r_2 - r_1 = z_{cm} \cdot m, \quad (14)$$

откуда с учетом (5) - (8)

$$z_{cm} = \frac{r_1}{m} \cdot (|k|-1), \quad S_1 = \pm \frac{z_1}{z_{cm}} = \pm \frac{2}{|k|-1}, \quad (15) \quad (16)$$

$$z_{cm} = \frac{r_2}{m} \cdot \frac{|k|-1}{|k|}, \quad S_2 = \pm \frac{z_2}{z_{cm}} = \pm \frac{2|k|}{|k|-1}. \quad (18)$$

Кинематические базисные матрицы ТПМ из уравнений (12) и (13) с учетом соотношений (16), (18) удобно представить в виде:

$$\begin{bmatrix} 1 & -k & k-1 & 0 \\ \pm \frac{2}{|k|-1} & 0 & \mp \frac{2}{|k|-1} & 1 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -k & k-1 & 0 \\ 0 & \pm \frac{2|k|}{|k|-1} & \mp \frac{2|k|}{|k|-1} & 1 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Для трёхзвенных дифференциальных механизмов, имеющих в общем случае двухзвенцовые сателлиты на основании соотношений (1)-(4) имеем:

$$S_1 = \pm \frac{z_2}{k \cdot z_{cm1}} \quad (21) \quad S_2 = \pm \frac{z_1 \cdot k}{z_{cm1}}. \quad (22)$$

Кинематические базисные матрицы для ТПМ с двухзвенцовыми сателлитами из уравнений (12) и (13) с учетом соотношений (21), (22) представляются в виде:

$$\begin{bmatrix} 1 & -k & k-1 & 0 \\ \pm \frac{z_2}{k \cdot z_{cm2}} & 0 & \mp \frac{z_2}{k \cdot z_{cm2}} & -1 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -k & k-1 & 0 \\ 0 & \pm \frac{z_1 \cdot k}{z_{cm1}} & \mp \frac{z_1 \cdot k}{z_{cm1}} & 1 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Проиллюстрируем важное свойство инвариантности кинематических базисных матриц (12), (13); (19), (20) и (23), (24) и в целом инвариантность кинематических матричных систем на примере механической трансмиссии с планетарными механизмами по отношению к вектору неизвестных кинематических параметров, не смотря на отличие в записи этих матричных систем с разными значениями указанных выше характерных параметров зубчатых зацеплений  $S_1$  и  $S_2$ .

Рассмотрим универсальный подход к описанию кинематики двухдиапазонной механической трансмиссии (рис. 1), работающей а) - при включенном тормозе ( $T=1$ ) и выключенном фрикционе ( $\Phi=0$ ), и б)

$\omega_{11}$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_{13}$	$\omega_{12}$	$\omega_{22}$	$\omega_{S1}$	$\omega_{S2}$
$i_1$	1						
		$i_2$					
1			$k_1-1$	$-k_1$			
$S_{11}$			$-S_{11}$			1	
1				$k_2-1$	$-k_2$		
$S_{21}$				$-S_{21}$			1
	$-\Phi$	$\Phi$					
					$T$		
1							

- при включенном фрикционе ( $\Phi=1$ ) и выключенном тормозе ( $T=0$ ).

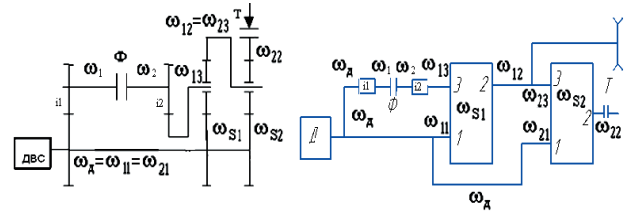


Рисунок 1. а) Кинематическая схема трансмиссии; б) структурная схема трансмиссии.

Кинематические подготовительные шаблоны с использованием кинематических базисных матриц в форме (12) и (13) имеет соответственно вид (см.рис.2).

По приведенным кинематическим подготовительным шаблонам в среде MathCAD для вектора неизвестных кинематических параметров  $\omega = [\omega_{11} \ \omega_1 \ \omega_2 \ \omega_{13} \ \omega_{12} \ \omega_{22} \ \omega_{S1} \ \omega_{S2}]^T$  с применением базисных матриц в форме (19) и (20) в случае а) (при включенном тормозе  $T=1$  и выключенном фрикционе  $\Phi=0$ ) полные кинематические матричные системы трансмиссии имеют решения в виде, приведенном во фрагменте программы на рис. 2:

Исходные данные:  $i_1=1,5; i_2=2; k_1= -2; k_2= -3; \omega_d=100$  рад/с.

$$W = \begin{bmatrix} i_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & k_1 - 1 & -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ S_{11} & 0 & 0 & -S_{11} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & k_2 - 1 & -k_2 & 0 & 0 \\ S_{21} & 0 & 0 & 0 & -S_{21} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ w_d \end{pmatrix} \quad \text{solve}(W, E) = \begin{pmatrix} 100 \\ -150 \\ -25 \\ 50 \\ 25 \\ 0 \\ -100 \\ -75 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} i_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & k_1 - 1 & -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -S_{12} & S_{12} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & k_2 - 1 & -k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -S_{22} & S_{22} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ w_d \end{pmatrix} \quad \text{solve}(R, E) = \begin{pmatrix} 100 \\ -150 \\ -25 \\ 50 \\ 25 \\ 0 \\ -100 \\ -75 \end{pmatrix}$$

Рисунок 2. Фрагмент программы для трансмиссии в случае а)

$\omega_{11}$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_{13}$	$\omega_{12}$	$\omega_{22}$	$\omega_{S1}$	$\omega_{S2}$
$i_1$	1						
		$i_2$					
1			$k_1-1$	$-k_1$			
			$-S_{12}$	$S_{12}$		1	
1				$k_2-1$	$-k_2$		
				$-S_{22}$	$S_{22}$		1
	$-\Phi$	$\Phi$					
					$T$		
1							

Рисунок 2. Кинематические подготовительные шаблоны для двух скоростных диапазонов (включения а) и б)).

Здесь  $\omega = [\omega_{11} \ \omega_1 \ \omega_2 \ \omega_{13} \ \omega_{12} \ \omega_{22} \ \omega_{S1} \ \omega_{S2}]^T = \text{lsolve}(W, E) = \text{lsolve}(R, E)$ .

В данном случае иллюстрируется инвариантность полных кинематических матриц трансмиссии W и R по отношению к вектору неизвестных кинематических параметров  $\omega$ , причем базисные матрицы ТПМ рассчитывались через передаточные отношения ТПМ в форме (19) и (20).

$$L = \begin{bmatrix} i_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & k_1 - 1 & -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ S_{11} & 0 & 0 & -S_{11} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & k_2 - 1 & -k_2 & 0 & 0 \\ S_{21} & 0 & 0 & 0 & -S_{21} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ w_d \end{pmatrix} \text{lsolve}(L, E) = \begin{pmatrix} 100 \\ -150 \\ -25 \\ 50 \\ 25 \\ 0 \\ -100 \\ -75 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} i_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & k_1 - 1 & -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -S_{12} & S_{12} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & k_2 - 1 & -k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -S_{22} & S_{22} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ w_d \end{pmatrix} \text{lsolve}(M, E) = \begin{pmatrix} 100 \\ -150 \\ -25 \\ 50 \\ 25 \\ 0 \\ -100 \\ -75 \end{pmatrix}$$

Рисунок 3. Фрагмент программы для трансмиссии в случае а)

На рисунке 3 для случая а) иллюстрируется инвариантность полных кинематических матриц трансмиссии L и M по отношению к вектору неизвестных кинематических параметров  $\omega$ , причем базисные матрицы ТПМ в форме (12) и (13) включают характерные параметры зубчатых зацеплений  $S_1$  и  $S_2$ , вычисленные через числа зубьев шестерен, входящих в планетарный механизм, по формулам (6) и (7).

$$T = \begin{bmatrix} i_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & k_1 - 1 & -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ S_{11} & 0 & 0 & -S_{11} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & k_2 - 1 & -k_2 & 0 & 0 \\ S_{21} & 0 & 0 & 0 & -S_{21} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ w_d \end{pmatrix} \text{lsolve}(T, E) = \begin{pmatrix} 100 \\ -150 \\ -150 \\ 300 \\ 400 \\ 500 \\ 400 \\ 300 \end{pmatrix}$$

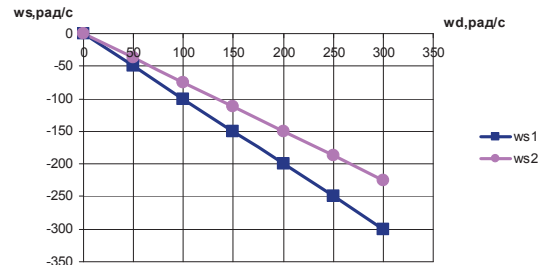
$$Y = \begin{bmatrix} i_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & k_1 - 1 & -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -S_{12} & S_{12} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & k_2 - 1 & -k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -S_{22} & S_{22} & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ w_d \end{pmatrix} \text{lsolve}(Y, E) = \begin{pmatrix} 100 \\ -150 \\ -150 \\ 300 \\ 400 \\ 500 \\ 400 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Рисунок 4. Фрагмент программы для трансмиссии в случае б)

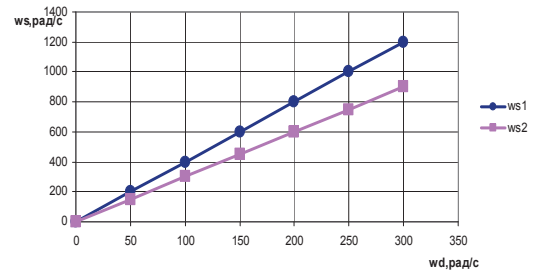
$$H = \begin{bmatrix} i_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & k_1 - 1 & -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ S_{11} & 0 & 0 & -S_{11} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & k_2 - 1 & -k_2 & 0 & 0 \\ S_{21} & 0 & 0 & 0 & -S_{21} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ w_d \end{pmatrix} \text{lsolve}(H, E) = \begin{pmatrix} 100 \\ -150 \\ -150 \\ 300 \\ 400 \\ 500 \\ 400 \\ 300 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} i_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & k_1 - 1 & -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -S_{12} & S_{12} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & k_2 - 1 & -k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -S_{22} & S_{22} & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ w_d \end{pmatrix} \text{lsolve}(V, E) = \begin{pmatrix} 100 \\ -150 \\ -150 \\ 300 \\ 400 \\ 500 \\ 400 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Рисунок 5. Фрагмент программы для трансмиссии в случае б)



а)



б)

Рисунок 6. Зависимости угловой скорости сателлитов от угловой скорости коленчатого вала тракторного двигателя для случаев а) и б)

Исходные данные к фрагменту программы на рис.3:  $i_1=1,5$ ;  $i_2=2$ ;  $\omega_d=100$  рад/с; ( $z_1=36$ ;  $z_2=72$ ;  $z_{сr1}=18$  – числа зубьев первого планетарного ряда); ( $z_1=17$ ;  $z_2=51$ ;  $z_{сr2}=17$  – числа зубьев второго планетарного ряда). Здесь  $\omega = [\omega_{11} \ \omega_1 \ \omega_2 \ \omega_{13} \ \omega_{12} \ \omega_{22} \ \omega_{S1} \ \omega_{S2}]^T = \text{lsolve}(L, E) = \text{lsolve}(M, E)$ .

Аналогичные фрагменты программы в среде MathCAD приведены на рис.4, 5 для случая б) при включенном фрикционе ( $\Phi=1$ ) и выключенном тормозе ( $T=0$ ), где также акцентируется внимание на инвариантности полных кинематических матриц трансмиссии по отношению к вектору неизвестных кинема-

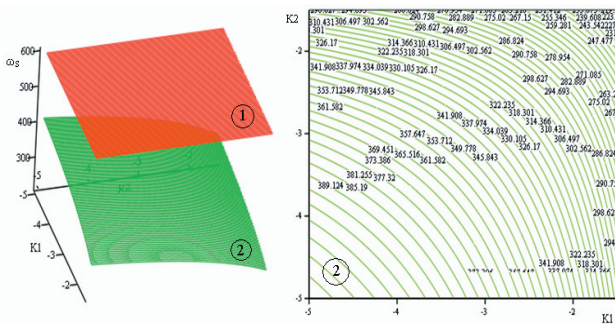
тических параметров  $\omega = [\omega_{11} \ \omega_1 \ \omega_2 \ \omega_{13} \ \omega_{12} \ \omega_{22} \ \omega_{S1} \ \omega_{S2}]^T$  (см.рис.4,5).

На (рис.6 а,б) дана зависимость угловой скорости сателлитов обоих ТПМ от угловой скорости коленчатого вала тракторного двигателя  $\omega \in [0, 300 \text{ рад/с}]$  (см. рис.6 а,б).

В случае а) в пределах  $\omega \leq 300 \text{ рад/с}$  (3000 об/мин) угловой скорости коленчатого вала угловые скорости сателлитов не выходят за границу принятого в транспортном машиностроении ограничения  $\omega \leq 600 \text{ рад/с}$  (6000 об/мин) [7]. В случае б) это ограничение нарушено уже при  $\omega_S = 150 \text{ рад/с}$  и трансмиссия не является функциональной (рис.6 б).

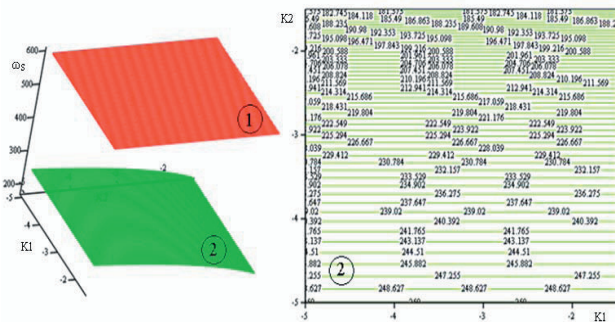
Рассмотрим с помощью пространственно – топологических взаимосвязей зависимости угловой скорости сателлитов от максимальной угловой скорости коленчатого вала тракторного двигателя  $\omega_D = 300 \text{ рад/с}$  для случаев а) и б).

На рис. 7 показана граница угловой скорости сателлитов  $\omega \leq 600 \text{ рад/с}$  (6000 об/мин) и максимальная скорость сателлита при  $\omega_D = 300 \text{ рад/с}$ , изменяемая в диапазоне  $\kappa = -1,5 \dots -5$  ( $\kappa$  – внутреннее передаточное отношение планетарного ряда). Аналогично на рис. 8,9,10 показаны изменения угловых скоростей сателлитов и их граница.



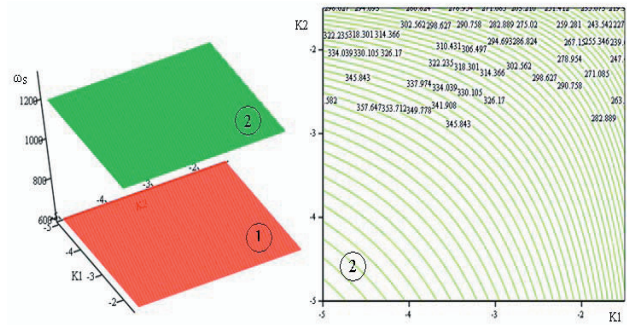
а) б)

Рисунок 7. Пространственные а) и топологические б) зависимости угловых скоростей сателлитов  $\omega_S$  (1 – допустимые значения  $\omega_S \leq 600 \text{ рад/с}$  (6000 об/мин); 2 – расчетные значения  $\omega_S$ )



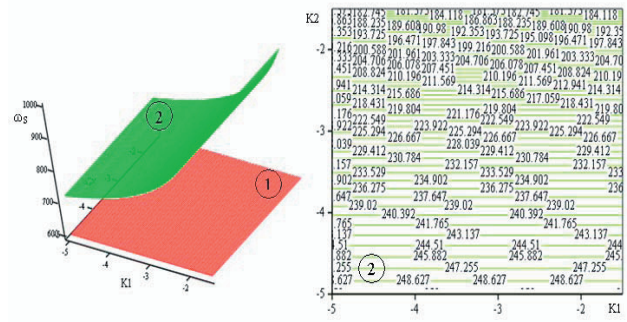
а) б)

Рисунок 8. Пространственные а) и топологические б) зависимости угловых скоростей сателлитов  $\omega_S$  (1 – допустимые значения  $\omega_S \leq 600 \text{ рад/с}$  (6000 об/мин); 2 – расчетные значения  $\omega_S$ )



а) б)

Рисунок 9. Пространственные а) и топологические б) зависимости угловых скоростей сателлитов  $\omega_S$  (1 – допустимые значения  $\omega_S \leq 600 \text{ рад/с}$  (6000 об/мин); 2 – расчетные значения  $\omega_S$ )



а) б)

Рисунок 10. Пространственные а) и топологические б) зависимости угловых скоростей сателлитов  $\omega_S$  (1 – допустимые значения  $\omega_S \leq 600 \text{ рад/с}$  (6000 об/мин); 2 – расчетные значения  $\omega_S$ )

### Выводы

- 1) Универсализирована и автоматизирована методика расчета кинематики планетарных передач, которая позволяет определить кинематическую функциональность трансмиссий транспортных средств.
- 2) Проиллюстрирована инвариантность кинематических матричных систем - кинематические матричные системы планетарных механизмов, несмотря на различие в записи с разными значениями характерных параметров сателлитов, инвариантны по отношению к вектору неизвестных.
- 3) Получена пространственно – топологическая иллюстрация допустимых угловых скоростей сателлитов на множестве допустимых внутренних передаточных отношений планетарных рядов.

### Литература

1. Планетарные передачи. Справочник /Под ред. В.Н. Кудрявцева и Ю.Н. Кирдяшева. –Л.: Машиностроение.– 1977.–536 с.
2. Кудрявцев В.Н. Планетарные передачи. – Машиностроение, 1966. – 307 с.

3. Красеньков В.И., Вашец А.Д. Проектирование планетарных механизмов транспортных машин. –М.: Машиностроение, 1986. –272с.
4. Самородов В.Б. Генерация матричных моделей для гидрообъемно-механических трансмиссий произвольного вида //Системно-техника автомобильного транспорта.– Харьков: ХГАДГУ, 1999.– С.61-68.
5. Самородов В.Б. Системный подход к генерации математических матричных моделей для планетарных механических и гидро-объемно-механических трансмиссий произвольного вида //Вестник ХГПУ.– 1999.– Вып.46.– С.51-54.
6. Кристи М.К., Красеньков В.И. Новые механизмы трансмиссий. –М.: Машиностроение, 1967.– 216с.
7. Цитович И.С., Альгин В.Б., Грицкевич В.В. Анализ и синтез планетарных коробок передач автомобилей и тракторов. –Мн.: Наука и техника, 1987. – 224 с.
8. Объемные гидромеханические передачи: Расчет и конструирование / О.М. Бабаев, Л.И. Игнатов, Е.С. Кисточкин и др.–Л.: Машиностроение,1987.–256 с.

УДК 621.224

# ДОСЛІДЖЕННЯ РОБОЧОГО ПРОЦЕСУ ЗДВОЄННОГО КАПСУЛЬНОГО ПРЯМОТОЧНОГО ГІДРОАГРЕГАТУ

*У даній роботі представлені результати чисельного дослідження течії рідини в проточній частині зведеного гідроагрегату капсульного типу. З використанням програми для розрахунку двовірних течій розраховані кінематичні характеристики першого робочого колеса для різних варіантів циркуляції, що спрацьовується, побудований баланс втрат енергії в першій лопатевій системі*

**О.В. Потетенко**

Кандидат технічних наук, професор, завідувач кафедрою\*  
Контактний тел.: (0572) 707-66-46

**Є.С. Крупа**

Аспірант денної форми навчання\*  
Контактний тел.: (0572) 707-66-46  
E-mail:zhekr@mail.ru

**В.Е. Дранковський**

Кандидат технічних наук, доцент\*  
Контактний тел.: (0572) 707-66-46  
E-mail:drankovskiy@kpi.kharkov.ua  
\*Кафедра "Гідравлічні машини"

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут» (НТУ «ХПІ») вул. Фрунзе, 21, м. Харків, 61002

## 1. Вступ

Сучасні гідроагрегати, що містять турбіни поворотного-лопатевого типу, мають високі показники ККД, а також високі експлуатаційні якості. Однак, вертикальні поворотні-лопатеві турбіни мають усе-таки недостатньо широкий діапазон регулювання по напору.

Існують гідроагрегати горизонтально-капсульного типу з прямоосним проточним трактом, застосовувані на низьконапірних ГЕС з  $H = 3-25\text{м}$  [1].

Ці гідроагрегати внаслідок прямоосного підведення й відведення води і простоти форми проточного тракту при установці в низьконапірних ГЕС мають переваги перед гідроагрегатами з вертикальними по-