

ВЫБОР КРИТЕРИЯ ОПТИМИЗАЦИИ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ МНОГОНОМЕНКЛАТУРНЫМИ ЗАПАСАМИ

**О.В. Серая, доцент, к.т.н., Т.А. Клименко, ассистент,
В.Б. Самородов, профессор, д.т.н.,
Национальный технический университет «ХПИ»**

***Аннотация.** Проанализированы известные критерии решения задачи управления запасами, в том числе и многономенклатурными, предложен новый критерий оптимизации данной задачи. Математически осуществлена постановка задачи управления многономенклатурным запасом, показаны методы определения рационального размера запаса, рассмотрены варианты ограничений на объем склада, на капитал и по условиям хранения.*

***Ключевые слова:** многономенклатурный запас, критерий оптимизации, средняя чистая прибыль, потери на управление запасами, ограничения.*

Введение

Задача управления запасами является одной из центральных в теории логистики и до настоящего времени продолжает привлекать интерес специалистов в этой области. Следствием этого является многочисленное количество моделей и методов, направленных на решение задачи управления запасами и дающих разный конечный результат, при одинаковых начальных условиях. Однако критерием данной задачи неизменно выступает величина издержек на управление запасами. Рассмотрим данную ситуацию подробнее.

Анализ публикаций

Известно, что в процессе управления запасами основным является баланс между минимизацией затрат на логистические операции и их эффективностью. Исходя из этой точки зрения, выделяют следующие статьи расходов [1]:

- стоимость единицы товара, зависящая от размера партии;
- затраты на хранение товара, куда входят: складские расходы, страхование, расходы на погрузку, разгрузку, перегрузку и перемещение товара на складе, убытки от порчи и потерь на хранение, износ складского оборудования и помещений (особенно такие затраты возрастают при избыточном запасе);

- расходы по организации закупки товара;
- зарплата персонала и управленческие расходы;
- потери в доходах при отсутствии товара на складе (дефицит) – упущенная выгода, потеря репутации или отложенный заказ.

Сведение к минимуму вышеперечисленных затрат, сопутствующих формированию запасов, до настоящего времени являлось приоритетным критерием (средние суммарные потери) решения задачи управления запасами [2 – 6].

Отметим, что, помимо однопродуктовых задач, в литературе представлены задача одновременной поставки нескольких видов товаров от одного поставщика (многономенклатурная поставка) и задача о независимых поставках различных товаров от нескольких поставщиков (по одному от каждого) при наличии определенного ограничения (например, на размер капитала, выделяемый на приобретение запасов) [7]. В работе [8] предпринята попытка объединения многономенклатурной и многопродуктовой задач, с учетом ограничений на капитал, однако единственным критерием оптимизации выступает величина издержек на управление запасами, что, на наш взгляд, противоречит тезису о балансе между минимизацией затрат и эффективностью логистических операций

и указывает на односторонность предложенного подхода к управлению многономенклатурными запасами.

Современная логистика требует новых подходов к выбору критерия задачи управления запасами. В работе [9] авторами справедливо отмечено, что при оптимизации систем управления запасами классические постановки задач формулируются, как правило, в виде задач минимизации суммарных годовых издержек, обуславливаемых доставкой товара, его хранением и т.п., а не как задачи максимизации рентабельности системы или, например, как задачи максимизации чистого приведенного дохода для денежных уходящих и приходящих потоков платежей, характеризующих работу таких систем [9]. В этой же работе критерием оптимизации стратегии управления запасами является размер чистого приведенного дохода при заданных объемах годовых поставок анализируемой номенклатуры товаров. Однако изначальная фиксация этих объемов исключает возможность изменений покупательского спроса, который оказывает ключевое влияние на формирование запасов.

Очевидно, что модификация соответствующих моделей управления запасами на основе сбалансированных показателей, уравнивающих эффективность логистических операций по управлению многономенклатурным запасом и сопутствующими этому процессу издержками, приведет к совершенно иным параметрам оптимальных стратегий управления запасами.

На основании анализа вышеперечисленных источников нами предлагается использовать в качестве критерия для оптимизации задачи управления запасами среднюю прибыль предприятия от реализации закупленного товара в зависимости от колебаний спроса на товар. При этом считаем целесообразным, в отличие от работы [9], не задавать объемы поставок, а определить рациональный размер запаса, который будет отвечать принятому критерию оптимизации.

Постановка многономенклатурной задачи управления запасами и выбор критерия оптимизации

Пусть: c – закупочная цена единицы товара; β – цена единицы товара при реализации ($\beta > c$); α_1 – затраты на хранение единицы

товара в торговом зале; α_2 – затраты на хранение единицы товара на складе; θ – случайный спрос на товар с плотностью распределения $f(\theta)$, $\theta > 0$; x – уровень запаса на складе ($x > 0$).

Тогда средняя ожидаемая прибыль предприятия может быть вычислена по формуле

$$F(x) = (\beta - c) \left[\int_0^x \theta f(\theta) d\theta + x \int_x^\infty f(\theta) d\theta \right]. \quad (1)$$

При этом если спрос не превысил уровень запасов на складе, прибыль предприятия вычисляется как произведение математического ожидания спроса на прибыль от продажи единицы продукции. Если же спрос превысил уровень запаса, то вся продукция будет продана. В этом случае прибыль предприятия вычисляется как произведение количества закупленного товара на прибыль от продажи единицы этого товара.

Средние ожидаемые потери, соответствующие уровню запаса x , определяются соотношением

$$R(x) = a_1 \left[\int_0^x \theta f(\theta) d\theta + x \int_x^\infty f(\theta) d\theta \right] + a_2 \int_0^x (x - \theta) f(\theta) d\theta + (\beta - c) \int_x^\infty (\theta - x) f(\theta) d\theta. \quad (2)$$

Здесь первые слагаемые определяют средние затраты на хранение товара, а последнее – среднюю недополученную прибыль от дефицита товара. Этому слагаемому придают смысл среднего штрафа за дефицит.

Исходя из (1) и (2), средняя чистая прибыль предприятия равна

$$\begin{aligned} L(x) &= F(x) - R(x) = \\ &= (\beta - c - a_1) \left[\int_0^x \theta f(\theta) d\theta + x \int_x^\infty f(\theta) d\theta \right] - \\ &- a_2 \int_0^x (x - \theta) f(\theta) d\theta - (\beta - c) \int_x^\infty (\theta - x) f(\theta) d\theta = \\ &= (\beta + a_2 - a_1 - c) \int_0^x \theta f(\theta) d\theta - (\beta - c) \int_x^\infty \theta f(\theta) d\theta + \\ &+ (2\beta - 2c - a_2) \int_x^\infty f(\theta) d\theta - a_2 x \int_0^x f(\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (3)$$

Критерий (3) отличается от традиционного тем, что учитывает среднюю прибыль, которую нужно максимизировать, а не потери. При этом значение x , максимизирующее (3), не равно значению x , минимизирующему (2).

Определение рационального размера запаса

Для нахождения искомого рационального уровня запаса x проводят дифференцирование выражения (3) и приравнение его к нулю, получая, в конечном итоге, уравнение

$$\int_0^x f(\theta) d\theta = \frac{(2\beta - 2c - a_1)}{(2\beta - 2c - a_1 + a_2)}, \quad (4)$$

которое для заданной плотности распределения $f(\theta)$ легко решается.

Аналогичным образом может быть решена задача формирования многономенклатурного заказа; при этом n -мерным аналогом (3) будет выражение

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \dots, x_n) = & \\ = \sum_{j=1}^n [& (\beta_j + a_{2j} - a_{1j} - c_j) \int_0^{x_j} \theta f_j(\theta) d\theta + \\ & + (2\beta_j - 2c_j - a_{1j}) x_j \int_{x_j}^{\infty} f_j(\theta) d\theta - \\ & - (\beta_j - c_j) \int_{x_j}^{\infty} \theta f_j(\theta) d\theta - a_{2j} x_j \int_0^{x_j} f_j(\theta) d\theta]. \quad (5) \end{aligned}$$

Оптимизация (5) по переменным x_1, x_2, \dots, x_n приводит к системе уравнений

$$\int_0^{x_j} f_j(\theta) d\theta = \frac{(2\beta_j - 2c_j - a_{1j})}{(2\beta_j - 2c_j - a_{1j} + a_{2j})},$$

$$j = 1, 2, \dots, n,$$

решаемых независимо.

Задача усложняется, если имеются ограничения на суммарную стоимость заказа d_0 (так называемое «ограничение на капитал»):

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \leq d_0, \quad (6)$$

$$x_j \geq 0. \quad (7)$$

Эта задача решается с помощью метода неопределённых множителей Лагранжа. При этом

$$x_j = P_j^{-1} \left(\frac{a_j - \lambda c_j}{b_j} \right), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

Подставляя (8) в ограничение, получим уравнение относительно λ

$$\sum_{j=1}^n P_j^{-1} \left(\frac{a_j - \lambda c_j}{b_j} \right) = d_0.$$

Численное решение этого уравнения даёт значение λ , подстановка которого в (8) позволяет рассчитать набор x_1, x_2, \dots, x_n .

Задача становится ещё более сложной, если учесть ограничение на объём склада, которое имеет вид

$$\sum_{j=1}^n v_j x_j \leq v_0, \quad (9)$$

где v_j – объём, занимаемый единицей товара j -го вида; v_0 – объём склада.

Полученная задача математического программирования (5) – (9) является сложной прежде всего потому, что плотности распределения случайного спроса на разные товары различны. Дополнительные трудности могут возникнуть в связи с тем, что в рамках одного многономенклатурного заказа для хранения разных товаров могут потребоваться хранилища (или помещения), требования к которым различны. Например, для хранения определённой группы товаров необходимы рефрижераторы, а для других товаров – помещения с пониженной влажностью.

Тогда для решения такой задачи $I_k \in \{1, 2, \dots, n\}$, где $k = 1, 2, \dots, q$ – множество номеров товаров, для хранения которых требуется помещение k -го типа, причём

$$\bigcap_{k=1}^q I_k = \emptyset, \quad \bigcup_{k=1}^q I_k = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Тогда ограничение (8) трансформируется в q независимых ограничений вида

$$\sum_{j \in I_k} v_j x_j \leq v_{0k}, \quad k = 1, 2, \dots, q, \quad (10)$$

где v_{0k} – объём помещения k -го типа.

Для решения задачи (5) – (9) используем метод штрафных функций. Введём

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = & L(x_1, x_2, \dots, x_n) - \\ & - C_k^{(1)} \left[\min(0, d_0 - \sum_{j=1}^n c_j x_j) \right]^2 - \\ & - C_k^{(2)} \left[\min(0, V_0 - \sum_{j=1}^n v_j x_j) \right]^2 - \\ & - C_k^{(3)} \left[\min(0, x_1, x_2, \dots, x_n) \right]^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь последовательности $\{C_1^{(1)}, C_1^{(2)}, C_1^{(3)}\}$, $\{C_2^{(1)}, C_2^{(2)}, C_2^{(3)}\}$ определяют штрафы за нарушение соответственно ограничений (6), (7), (9), причём $C_{k+1}^{(i)} > C_k^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, $k = 1, 2, \dots$. Процедура численного решения является итерационной. Решение задач следует начинать с начальных наборов $X^{(0)}$ и $\{C_1^{(1)}, C_1^{(2)}, C_1^{(3)}\}$. Получаемый в результате проведения первой итерации вектор $X^{(1)}$ используется в качестве начального на следующей, вместе с набором $\{C_2^{(1)}, C_2^{(2)}, C_2^{(3)}\}$. Далее процедура решения продолжается до выполнения какого-либо естественного критерия остановки, например, $|X^{(k+1)} - X^{(k)}| < \varepsilon$.

Понятно, что явное аналитическое выражение для соотношения (11) определяется заданием конкретного вида плотности $f_j(\theta)$ для каждого из видов товара. Соответствующие аналитические выражения для $f_j(\theta)$, $j = 1, 2, \dots, n$, могут быть получены в результате обработки реальных данных о спросе на товар.

Выводы

В работе после проведенного анализа известных критериев оптимизации задачи управления многономенклатурными запасами был предложен новый критерий, позво-

ляющий определить рациональный уровень запаса, который максимизирует среднюю прибыль предприятия с учетом его издержек на создание запаса, что полностью соответствует требованию о балансе между эффективностью логистических операций и затратами на их осуществление. Также формализована задача управления многономенклатурным запасом при учете некоторых ограничений: на объем склада, «на капитал» и по условиям хранения товаров.

Литература

1. Саркисов С.В. Управление логистикой. – М.: Дело, 2004. – 368 с.
2. Рыжиков Ю.И. Теория очередей и управление запасами. – СПб.: Питер, 2001. – 384 с.
3. Лотоцкий В.А. Модели и методы управления запасами. – М.: Наука, 1991. – 188 с.
4. Ледин М.И. Управление запасами (экономически-математические методы). – М.: Знание, 1978. – 64 с.
5. Рубальский Г.Б. Управление запасами при случайном спросе (модели с непрерывным временем) – М.: Сов. радио, 1977. – 160 с.
6. Хедли Дж. Анализ систем управления запасами: Пер с англ. – М.: Наука, 1969. – 512 с.
7. Лукинский В.С. Модели и методы теории логистики. – СПб.: Питер, 2003.
8. Лукинский В.В. Управление запасами в цепях поставок: оптимальный размер заказа. – Ставрополь: ГОУ ВПО «СевКавГТУ», 2007.
9. Бродецкая Н.Г., Бродецкий Г.Л. Реализация принципа временной стоимости денег в классических многономенклатурных моделях стратегий управления запасами // Логистика и управление цепями поставок. – 2005. – №5 (11).

Рецензент: Л.Г. Раскин, профессор, д.т.н., НТУ «ХПИ».

Статья поступила в редакцию 24 февраля 2009 г.