УДК 519.674

# ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЖЕСТКИХ ЗАДАЧ КОШИ НА ОСНОВЕ БЛОЧНЫХ ОДНОШАГОВЫХ МЕТОДОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕХНОЛОГИИ CUDA

***Я.А. ГРИЗАДУБОВА***[1*]***, И.А. НАЗАРОВА***[2]

[1] *магистрант кафедры прикладной математики и информатики, ДонНТУ, Красноармейск, УКРАИНА*

[2] *доцент кафедры прикладной математики и информатики, канд. техн. наук, ДонНТУ, Красноармейск, УКРАИНА*

[*] *email: yaroslava09@gmail.com*

В последние годы все чаще при решении задач общего назначения используются графические процессоры в сочетании с технологией CUDA, предназначенной для разработчиков параллельных приложений [1]. Одной из таких проблем является моделирование многомерных динамических процессов с сосредоточенными параметрами, описываемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ). Главным препятствием к широкому внедрению GPU по-прежнему является отсутствие эффективных численных методов, учитывающих особенности их архитектуры.

Целью данной работы является разработка, обоснование и оценка эффективности параллельных численных алгоритмов решения жестких задач Коши с использованием графических процессоров на основе технологии CUDA. В качестве методов решения СОДУ используются неявные блочные одношаговые методы, поскольку они обладают кроме системного параллелизма достаточным внутренним параллелизмом (определяемым размерностью блока) и имеют хорошие характеристики устойчивости. Для управления шагом интегрирования реализованы встроенные способы оценки локальной апостериорной погрешности, такие как: правило Рунге, технология локальной экстраполяции Ричардсона-Ромберга и методы вложенных форм [2-3].

Численно решается задача Коши для СОДУ первого порядка с известными начальными условиями:

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{y}(x)}{dx} = \bar{f}(x, \bar{y}(x)), \\ \bar{y}(x_0) = \bar{y}_0, \end{cases} \tag{1}$$

где правая часть системы есть в общем случае нелинейная функция, задающая отображение $F = \bar{f} : R \times R^m \to R^m$.

Уравнения одношаговых блочных разностных методов в применении к ОДУ для блока из $k$ точек могут быть записаны в виде:

$$y_{n,i} = y_{n,0} + ih\left[ b_i F_{n,0} + \sum_{j=1}^{k} a_{i,j} F_{n,j} \right]; i = \overline{1,k}; n = \overline{1,N}. \tag{2}$$

Один из методов решения таких уравнений, который был использован, является метод простой функциональной итерации:

$$\begin{cases} y_{n,i,0} = y_{n,0} + ihF_{n,0}, i = \overline{1,k}, n = 1,2,...,N, \\ y_{n,i,l+1} = y_{n,0} + ih(b_i F_{n,0} + \sum_{j=1}^{k} a_{i,j} F_{n,j,l}), l = \overline{0, \mathrm{L}-1}, \end{cases} \quad (3)$$

где $n$ – номер блока, $n$ = 1, 2, …, $N$; $i$ – номер точки блока, $i=\overline{1,k}$; $l$ – номер текущей итерации $l=\overline{0,L-1}$; $L-$ максимальное число ненулевых итераций.

Используется метод вложенных форм для оценки локальной погрешности для параллельных вложенных блочных алгоритмов решения нелинейной задачи Коши для ОДУ на основе двух различных подходов:

1) комбинация независимых формул разных порядков точности;

2) комбинация специально подобранных формул разных порядков точности.

Первый подход заключается в применении двух различных независимых блочных методов смежных порядков точности $r(\hat{r}), \hat{r} = r \pm 1$ на одной и той же сетке интегрирования $\Omega_h$. Второй подход к разработке блочных вложенных методов предполагает использование идеи последовательного повышения порядка точности, и имеет своей целью сокращение вычислительных затрат на основе комбинации специально подобранных формул разных порядков.

Расчетные формулы для одного, $n$-го, блока вложенного многоточечного алгоритма №2 имеют вид:

$$\begin{cases} y_{n,i,0} = y_{n,0} + ihF_{n,0}, i = \overline{1,k} \\ y_{n,i,l+1} = y_{n,0} + ih(b_i F_{n,0} + \sum_{j=1}^{k} a_{i,j} F_{n,j,l}),\ l = \overline{0, \breve{l} - 1}, \\ \hat{y}_{n,i,\hat{1}} = y_{n,0} + ih(b_i F_{n,0} + \sum_{j=1}^{k} a_{i,j} F_{n,j,\breve{l}}),\ \breve{l} = l, \hat{l} = l+1. \end{cases} \quad (4)$$

Для данных методов разработаны программные приложения, использующие общую/разделяемую память графических процессоров. Проведенные эксперименты свидетельствуют о том, что при рациональном использовании различных видов памяти и распределении вычислений между GPU и CPU, параллельные реализации блочных неявных методов являются эффективными и могут быть использованы для решения жестких СОДУ.

**Список литературы:**

**1.** *Сандерс Дж.* Технология CUDA в примерах: введение в программирование графических процессоров / *Дж. Сандерс, Э. Кэндрот.* – М.: ДМК Пресс. – 2011. – 232 с.

2. Хайрер Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи / Э. Хайрер , С. Нерсетт, Г. Ваннер. – М.: Мир. – 1990. – 512 с.

3. Фельдман Л.П. Современные параллельные методы численного решения задачи Коши: монография / Л.П. Фельдман, И.А. Назарова. – Донецк: «ГВУЗ» ДонНТУ. – 2013. – 206 с.