ПОИСК ЗАМКНУТОГО ПУТИ В ГРАФЕ, ПРОХОДЯЩЕГО ЧЕРЕЗ ЗАДАННОЕ МНОЖЕСТВО ВЕРШИН, ЯВЛЯЮЩЕЕСЯ СОБСТВЕННЫМ ПОДМНОЖЕСТВОМ ВЕРШИН ГРАФА

Прокопенков В.Ф.

Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков

В новой решаемой задаче заданы:1) граф $G=\langle V,E\rangle$, где $V=\{v_i \mid i=\overline{1,n}\}$– вершины графа, $E=\{e_{ij} \mid i,j\in\overline{1,n}\}$ – дуги графа с длинами $D=\{d_{ij} \mid i,j\in\overline{1,n}\}$; 2) $V_z\subset V$ – собственное подмножество вершин графа;3) $v_s^z\in V_z$– начальная вершина. Необходимо найти замкнутый путь минимальной длины из вершины v_s^z, проходящий через все вершины множества V_z с возвратом в вершину v_s^z. В отличие от задачи коммивояжёра в этой задаче $V_z\neq V$.Такая постановка задачи соответствует проблеме поиска замкнутого пути между населенными пунктами на географической карте.

Искомый путь находится как гамильтонов цикл в новом графе $G_z=\langle V_z,E_z\rangle$, в котором $E_z=\{e_{ij}^z \mid i,j\in\overline{1,|V_z|}\}$ – множество дуг с длинами $D^z=\{d_{ij}^z \mid i,j\in\overline{1,|V_z|}\}$. Длина дуги $d_{ij}^z\neq\infty$, если в графе G существует путь $p_{ij}=\langle v_i^z,v_1^{ij},v_2^{ij},...,v_k^{ij},...,v_{m-2}^{ij},v_j^z\rangle$ такой, что $v_i^z,v_j^z\in V_z, v_k^{ij}\in V$ и $v_k^{ij}\notin V_z$, $\forall k=\overline{0,|V|-2}$, иначе $d_{ij}^z=\infty$.

Предлагается следующий алгоритм решения задачи:

П.1. Для заданных G и $V_z\subset V$ построить граф G_z:

1.1. Для каждой пары пунктов $v_i^z,v_j^z\in V_z \mid i\neq j$ алгоритмом Дейкстры определить кратчайший путь p_{ij} такой, что v_i^z,v_j^z соответственно начальная и конечная вершины пути, а вершины, через которые может проходить путь, не принадлежат V_z и зафиксировать его длину d_{ij}^z (для $i=j$ положить $d_{ij}^z=\infty$).

1.2. Создать граф G_z, из множеств V_z и E_z описанным выше способом.

П.2. Для графа G_z найти гамильтонов цикл $p_c=\langle v_i^z \mid i=\overline{1,|V_z|+1}\rangle=\langle e_{i,i+1}^z \mid i=\overline{1,|V_z|}\rangle$.

П.3. Каждую дугу $e_{i,i+1} \mid i=\overline{1|V_z|}\in p_c$ представить соответствующим ей путём $p_{i,i+1}$ в графе G и получить искомое решение.

П.4. Остановиться.

Тестирование показало работоспособность алгоритма. Решением задачи может быть замкнутый путь без повторов или с повторами вершин. Поскольку алгоритм Дейкстры для $n=|V|$ имеет сложность $O(n^2)$, предложенный алгоритм имеет сложность $O(n^4+\xi(m))$, где $\xi(m)$– сложность шага 2 ($m=|V_z|$). Если существует точный алгоритм решения задачи поиска гамильтонова цикла минимальной длины, то разработанный алгоритм найдёт оптимальное решение.

Таким образом, разработанное решение задачи реализует её сводимость к задаче поиска гамильтонова цикла в графе, а сложность сводимости оценивается функцией $O(n^4)$.