ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ ВОЛЬТЕРРА

Вятчанинов А.В.

РВУЗ «Крымский гуманитарный университет», г. Ялта

В данной статье рассматривается дискретная система Вольтерра с действительными коэффициентами, и исследуются свойства ее решения, в частности абсолютная суммируемость.

Пусть B – комплексное банахово пространство и при $p \in [1, \infty]$ $l_p(B) = \left\{ \bar{x} = \{x_n : n \geq 0\} \subset B \,|\, \left(\sum_{n \geq 0} \| x_n \|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}$ − пространство всех абсолютно суммируемых последовательностей, составленных из элементов B. Пусть также $\{V_n : n \geq 1\}$ − набор линейных ограниченных операторов и выполняется условие $\sum_{n=1}^{\infty} V_n < \infty$. Рассмотрим $\alpha \in \square$, $0 < \alpha < 1$, и систему Вольтерра следующего вида:

$$\begin{cases} x_0 = y_0,\ x_1 = \alpha x_0 + y_1,\ x_2 = \alpha x_1 + y_2,\ x_3 = -\dfrac{\alpha}{3!} x_0 + \alpha x_2 + y_3,\ x_4 = -\dfrac{\alpha}{3!} x_1 + \alpha x_3 + y_4, \\ x_5 = \dfrac{\alpha}{5!} x_0 - \dfrac{\alpha}{3!} x_2 + \alpha x_4 + y_5,\ x_6 = \dfrac{\alpha}{5!} x_1 - \dfrac{\alpha}{3!} x_3 + \alpha x_5 + y_6,\ x_7 = -\dfrac{\alpha}{7!} x_0 + \dfrac{\alpha}{5!} x_2 - \dfrac{\alpha}{3!} x_4 + \alpha x_6 + y_7, \ldots \end{cases} \tag{1}$$

Для исследования решения такой системы используем следующую теорему. **Теорема 1.** Следующие утверждения являются эквивалентными:

1. Для любого $p \in [1, \infty]$ дискретная система Вольтерра

$$x_0 = y_0,\, x_n = V_n x_0 + V_{n-1} x_1 + \ldots + V_1 x_{n-1} + y_n,\, n \geq 1, \tag{2}$$

имеет единственное решение $\{x_n : n \geq 0\} \in l_p(B)$ для любой «входной» последовательности $\{y_n : n \geq 0\} \in l_p(B)$.

2. Для любого $z \in \square, |z| \leq 1$, оператор $V(z) := I - \sum_{n=1}^{\infty} V_n z^n$ непрерывно обратимый.

Доказательство данной теоремы можно найти в [1]. Перепишем систему (1) в виде (2), полагая, что $V_1 := I, V_3 := -\dfrac{1}{3!} I, V_5 := \dfrac{1}{5!} I, \ldots, V_{2k} := O,\ k \geq 1.$ Очевидно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ сходится. Построим функцию $V(z) = I - \alpha \sum_{n=1}^{\infty} V_n z^n = I - \alpha \sin(zI)$. Для любого z, $|z| \leq 1$, выполняется $\| \alpha I \sin z \| < 1$. Отсюда следует [2], что функция $V(z)$ имеет обратную $V^{-1}(z)$ для всех $|z| \leq 1$. По теореме 1 следует, что для любых последовательностей $\bar{y} \in l_p(B)$ решение системы (1) также принадлежит $l_p(B)$.

Литература:

1. Вятчанінов, О. В. Властивості розв`язків дискретної системи Вольтерри в банаховому просторі / О. В. Вятчанінов, М. Ф. Городній // Нелінійні коливання. – 2007. – Т.2, №10. – С.184-187.

2. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М.: Изд. «Наука», 1972. – 496 с.