

ВАРІАЦІЙНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ АНАЛІЗУ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ЕЛЕКТРОПРОВІДНИХ ТІЛ

Лавінський Д.В., Морачковський О.К.

Національний технічний університет

«Харківський політехнічний інститут», м. Харків

Аналіз пружно-пластичного деформування систем електропровідних тіл складної геометрії потребує використання чисельних методів. До найбільш універсальних методів відноситься метод скінчених елементів (МСЕ). МСЕ дозволяє у рамках єдиної розрахункової схеми розглядати розподіл векторних компонент електромагнітного поля (ЕМП) та тензорних компонент процесу деформування. Конкретна реалізація МСЕ у даному випадку спирається на варіаційний принцип стаціонарності повної енергії системи електропровідних тіл.

По-перше, для зменшення кількості рівнянь, які описують розподіл ЕМП, вводимо у розгляд векторний магнітний потенціал, який зв'язаний із основними векторними компонентами ЕМП наступними чином:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}; \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_c \vec{j}, \quad (2)$$

де \vec{B} – вектор магнітної індукції; \vec{A} – векторний магнітний потенціал; μ_c – магнітна проникність матеріалу; \vec{j} – густина струму. Рівняння (1) записані для випадку нехтування нелінійною «магнітною» поведінкою матеріалу та без врахування «електричної» складової ЕМП, бо для аналізу деформування електропровідних тіл її внесок є неістотним.

Вираз повної енергії має наступний вигляд:

$$E = U + W, \quad (3)$$

де U – енергія квазіпружного деформування; W – енергія ЕМП (при нехтуванні електричною складовою).

$$U = \frac{1}{2} \int_V \bar{\varepsilon} \cdot {}^{(4)}C \cdot \bar{\varepsilon} dV - \int_V (\vec{j} \times \vec{B}) \cdot \vec{u} dV - \int_{A_p} \left(\vec{p} + \frac{1}{2} \vec{i} \times \vec{B} \right) \cdot \vec{u} dA; \quad (4)$$

$$W = \int_V \left(\frac{1}{2} |\vec{\nabla} \times \vec{A}|^2 - \vec{j} \cdot \vec{A} \right) dV, \quad (5)$$

де $\bar{\varepsilon}$ – тензор деформацій; ${}^{(4)}C$ – тензор коефіцієнтів пружності; \vec{u} – вектор переміщень; \vec{p} – поверхневе навантаження; \vec{i} – густина поверхневого струму.

Розв'язок повинен задовольняти наступному варіаційному рівнянню:

$$\delta E = \delta U + \delta W = 0. \quad (6)$$

Рівність (6) призводить у підсумку до розв'язання двох незалежних систем алгебраїчних рівнянь відносно вузлових переміщень та вузлових значень векторного магнітного потенціалу.