

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МАШИНОБУДУВАННЯ ім. А.М. ПІДГОРНОГО

Морачковська Ірина Олегівна

УДК 539.3

**РОЗРОБКА ВАРІАЦІЙНО-СТРУКТУРНОГО МЕТОДУ
ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ НЕЛІНІЙНОЇ ТЕОРІЇ
ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК СКЛАДНОЇ ФОРМИ В ПЛАНІ**

Спеціальність 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

Харків – 2000

Дисертацією є рукопис

Робота виконана на кафедрі прикладної математики Харківського державного політехнічного університету Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник – доктор технічних наук, професор
Курпа Лідія Василівна,
Харківський державний політехнічний університет,
завідуюча кафедрою прикладної математики

Офіційні опоненти – доктор технічних наук, професор
Синькоп Микола Сергійович,
Харківська державна академія технології та
організації харчування,
завідувач кафедри вищої математики

кандидат технічних наук, науковий
співробітник Трубчанін Ігор Юрійович,
Національний аерокосмічний університет
ім. М.Є. Жуковського (ХАІ),
старший науковий співробітник кафедри механіки та
міцності літальних апаратів

Провідна установа – Інститут технічної механіки НАН України,
м. Дніпропетровськ,
відділ надійності та довговічності конструкцій

Захист відбудеться “14” червня 2001 р. о 14 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 64.180.01 в Інституті проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України за адресою: 61046, м. Харків, вул. Дм. Пожарського, 2/10.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України за адресою: 61046, м. Харків, вул. Дм. Пожарського, 2/10.

Автореферат розісланий “12” травня 2001 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради

Б.П. Зайцев

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Тонкостінні оболонки, як елементи конструкцій, поширені у авіаційній, ракетно-космічній, атомній та інших галузях техніки завдяки їхнім властивостям, таким як легкість, жорсткість та міцність. Розрахунки напружено-деформованого стану оболонок, теоретичні розробки щодо моделювання поведінки таких елементів при пружному й пружно-пластичному стані добре розвинуто у працях С.О. Амбарцумяна, М.А. Алфутова, В.А. Баженова, В.Л. Бідермана, І.А. Біргера, А.С. Вольміра, Є.О. Гоцуляка, Є.І. Григолюка, Я.М. Григоренка, В.С. Гудрамовича, Б.Я. Кантора, М.С. Корнішина, Б.О. Куранова, Л.В. Курпи, В.І. Мяченкова, О.В. Постнова, Я.С. Підстригача, Я.Г. Савули, О.С. Сахарова, Ю.М. Шевченка та багатьох інших.

Разом з цим, підвищені вимоги до ефективності та достовірності розрахунків оболонок стимулюють дослідження у напрямку пошуку нових моделей та методів їхнього аналізу за рахунок сумісного врахування фізичної та геометричної нелінійностей при деформуванні оболонок із загальною формою контуру та їхнього закріплення. Новий напрямок розрахунків у механіці деформівного твердого тіла складають методи теорії R-функцій, запропоновані академіком НАН України В.Л. Рвачовим та його учнями. Варіаційно-структурний метод (RFM) дозволив розв'язати багато складних проблем механіки деформівного тіла. Для цього створено теоретичну базу та програмні засоби у вигляді програмуючих систем "POLE", які орієнтовані на розв'язання крайових задач математичної фізики в областях складної геометричної форми. Задачі теорії згину та стійкості тонких пологих оболонок з урахуванням їхньої геометричної нелінійності розв'язано із застосуванням RFM у роботах В.Л. Рвачова, Л.В. Курпи, О.В. Архіпова, Г.Ю. Болотіної, Х.Ф. Насреддінова, С.М. Склепуса та інших. Для пружно-пластичного згину пластин при малих прогинах цей метод застосовано у роботах Л.В. Курпи та О.В. Архіпова. Отримані результати підтверджують ефективність та великі можливості RFM у підвищенні достовірності розрахунків тонких пластин та оболонок із загальною формою в плані.

Актуальність теми дисертаційної роботи пов'язана з наведеним вище станом проблеми та новим завданням у напрямку розвитку варіаційно-структурного методу, яке полягає в розробці нового ефективного методу аналізу пружно-пластичного деформування гнучких тонких пологих оболонок із загальною формою в плані для автоматизованого розв'язання прикладних проблем проектування оболонкових елементів конструкцій.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана у відповідності до планів кафедри прикладної математики Харківського державного політехнічного університету за темою "Створення та удосконалення конструктивних засобів математики для комп'ютерного моделювання нелінійного деформування елементів тонкостінних конструкцій" (М0901), координованою Міністерством освіти і науки України.

Метою дисертаційної роботи є створення нового ефективного методу визначення напружено-деформованого стану гнучких тонких пологих оболонок із загальною формою в плані при пружно-пластичному згині на базі теорії R-функцій та створення проблемно-орієнтованого програмного забезпечення до програмуючої системи “POLE”.

Основні задачі дослідження в роботі :

- створення ефективного методу розв’язання нелінійної крайової задачі теорії пружно-пластичного згину гнучких пологих оболонок із загальною формою в плані;
- розвиток варіаційно-структурного методу для розв’язання крайових задач теорії згину гнучких тонких пологих оболонок із складною формою в плані з урахуванням геометричної та фізичної нелінійностей;
- розробка в межах деформаційної теорії пластичності при простому або близькому до простого навантаженні методу визначення напружено-деформованого стану пологих оболонок із загальною формою в плані для аналізу впливу геометричної та фізичної нелінійностей при їхньому згині;
- розробка проблемно-орієнтованого програмного забезпечення в межах програмуючої системи “POLE” для розрахунків дослідницьких та прикладних задач теорії пружно-пластичного згину гнучких пологих оболонок із загальною формою в плані;
- виконання досліджень щодо достовірності запропонованих у роботі методик та створеного програмного забезпечення, встановлення закономірностей пружно-пластичного згину пологих оболонок.

Об’єкт дослідження – нелінійні процеси при пружно-пластичному деформуванні гнучких пологих оболонок складної форми в плані.

Предмет дослідження – математичні постановки нелінійних крайових задач теорії пологих оболонок із складною формою в плані та їх розв’язування.

Методи дослідження – варіаційно-структурний метод теорії R- функцій та обчислюванні методи при розрахунках в програмуючій системі “POLE”.

Наукова новизна одержаних у роботі результатів складає наступне:

- уперше на базі теорії R-функцій та RFM створено новий ефективний метод для розв’язання нелінійної крайової задачі теорії пружно-пластичного згину гнучких тонких пологих оболонок із застосуванням методів послідовних навантажень, Ньютона - Канторовича, змінних параметрів пружності та варіаційних методів;
- дістав подальший розвиток варіаційно-структурний метод (RFM) у вигляді побудованих структур розв’язку нелінійних крайових задач теорії пружно-пластичного згину гнучких тонких пологих оболонок із складною формою в плані;

- надано розвиток програмуючої системі "POLE" за рахунок вперше створеного для неї програмного забезпечення для розрахунків пружно-пластичного згину гнучких тонких пологих оболонок із складною формою в плані при різних закріпленнях країв;

- встановлено нові закономірності впливу геометричної та фізичної нелінійностей в межах деформаційної теорії пластичності при простому або близькому до простого навантаженні на напружено - деформований стан гнучких тонких пологих оболонок із різною конфігурацією в плані.

Достовірність результатів дисертаційної роботи забезпечується: обґрунтованим використанням теорії та методів пружно-пластичного згину гнучких пологих оболонок, схем та методів лінеаризації нелінійних крайових задач та їх розв'язанням варіаційно-структурним методом; виконаними порівняннями одержаних розв'язків тестових прикладів з відомими даними у літературі та отриманими іншими чисельними методами, за якими встановлена їх добра узгодженість; використанням у розрахунках оцінок з внутрішньої збіжності результатів в залежності від величини та кількості кроків навантаження, кількості ітерацій по Ньютону - Канторовичу при різній кількості координатних функцій та точності обчислювання елементів матриць Ритця.

Практичне значення одержаних результатів полягає в тому, що побудовані нові структури розв'язків та вперше створена на основі варіаційно-структурного методу (RFM) ефективна методика розв'язання нелінійних крайових задач теорії пологих оболонок із загальною формою в плані можуть бути використані у подальшому при розв'язанні нових задач механіки деформівного твердого тіла. Практичну цінність має створене програмне забезпечення, яке в межах програмуючої системи "POLE" дозволяє виконувати масові чисельні розрахунки оболонкових елементів конструкцій у режимі автоматизації досліджень та проектування.

Результати роботи використано при виконанні держбюджетної науково-дослідницької роботи та в учбовому процесі на кафедрі прикладної математики Харківського Державного політехнічного університету.

Особистий внесок здобувача. Основний зміст дисертації опубліковано в роботах [1-12], список яких наведено наприкінці автореферату. Основні результати за темою дисертації отримані здобувачем самостійно. Роботи [1-3,9,10,12] опубліковані без співавторів. В роботах [4,5] здобувачу належать метод та алгоритм розрахунку оболонок та отримані чисельні результати з пружно-пластичного деформування оболонок. В роботі [6] здобувачу належать метод розрахунків та його реалізація у системі "POLE". В роботі [7] здобувачем здійснено теоретичне обґрунтування методів розв'язку розглянутих задач. В роботі [8] здобувачем одержані наведені чисельні результати розрахунків. В роботі [11] здобувачем сформульовані теоретичні положення методу.

Апробація роботи. Матеріали дисертаційної роботи, основні положення та результати оприлюднені на міжнародних конференціях: "Інформаційні технології, наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я (MicroCad-System)" у 1996-1998, 2000 pp., 1-ій та 3-ій міських науково-практичних

конференціях "Актуальні проблеми сучасної науки у дослідженнях молодих вчених міста Харкова", Харків, 1997, 2000 рр., на наукових семінарах кафедри прикладної математики ХДПУ (1998-2000).

Публікації. За темою дисертаційної роботи опубліковано 12 друкованих праць, серед яких 5 статей у фахових виданнях, 1 стаття у збірнику наукових праць, 4 статті та 2 тези доповідей за матеріалами наукових конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Робота складається із вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел із 160 найменувань, додатка, 26 рисунків та 3 таблиць. Загальний обсяг роботи - 131 сторінка.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано наукову актуальність та практичну цінність теми дисертації, що пов'язано з потребою в розробці нових методів аналізу деформування та міцності тонкостінних оболонок складної форми з урахуванням їхнього пружно-пластичного напруженого стану та великих прогинів, за умов поширених випадків експлуатації ряду елементів машинобудівних конструкцій. Визначено мету та задачі досліджень, наведено дані з науково-технічних тем, у рамках яких виконана робота, а також кваліфікаційні ознаки дисертації.

У першому розділі роботи на підставі огляду літературних джерел надано оцінку стану досліджень за темою дисертації. Обговорено результати проведених за кордоном і в Україні наукових досліджень у напрямку розробки методів розрахунку тонкостінних конструкцій. У опублікованих роботах надано загальні положення з теорії, математичні постановки та методи розв'язання нелінійних крайових задач теорії оболонок. Основи моделювання та різні методи дослідження пружно-пластичного деформування оболонок та пластин розглянуто у роботах О.В. Архіпова, В.В. Васильєва, К.З. Галімова, А.А. Гільмана, В.С. Гудрамовича, М.І. Дідова, О.А. Ілюшина, Л.В. Енджиевського, Л.М. Качанова, Б.Я. Кантора, І.О. Колесника, В.В. Колтунова, М.С. Корнішина, Ю.Г. Коротких, Л.В. Курпи, С.І. Матошка, Х.М. Муштари, М.І. Неверова, П.М. Огибалова, В.В. Петрова, М.М. Столярова, О.І. Стрельбицької, В.Г. Трошина, А.Г. Угодчікова, В.С. Чернишова, Ю.М. Шевченка, І.С. Цуркова, І.О. Цурпала.

У багатьох роботах розглянуті оболонки та пластини з канонічною формою границь та однорідними умовами закріплення чи навантаження вздовж краю. Значно менше робіт, у яких розглянуто загальні форми границь та крайові умови на цих границях. Пріоритет тут віддано методу скінчених елементів (МСЕ), який дозволяє лише дискретно враховувати аналітичну інформацію про геометрію області та крайові умови. До розв'язання крайових задач в областях із складною геометрією досить успішно застосовують теорію та методи R-функцій, які можливо розглядати як альтернативні поширеному для цих випадків МСЕ. Методи теорії R-функцій широко відомі в

Україні та за кордоном. Вони використані для розв'язання багатьох лінійних та геометрично нелінійних задач теорії згину тонких пластин і пологих оболонок у роботах акад. В.Л. Рвачова, проф. Л.В. Курпи та їхніх учнів. Однак, пружно-пластичне деформування гнучких оболонок на підставі цих підходів та методів раніше не розглядалось. Ці задачі, стосовно до геометричної та фізично нелінійної теорії пологих оболонок складної форми в плані, вперше розглянуто у даній роботі.

За зробленою оцінкою стану проблеми, наприкінці першого розділу дисертації, сформульовані перспективні задачі досліджень упруго-пластичного деформування гнучких пологих оболонок.

У другому розділі надано повну систему рівнянь для крайових задач теорії пологих оболонок при пружно-пластичному деформуванні. Прийнято, що деформації є малими, а можливі прогини, за порівнянням з товщиною, є великими. За такими припущеннями тонкі гнучкі пластини при пружному згині вивчались Карманом. У дисертаційній роботі вивчаються тонкі гнучкі пологі оболонки при пружно-пластичному деформуванні на основі відомого варіанту теорії малих пружно-пластичних деформацій О.А. Ілюшина.

Далі збережено гіпотези Кірхгофа–Лява та припущення технічної теорії оболонок, які звичайно застосовують при розв'язанні лінійних та нелінійних задач теорії згину. За загально прийнятими зазначеннями, нелінійні геометричні співвідношення мають вигляд:

$$\varepsilon = e + z\chi, \quad (1)$$

де

(2)

Фізичні співвідношення записано у вигляді, відповідно до теорії малих пружно-пластичних деформацій:

$$, \quad (3)$$

де – внутрішні силові фактори, діючі у серединній поверхні оболонки при згині,

$[B]$, $[C]$, $[Y]$ – матриці з елементами, що є інтегралами по товщині від функцій, залежних від змінних параметрів пружності:

(4)

.Змінні параметри пружності зв'язані співвідношенням для відповідної діаграми деформування матеріалу оболонки:

(5)

де – інтенсивність напруження Мізеса,

E , ν – модуль пружності та коефіцієнт Пуасона матеріалу,

ψ , K – сікучий та об'ємний модулі.

Далі, функціонал Лагранжа перетворено відносно невідомих функцій нормального прогину w та функції мембранних зусиль φ , та варіаційну задачу зведено до наступного:

$$\delta K = 0, \quad (6)$$

$$\text{де } k^T = \{k_1, k_2, 0\}, \quad \chi^T = \{w_{,11}, -w_{,22}, -2w_{,12}\}, \quad N^T = \{\Phi_{,22}, \Phi_{,11}, -\Phi_{,12}\},$$

q - нормальне до серединної поверхні навантаження,

$N_n^0, N_\tau^0, M_n^0, Q_n^0$ - задані нормальне та дотичне зовнішні зусилля, згинний момент та поперечне зусилля, які прикладено до краю серединної поверхні,

$[H], [S], [D]$ – матриці, що відповідні перетвореним співвідношенням (3) у вигляді

$$e = H \bar{N} - S \bar{\chi}, \quad M = S \bar{N} + D \bar{\chi}. \quad (8)$$

На базі рівності (6) для функціоналу (7) отримано нелінійну систему рівнянь (рівноваги та сумісності деформацій) пружно-пластичного деформування гнучких пологих оболонок:

$$(9)$$

де

$D_1, D_2, S_1, S_2, H_1, H_2$ – функції, за якими обчислюються елементи матриць $[H], [S], [D]$.

При цьому отримано головні та натуральні крайові умови для функцій w і φ на загальному криволінійному контурі серединної поверхні оболонки.

Система (9) співпадає з раніше отриманою в роботах В.Г. Трошина. Для пружних однорідних оболонок з системи (9), якщо прийняти $\Phi = -\varphi$, $q = p_1$, отримуємо широко відомі в літературі рівняння геометрично нелінійної теорії пологих оболонок:

$$(10)$$

Рівняння (9) є нелінійними завдяки фізичній та геометричній нелінійності базових рівнянь. Для їхнього розв'язання за методом змінних параметрів пружності (МЗПП), коефіцієнти $D_1, D_2, S_1, S_2, H_1, H_2$ в цих рівняннях повинні послідовно перераховуватися, починаючи з початкового розв'язання задачі пружного деформування оболонки ($\bar{E} = E, \bar{v} = v$), але геометрична нелінійність залишає ці послідовності рівнянь нелінійними за рахунок існування в них складових $L \Phi, w$ та $\frac{1}{2} L \Phi, w$. Зауважимо, що в (9) складові $L D_2, w, L S_2, \Phi, L S_1, w, L H_2, \Phi$ враховують суттєву неоднорідність змінних властивостей оболонки при пружно-пластичному деформуванні. Далі в роботі розглянута лінеаризація рівнянь (9) за схемою метода Ньютона – Канторовича (МНК), яку надано символічною формою у вигляді

$$(11)$$

де P – нелінійний диференціальний оператор, який породжений системою нелінійних рівнянь крайової задачі з заданими граничними умовами,

P'_n – похідна Фреше для цього оператора в точці H_2 .

Розглянуто диференціал Фреше оператора P в точці $\delta I \ll \bar{=} \mathbf{O}^T$

де $h = \{h_1, h_2\}$, -приріст U , $\{U, h\} \in \mathcal{H}$,

ω – залишковий доданок, для якого $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \|\omega(U_n, h)\| / \|h\| \rightarrow 0$.

При цьому, як й при отриманні системи рівнянь (9), припущено, що у застосованому методі змінних параметрів пружності (МЗПП) ці параметри в околі точки U_n , приймають їхні значення, відповідні напружено–деформованому стану в точці U_n . З'ясовано лінійність диференціалу Фреше оператора P при нехтуванні залишковими доданками, завдяки їхньої малізні. Останні дорівнюють $\omega(U_n, h) = L \{h_1, h_2\}$ - для першого та $\omega(U_n, h) = \frac{1}{2} L \{h_1, h_1\}$ - для другого рівняння, відповідно.

Після лінеаризації за схемою МНК система рівнянь (9) набуває вигляду:

(12)

До системи (12) необхідно додати відповідні крайові умови, які розглянуто в роботі.

В роботі обґрунтовано, що лінійній системі (12) є еквівалентною за енергетичною мірою наступна послідовність варіаційних рівностей $\kappa = 0, 1, 2, \dots$:

$$\delta K^{\kappa+1} = 0, \quad (13)$$

(14)

Ітераційна послідовність розв'язків системи рівнянь (12) або рівностей (13) припускає в якості початкового наближення прийняти розв'язок задачі пружного деформування, що відповідає системі рівнянь (9) при додатковому припущенні: $L \{w_0, w_0\} = 0$, $L \{w_0, w_0\} = 0$. Далі для отримання послідовності розв'язків системи (12) або рівностей (13) процес продовжується, поки не виконається нерівність $\|U_{n+1} - U_n\| \leq \varepsilon$, де ε – наперед задана величина. Однак, збіжність такої послідовності суттєво залежить від початкового наближення в околі точки U_n .

Для вдалого вибору початкового наближення при ітераціях за схемою МНК в роботі розглянуто метод послідовного навантаження (МПН), який є методом продовження розв'язків за малим параметром. За цим методом зовнішнє навантаження передбачає послідовне додавання малого довантаження на оболонки, та задачі про їхнє деформування розв'язуються окремо для кожного такого кроку довантаження. Одержані на попередніх кроках розв'язки у вигляді приростів функцій прогину $\dot{w}_{\kappa} \Delta p_{\kappa}$ та мембранних зусиль $\dot{\phi}_{\kappa} \Delta p_{\kappa}$ використовують при розв'язанні задачі для

наступного кроку довантаження. За методом Ейлера з нульовими початковими умовами послідовність навантаження та наближений розв'язок задачі деформування оболонок підраховуються так:

$$(15)$$

В роботі отримано систему рівнянь для пошуку \dot{w}_{k-1} та $\dot{\phi}_{k-1}$ у вигляді:

$$(16)$$

До системи (16) необхідно додати відповідні крайові умови, які розглянуто в роботі. За наданим в роботі обґрунтуванням, система (16) є еквівалентною рівнянням стаціонарності функціоналу

$$\delta I_{k-1} = 0, \quad (17)$$

$$(18)$$

Система (16) складає рівняння для екстремалей функціоналу типа Лагранжа або мішаного функціоналу для відомого принципу Сандерса – Мак Комба – Шлехте, які задані на відповідних кінематичним рівнянням швидкостях приростів невідомих функцій прогину та мембранних зусиль оболонки. Система рівнянь (16) є лінійною відносно швидкостей приростів невідомих задачі \dot{w}_{k-1} , $\dot{\phi}_{k-1}$ і її можливо отримати із системи рівнянь (9) після їхнього диференціювання по параметру навантаження та нехтування складовими більшими за мализною. Коефіцієнти цих рівнянь підраховують за даними розв'язків задачі на попередньому кроці навантаження, якщо відповідно є знайденими w_{k-1} , ϕ_{k-1} . На кожному кроці довантаження при підрахунках уточнюються напруження в оболонці за співвідношеннями теорії малих пружно – пластичних деформацій О.А. Ілюшина ($\sigma_{33} = \sigma_z = 0$). Для цього попередньо виконується внутрішній ітераційний цикл у вигляді ($m = 0, 1, \dots, M$):

$$(19)$$

Процес ітерацій за формулами (19) завершується при виконанні нерівності де δ – задана величина точності.

У подальшому розглянуто розв'язання варіаційних рівностей (17) та (13) за варіаційно-структурним методом. Це дозволяє на k -ому кроці навантаження знайти наближений розв'язок задачі пружно-пластичного деформування оболонок за формулами (15) та уточнити його за методом Ньютона – Канторовича.

За наданою методикою розв'язано сформульовані в роботі задачі із застосуванням варіаційно-структурного методу (RFM), що складає подальший розвиток методу R-функцій. Основою RFM є побудова структур розв'язків, яка послідовно розглянута в роботі для двовимірної області Ω , зайнятою оболонкою в плані, із загальною формою границі – Γ , частини якої Γ_i , $i = \overline{1, m}$. В

роботі на базі відомих у теорії R-функцій методів запропоновано структури розв'язків крайових задач для систем рівнянь (12) та (16) з поширеними у практиці крайовими умовами, які для тонких пластин та пологих оболонок є алгебраїчними або диференціальними рівняннями відносно невідомих функцій задачі. Для цього застосовано поширену систему R-функцій - R_0 та метод побудови нормалізованих до першого порядку рівнянь границь Γ складних областей Ω за відомими предикатами із заданих опорних областей (прямі, кола, криві другого порядку та інші елементарні функції) $\omega = R \langle \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m \rangle \geq 0$. Окрім цього, використано відомі в теорії R-функцій диференціальні оператори у вигляді похідних вищих порядків по нормалі та дотичній або дуги граничного контуру Γ двовимірної області, які продовжуються у внутрішню область.

Розглянуто повні за метриками структури відповідних енергетичних функціоналів (14) та (18). Для розв'язків $u_k = \langle w_k, \phi_k \rangle^T$ крайової задачі (16) на k -ому кроці довантаження та для розв'язків $U_n = \langle w_n, \phi_n \rangle^T$ крайової задачі (12) для n -ої ітерації ці структури визначено формулами:

де B – оператор, відповідний заданим крайовим умовам,

ω, ω_i – рівняння границі області та її частин,

U_0 – відома функція.

Прийняті структури при будь-якому виборі невизначених компонентів Φ_k, Φ_n точно задовольняють відповідним крайовим умовам. Невизначені компоненти цих структур Φ_k, Φ_n були вибрані із функціонального простору M у вигляді наступного наближення:

де C_{ki} – невизначені коефіцієнти,

$\eta_i(x, y) \big|_{i=1, N}$ – відомі послідовності, повні за метрикою розглянутого лінійного простору

M .

В якості $\eta_i(x, y)$ можливо вибрати поліноми (звичайні, Чебишева; тригонометричні й такі інші) або сплайни. Необхідна послідовність координатних функцій, на множині яких відшукується точка стаціонарності відповідного функціоналу, може бути одержана після підстановки $\Phi_{k(n)}$ у структури розв'язків.

Далі розглянуто структурні формули для розв'язання окремих задач пружно-пластичного згину пологих оболонок, які використано при розрахункових дослідженнях. Ці структури побудовано для основних типів крайових умов, які звичайно використовують на практиці при розв'язанні крайових задач тонких пологих оболонок та пластин. Наприклад, для крайової задачі виду (16) в області Ω з границею Γ , яка описується нормалізованою до першого порядку функцією $\omega \langle x, y \rangle$ та задовольняє умовам: $\omega(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in \Omega, \omega_n = 1, \forall (x, y) \in \Gamma$. Розглянуто наступні типи закріплення краю:

1) контур закріплений жорстко з можливим рухом у плані:

Структури для цього випадку мали наступний вигляд:

2) контур шарнірно опертий з можливим рухом у плані:

Структури для цього випадку приймались у вигляді:

контур закріплений жорстко й нерухомий в плані. Структури для цього випадку задовольняли лише головним кінематичним умовам та мали наступний вигляд:

4) контур шарнірно опертий й нерухомий в плані. Структури для цього випадку задовольняли головним кінематичним умовам та приймались у вигляді:

У наведених структурах, де w_i, φ_i – повні системи функцій, які в ряді прикладів було обрано степеневими поліномами.

Аналогічно побудовано структури для крайових задач виду (14), де, на відміну від попереднього, крайові умови 1) - 4) записують відносно повних значень для невідомих функцій нормального прогину та мембранних зусиль $U_n = \{w_n, \varphi_n\}^T$.

Для функціоналу (17), заданому на функціях w_n, φ_n , невизначені коефіцієнти C_{ki} структур для розв'язків в роботі розшукувалися за прямим варіаційним методом Ритця. Система рівнянь Ритця у цьому випадку набуває вигляду:

(20)

де A – матриця та вектор системи Ритця,

B – вектор, складений із послідовностей невідомих компонент відповідних структур.

Аналогічно, для функціоналу (15), заданому на функціях w_n, φ_n , невизначені компоненти C_{ni} структур для розв'язків $U_n = \{w_n, \varphi_n\}^T$ отримано із системи рівнянь Ритця:

(21)

де A – матриця та вектор системи Ритця,

B – вектор, складений із послідовностей невідомих компонент, відповідних для цього випадку структур.

Елементи матриць A, B та векторів B, B надано інтегралами по двовимірній області Ω . Для їхнього обчислювання використано високоточні k-вузлові квадратурні формули Гауса. Для підрахунку елементів матриць фізичних співвідношень за формулами (4) інтеграли по товщині оболонки підраховано за 5-ти та 7-ми вузловими формулами Ньютона–Котеса.

У третьому розділі надано опис розробленого в роботі програмного забезпечення для програмуючої системи “POLE” щодо автоматизації розв'язання нелінійних задач теорії пологих оболонок за методом, що запропоновано в роботі. Послідовно розглянуто загальну схему алгоритму розв'язання пружно-пластичних задач пологих оболонок при великих за порівнянням з товщиною

прогинах та його чисельну реалізацію в рамках програмуєчої системи “POLE”. До існуючої на цей час системи “POLE” додано програмне поширення для здійснення, на кожному кроці навантаження при реалізації МПН та на кожній ітерації при реалізації МНК, алгоритму інтегрування по товщині функцій, залежних від змінних параметрів пружності, для отримання інформації про значення цих інтегралів в вузлах Гауса та величин напружень в вузлових точках по товщині оболонки. Це надало можливість при отриманні коефіцієнтів систем Ритця (20) і (21) виконувати інтегрування у двомірних областях та з певною точністю встановлювати розподіл зон пластичності в об’ємі оболонки.

Далі наведено результати за здійсненими дослідженнями з аналізу достовірності запропонованого в роботі методу та створеного програмного забезпечення у рамках програмуєчої системи “POLE”. У дослідженні виконано розрахунки тестових прикладів, для яких існують дані в літературі, та встановлено властивості алгоритму за збіжністю результатів при варіюванні величинами кроку довантаження, кількості ітерацій та утриманих складових у невизначених компонентах відповідних структур. Додатково вивчено вплив на збіжність результатів точності інтегрування по товщині функцій, залежних від змінних параметрів пружності та коефіцієнтів систем Ритця.

За першим циклом дослідження розв’язано геометрично нелінійні задачі пружного деформування під зовнішнім тиском сферичних оболонок з жорстко закріпленим круговим планом та циліндричних оболонок з планом у вигляді прямокутника. Результати порівняно з раніше отриманими різними методами А.С. Вольміром, К.З. Галімовим, Ф.С. Ісанбаєвою, М.С. Корнішиним, Л.В. Курпою та іншими. Це дозволило одержати позитивні висновки за дослідженнями на підставі доброго узгодження отриманих даних з порівняними.

У другому циклі такого дослідження розглядалося пружно-пластичне деформування при малих прогинах пластин із матеріалів з діаграмою, що має лінійне зміцнення за межами пружності. У тестових прикладах порівняно дані, які раніше було отримано різними методами О.І. Стрельбицькою, О.В. Архіповим та Л.В. Курпою. Для розглянутих задач про згин під тиском квадратних пластин з жорстко закріпленими та шарнірно опертими краями, при варіюванні у досить широкому діапазоні модуля зміцнення, одержано результати, які кількісно і якісно співпали з порівнюваними. Далі розв’язано клас задач про згин за межами пружності під тиском жорстких пластин складної форми. Порівнянням розрахункових даних із відомими встановлено їхню добру узгодженість.

Виконане тестування з порівнянням результатів, отриманих різними методами, на підставі їхнього доброго узгодження між собою, дозволяє зробити висновок про достовірність запропонованих у роботі методу та програмної розробки для розрахунків нелінійних пружно-пластичних задач згину тонких оболонок та пластин.

У четвертому розділі наведено результати розрахункових досліджень впливу геометричної та фізичної нелінійностей на пружно-пластичне деформування гнучких тонких оболонок та пластин

складної форми в плані.

Спочатку у розрахунках досліджено вплив параметрів діаграми деформування матеріалів на напружено-деформований стан оболонок під зовнішнім тиском. Для сферичних оболонок, шарнірно опертих на прямокутний план, визначено вплив границі текучості σ_T для матеріалів з лінійним зміцненням за межами пластичності. В окремих прикладах при пропорційному зростанні навантаження простежено формування зон пластичності на поверхнях оболонки при малих прогинах та тих, що перевищували товщину. На підставі розрахункових досліджень ідеально пружного та пружно-пластичного деформування із поступовим зменшенням σ_T встановлено якісні та кількісні відмінності в поведінці нелінійних діаграм змінної жорсткості оболонок (прогин - тиск) та у розташуванні набутих при цьому форм для зон пластичності на поверхнях оболонки. Результати в окремих випадках порівняно з відомими, наприклад, з отриманими В.Г. Трошиним.

Далі чисельно розв'язано ряд задач пружно-пластичного деформування бандажних полиць лопаток авіаційних турбомашин за розрахунковими схемами консольних пластин, які мають різні криволінійні границі кріплення з боків “спинки” (рис.1) та “коритця” (рис.2) лопатки. Рівняння контурів у місцях кріплення таких бандажних полиць з лопатками прийнято у вигляді:

$$\omega_1 = y - c \cdot \cos(\pi x / a) = 0, \quad k^T = \langle k_1, k_2, 0 \rangle,$$

де c – параметр контуру.

Бандажні полки із сталі 30ХГСА мали діаграму деформування відповідно до моделі з лінійним зміцненням. На рис.3 наведено дані з розподілу напружень та зон пластичності на поверхнях бандажних полиць.

Для бандажних полиць, що закріплені з боку “спинки” лопатки, зони пластичності на поверхні полиць з’являються у центрі контуру кріплення та при пропорційному збільшенні тиску вони поширюються, охоплюючи центральну частину полиці біля контуру кріплення. Для бандажних полиць із кромкою кріплення з боку “коритця” лопатки, зони пластичності з’являються в околі кутових точок цього контуру. Далі, при пропорційному збільшенні тиску з’являється нова зона пластичності у центрі вільного краю полиці. Потім ці зони вже разом поширюються у внутрішню область полиці. У розрахунках цих бандажних полиць за розрахунковою схемою пологих оболонок з різною початковою кривизною, із збереженням розглянутих вище форм кромки кріплення з лопатками, встановлено зменшення в них рівня напруження у порівнянні з пластинами, що позитивно впливає на їхню несучу здібність. Ці результати дозволяють зробити практично важливі висновки щодо причин різної несучої здібності бандажних полиць лопаток авіаційних турбін та надати рекомендації для проектування лопаток турбомашин.

В дослідженнях пружно-пластичного деформування під зовнішнім тиском циліндричних панелей з технологічними надрізами еліптичної форми (рис.4), розглянуто їхню жорсткість за отриманими діаграмами “прогин – тиск” та визначено їхню несучу можливість в залежності від

кривизни панелі при різних співвідношеннях між розмірами півосей крайових надрізів та розміру панелі в плані. Для окремого випадку надано розподіл зон пластичності по перерізу, де панель має послаблення внаслідок надрізів при малих й великих, у порівнянні з товщиною, прогинах (рис.5).

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота завершується такими висновками:

1. Проведено огляд наявних у літературі теоретичних розробок з моделювання нелінійного деформування тонких оболонок, існуючих методів та обчислювальних алгоритмів для розв'язання таких задач. Серед них особливу увагу приділено задачам пружно-пластичного деформування гнучких пологих оболонок. Зроблено висновок щодо недостатньої дослідженості на цей час однієї з актуальних проблем механіки деформівного твердого тіла, до якої належить проблема розв'язання нелінійних задач теорії пологих оболонок із складною формою в плані. Насамперед, в цьому напрямку практично відсутні ефективні методи та результати розрахунків. Це стримує розвиток багатьох важливих напрямків у проектуванні надійної сучасної техніки.

2. Уперше на базі теорії R-функцій та варіаційно-структурного методу (RFM) створено новий ефективний метод для розв'язання нелінійних крайових задач теорії пружно-пластичного згину гнучких тонких положистих оболонок шляхом зведення задачі до пошуку стаціонарних точок запропонованих мішаних варіаційних функціоналів, відповідних лінеаризованим системам рівнянь за схемами методів послідовного навантаження, методу Ньютона - Канторовича сумісно з методом змінних параметрів пружності.

3. Дістав подальший розвиток варіаційно-структурний метод (RFM) у вигляді побудованих структур розв'язку нелінійних крайових задач теорії пружно-пластичного згину гнучких тонких положистих оболонок із складною формою в плані.

4. Отримала подальший розвиток програмуюча система "POLE" за рахунок вперше створеного для неї програмного забезпечення для розв'язання нелінійних задач пружно-пластичного деформування тонких положистих оболонок із складною формою в плані.

5. Ефективність, усталеність і достовірність розрахунків встановлено порівнянням знайдених розв'язків окремих задач з аналітичними або чисельно отриманими іншими методами, що відомі в літературі.

6. Встановлено закономірності впливу геометричної та фізичної нелінійностей в межах деформаційної теорії пластичності при простому або близькому до простого навантаженні на напружено - деформований стан та формування зон пластичності у гнучких тонких пологих оболонках із складною формою в плані.

7. Виконано прикладні розрахунки бандажних полиць робочих лопаток авіаційних турбін, які мають різні криволінійні контури кріплення з лопатками з боку "спинки" та "коритця", та тон-

костінних панелей покриття з технологічними надрізами криволінійної форми, для яких встановлено дані про їхню несучу здібність. Надано рекомендації щодо використання цих даних при проектуванні для підвищення жорсткості та міцності таких елементів конструкцій.

8. Основні результати, висновки й рекомендації з наданих у роботі досліджень використано при виконанні науково - технічної програми Міністерства освіти України в галузі фундаментальних досліджень.

НАУКОВІ ПРАЦІ, ОПУБЛІКОВАНІ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Морачковская И. Об одном подходе к решению нелинейных задач теории пологих оболочек // Вестник ХГПУ. - Харьков: ХГПУ. - 1998. - Вып.17. - С. 64–67.
2. Морачковская И.О. Расчеты упруго-пластического изгиба гибких пологих оболочек сложной формы в плане // Вестник ХГПУ.-Харьков: ХГПУ.-2000.-Вып.82.-С. 47-49.
3. Морачковская И.О. Метод R-функций для решения задач упругопластического изгиба гибких пологих оболочек сложной формы в плане // Вестник ХГПУ.-Харьков: ХГПУ.-2000.-Вып.100.-С.155-159.
4. Курпа Л., Морачковська І. Розрахунок гнучких пологих оболонок складної форми в плані при пружно-пластичному згині // Машинознавство.- 2000.-№3(33).-С. 21-26.
5. Курпа Л.В., Морачковская И.О. Влияние физической нелинейности и формы в плане на изгиб гибких пологих оболочек // Республик. Межведомств. научно-технический сборник “Динамика и прочность машин”. - Харьков: ХГПУ. - 2000. - Вып.57.- С.6-10
6. Курпа Л.В., Морачковская И.О. Об одном численном подходе к решению физически нелинейных задач изгиба пологих оболочек вариационно–структурным методом // Труды международной научно-технической конференции “ Информационные технологии: наука, техника, технология, образование, здоровье”.-Часть1.-Харьков: ХГПУ. – 1996. – С. 17.
7. Курпа Л.В., Морачковская И.О. К решению вариационно–структурным методом нелинейных задач изгиба тонких пологих оболочек при упругопластическом деформировании. // R–функции в задачах мат. физики и прикл. геометрии: Сб. науч. тр., посвященных 70–летию В.Л.Рвачева. – Харьков: ХИПБ, 1996. – С. 13–17.
8. Курпа Л.В., Морачковская И.О. Решение задач изгиба пологих оболочек с большими перемещениями вариационно–структурным методом // Труды международной научно-технической конференции “ Информационные технологии: наука, техника, технология, образование, здоровье”.-Часть1.-Харьков: ХГПУ. – 1997. – С.106–109.
9. Морачковская И.О. Расчет пологих оболочек сложной формы в плане при нелинейном деформировании // Актуальні проблеми сучасної науки у дослідженнях молодих вчених м.Харкова:

- Збірник доповідей 1-ої міської науково–практичної конференції. – Харків: АТ “Бізнес-Інформ”. – 1997. – С. 65–67.
10. Морачковская И.О. Разработка численного алгоритма расчета физически и геометрически нелинейного деформирования тонких оболочек на основе вариационно–структурного метода // Сборник научных трудов ХГПУ “Информационные технологии: наука, техника, технология, образование, здоровье”. - Часть 1. - Харьков: ХГПУ. - 1998. - Вып.6– С. 95–99.
11. Morachkovska I.O., Kurpa L.V. The Variational–Structural Method for the Elasto–Plastic Analysis of thin shallow shells // The 6–th Conference "Shell Structures, Theory and Applications", Gdansk (Poland) 1998.–P. 209-210.
12. Морачковская И.О. Метод R–функций для решения задач упруго-пластического изгиба пологих оболочек сложной формы в плане // Вісник Харківського унів-ту. Серія: Актуальні проблеми сучасної науки у дослідженнях молодих вчених м.Харкова. – 2000. – №456. –Ч.2. – С. 276–279.

АНОТАЦІЇ

Морачковська І.О. Розробка варіаційно-структурного методу для розв'язання задач нелінійної теорії пологих оболонок складної форми в плані. - Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.02.04 - механіка деформівного твердого тіла. - Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, Харків, 2000.

Уперше на базі теорії R-функцій та варіаційного структурного методу (RFM) розроблено новий ефективний метод для розв'язання нелінійних крайових задач пружно-пластичного згину гнучких тонких пологих оболонок. В основу запропонованого методу покладено лінеаризацію отриманих нелінійних рівнянь за допомогою методів послідовних навантажень, методу Ньютон-Канторовича сумісно з методом змінних параметрів пружності. Для послідовності лінеаризованих крайових задач побудовані відповідні функціонали мішаного типу та структури розв'язку, за допомогою яких одержано послідовності координатних функцій, необхідних для знаходження точок стаціонарності цих функціоналів. Створено бази знань та програмне забезпечення для програмуючої системи “POLE”, яке дозволяє автоматизувати розрахунки нелінійного пружно-пластичного деформування тонких гнучких пологих оболонок із складною формою в плані.

Вірогідність результатів підтверджено задовільною відповідністю знайдених чисельних даних із відомими аналітичними та чисельними результатами. Встановлені та чисельно обґрунтовані нові закономірності нелінійного деформування пологих оболонок із складною формою в плані та пластин. Метод дозволяє виконувати розрахунки на жорсткість та міцність тонкостінних оболонкових елементів конструкцій на етапі їхнього проектування, що підтверджено в роботі конкретними прикладами.

Ключові слова: гнучкі пологі оболонки, пластини, форма оболонки в плані, метод Ритца,

теорія R-функцій, варіаційно-структурний метод, структури розв'язків, нелінійне пружно-пластичне деформування, діаграма деформування матеріалу, програмуюча система "POLE".

Morachkovska I. Development of variational structural method for solving non-linear problems of shallow shells with complex shell shape of the plane . - Manuscript.

Thesis for the scientific degree of Candidate of Technical Science by speciality 01.02.04 - mechanics of the deformable solids. N.A. Podgorny's Institute for Problems in machinery NAS Ukraine, Kharkiv, 2000.

The new effective method basing on theory of R-functions and variational structural method is developed for solving of non-linear boundary problems. Elastic-plastic bending of thin shallow shells is considered. The problems [in consideration] are reduced to finding of stationar points of suggested mixed variational functionals according to initial linearization by use of schemes of subsequent loading and Newton-Kantorovich jointly with method of varying elastic parameters. The structures of solution for non-linear boundary problems were built and programming system "POLE" was developed by adding the firstly elaborated software for automatic calculations of non-linear elastic-plastic deformation of thin shallow shells with complex shape.

The theoretical and numerical justification of the method is given. The authenticity of results is confirmed by satisfactory correspondence with known analytical and numerical results. New laws of non-linear deformation of shallow shells and plates with complex shape in plane are established. The method is used for automatic calculations in "POLE" programming system for calculations of shell structural elements in design stage.

Key word: physically and geometrically non-linear shallow shells, plates, complex shell shape in plane, Ritz's method, theory of R-functions, variational-structural method, general structure of solution, non-linear elastic-plastic bending, programming system "POLE".

Морачковская И.О. Разработка вариационно-структурного метода для решения задач нелинейной теории пологих оболочек со сложной формой в плане. - Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 01.02.04 - механика деформируемого твердого тела. - Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Харьков, 2000.

Диссертационная работа посвящена разработке метода решения нелинейных краевых задач теории упругопластического изгиба гибких пологих оболочек с произвольной формой в плане. В работе представлен обзор существующих теоретических и численных исследований в области моделирования и методов решения задач нелинейной теории пологих оболочек. Сделан вывод о том, что исследования по актуальной для механики деформируемого твердого тела проблеме, к

которой относится тема данной работы, ограничены случаем канонических форм граничных поверхностей и однородными условиями.

Для описания упругопластического изгиба гибких пологих оболочек в работе представлены нелинейные разрешающие уравнения краевой задачи, полученные на основе нелинейных геометрических соотношений в квадратичном приближении и теории малых упруго-пластических деформаций при простом и близких к простому нагружениях. Выполнена линеаризация нелинейных дифференциальных уравнения изгиба тонких пологих оболочек при упругопластическом деформировании, обобщающих известные уравнения типа Фепля - Кармана. После линеаризации оператора исходных нелинейных уравнений краевой задачи по схеме Ньютона - Канторовича (МНК) в сочетании с известным в теории пластичности методом переменных параметров упругости в работе предложена последовательность смешанных вариационных функционалов, заданных на функциях прогиба и мембранных сил, для которых стационарные решения отвечают последовательности решений исходной краевой задачи для каждой итерации МНК. Для отыскания элементов такой последовательности на базе теории R-функций построены структуры решения для вариационно-структурного метода (RFM) и система Ритца для отыскания неопределенных постоянных в свободных компонентах таких структур. С целью обеспечения условий сходимости итерационного процесса МНК за счет выбора начального приближения в работе использован метод пошагового нагружения (МПН) в форме известного метода продолжения по параметру. С этой целью исходный оператор нелинейной краевой задачи линеаризован по схеме МПН. Показано, что линеаризованная система уравнений эквивалентна точке стационарности предложенного в работе смешанного функционала, заданного на относительно малых приращениях функций прогиба и мембранных сил на шаге догружения оболочки. Для отыскания стационарного решения такого функционала вновь использован вариационно-структурный метод (RFM), в рамках которого предложены структуры решения и построена система Ритца для определения неизвестных постоянных в свободных компонентах таких структур.

Для реализации предложенного метода в работе создано программное обеспечение для программирующей системы "POLE", что позволило расширить область ее приложений в практическом использовании для решения линейных и геометрически нелинейных задач теории изгиба пологих оболочек и пластин как при упругом и нелинейно-упругом, так и при упруго - пластическом их деформировании.

Эффективность, устойчивость и достоверность расчетов установлены путем сравнения найденных решений с имеющимися аналитическими и численными решениями, известными в литературе и полученными другими методами.

Проведены расчеты на изгиб пологих оболочек с криволинейным контуром области оболочек в плане, с различными условиями их закрепления на отдельных участках границы. В расчетах

установлены важные закономерности упругопластического деформирования таких оболочек при малых и больших перемещениях. Показано, что физическая и геометрическая нелинейности различным образом влияют на изгиб пологих оболочек и в зависимости от формы оболочек в плане это влияние приводит к различным количественным и качественным данным для оценки жесткости, уровня и характера распределения параметров напряженно - деформированного состояния, в распределении зон пластичности в таких элементах конструкций. Применение разработанных в работе метода и программного обеспечения позволяет установить достоверные оценки жесткости и прочности проектируемых изделий.

Выполнены прикладные расчеты тонкостенных моделей турбинных лопаток и бандажных полок с криволинейными границами в местах их крепления, а также для панелей обшивки с эллиптическими и круговыми технологическими надрезами. В этих расчетах, имеющих важное прикладное значение в области проектирования современных ГТД и авиационной техники, показано влияние геометрической и физической нелинейности на жесткость, напряженно-деформированное состояние и формирование зон пластичности в зависимости от вида криволинейной границы конструктивных элементов.

Ключевые слова: гибкие пологие оболочки, пластины, форма оболочки в плане, метод Ритца, теория R-функций, вариационно-структурный метод, структуры решения, нелинейное упругопластическое деформирование, диаграмма деформирования материала, программирующая система "POLE".

Морачковська Ірина Олегівна

**Розробка варіаційно-структурного методу
для розв'язання задач нелінійної теорії пологих оболонок
складної форми в плані**

Автореферат

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

Спеціальність 01.02.04 - механіка деформівного твердого тіла

Підп. до друку р. Формат 60×84/16. Папір CopyRex.

0,8 а.а. Тираж 100. Зам. 9-10.

Надруковано на ризографі ХДПУ.

61002, м. Харків, вул. Фрунзе, 21.