

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МАШИНОБУДУВАННЯ ім. А.М. ПІДГОРНОГО

Лінник Ганна Борисівна

УДК 539.3

**РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧ СТІЙКОСТІ ПЛАСТИН ПРИ
НЕОДНОРІДНОМУ ДОКРИТИЧНОМУ СТАНІ
ЗА ДОПОМОГОЮ МЕТОДУ R-ФУНКЦІЙ**

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

Автореферат

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

Харків – 2002

Дисертацією є рукопис

Робота виконана на кафедрі прикладної математики Національного технічного університету “Харківський політехнічний інститут” Міністерства освіти і науки України

Науковий керівник – доктор технічних наук, професор
Курпа Лідія Василівна,
Національний технічний університет “ХПІ”,
завідуюча кафедрою прикладної математики

Офіційні опоненти – доктор технічних наук, професор
Синькоп Микола Сергійович,
Харківська державна академія технології
та організації харчування,
завідувач кафедри

кандидат технічних наук
Дибський Павло Олександрович,
Національний аерокосмічний університет
ім. М.С. Жуковського (ХАІ),
старший науковий співробітник

Провідна установа – Національний технічний університет України
“КПІ”, м. Київ,
кафедра динаміки та міцності машин
та опору матеріалів

Захист відбудеться 20.06.2002 р. о 14 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 64.180.01 в Інституті проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України за адресою: 61046, м. Харків, вул. Дм. Пожарського, 2/10.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України за адресою: 61046, м. Харків, вул. Дм. Пожарського, 2/10.

Автореферат розісланий 17.05.2002 р.

Вчений секретар

спеціалізованої вченої ради

Б.П. Зайцев

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Високий рівень сучасних вимог до розрахунків конструкцій та їх складових елементів ставлять перед дослідниками проблему стійкості пластин і оболонок, які є їх основними конструктивними елементами. Якісне рішення цієї проблеми істотно залежить від автоматизації процесу розв'язання задач стійкості пластин і оболонок, що відрізняються не лише тими чи іншими фізичними параметрами, способами закріплення і навантаження, але і формою областей, які аналізуються.

Основні ідеї в становленні і розвитку теорії стійкості елементів тонкостінних конструкцій, зокрема тих, що моделюються у вигляді пластин, були висунуті такими вченими як Амбарцумян С. А., Вайнберг Д. У, Вольмир А. С., Гальоркін Б. М., Карман Т., Ключников В. Д., Лехницький С. М., Тимошенко С.П. та іншими.

У сучасній науковій літературі є велика кількість публікацій, тематика яких присвячена як теоретичним аспектам проблеми в цілому, так і практичному розв'язанню конкретних задач стійкості пластин. Проте, слід зазначити, що більшість робіт присвячено розрахунку пластин при однорідному докритичному стані. Набагато менше досліджені задачі стійкості ортотропних пластин довільної форми при змішаних умовах закріплення країв і неоднорідному докритичному стані. Кількість публікацій про коливання і закритичну поведінку попередньо навантажених пластин також є досить обмеженою.

Дана робота присвячена розробці нового методу розв'язання задач стійкості та коливань попередньо навантажених пластин з урахуванням анізотропії матеріалу, а також дослідженню їхньої закритичної поведінки. У основу запропонованого методу покладена теорія R-функцій. Застосування цієї теорії дозволяє представити розв'язок задачі в аналітичному вигляді. Цей розв'язок є універсальним стосовно зміни геометричних і фізичних параметрів задачі при точному урахуванні граничних умов для областей довільної форми.

Актуальність теми роботи. Проектування і розрахунок сучасних конструкцій потребує підвищення міцності, довговічності і надійності їх в експлуатації. При розрахунку на міцність однією з основних проблем є стійкість. У зв'язку з подальшим використанням тонкостінних елементів у техніці розробка ефективних методів розрахунку, проведення аналізу стійкості та дослідження закритичної поведінки попередньо навантажених пластин є актуальними науковими і технічними проблемами.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана на кафедрі "Прикладна математика" Національного технічного університету "ХПІ" у відповідності до

– планів кафедри за темою "Створення та удосконалення конструктивних засобів математики для комп'ютерного моделювання нелінійного деформування елементів тонкостінних конструкцій" (М0901), координованою Міністерством освіти і науки України,

– планів спільних робіт НТУ "ХПІ" з Інститутом проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України за темами "Створення на основі теорії R-функцій інтелектуальних систем, орієнтованих на задачі розрахунку фізико-механічних полів у наукових дослідженнях, інженерній практиці та учбовому процесі" (№ ГР 01900033544) і "Розвиток теорії R-функцій та створення на її основі мобільного забезпечення для сучасних ЕОМ для дослідження термопружних, пружно-пластичних, деформаційних, електромагнітних та магнітогідродинамічних полів" (№ ГР 01900009451).

Мета й задачі роботи. Метою роботи є розробка нового ефективного методу для розв'язання задач стійкості та коливань пластин, навантажених у своїй площині, і дослідження закритичної поведінки ортотропних пластин довільної форми в плані при неоднорідному докритичному стані; створення програмного забезпечення для вирішення зазначеного класу задач, які викликають практичний і теоретичний інтерес. Досягнення мети роботи здійснюється шляхом вирішення наступних задач: створення методу розв'язання задач стійкості та коливань пластин із складною формою в плані; розробка методу дослідження закритичної поведінки ортотропних пластин, навантажених у своїй площині; розвиток варіаційно-структурного методу для розв'язання задач стійкості попередньо навантажених пластин; розробка програмного забезпечення в межах програмуючої системи "POLE" щодо розв'язку сформульованих задач; виконання досліджень стійкості, коливань та закритичної поведінки для конкретних ортотропних пластин.

Об'єкт дослідження – ізотропні та анізотропні пластини складної форми в плані.

Предмет дослідження – побудова та дослідження математичних моделей задач стійкості, коливань та закритичної поведінки попередньо навантажених ортотропних пластин.

Методи дослідження. Загальними засобами досліджень є варіаційні методи, теорія R-функцій та обчислювальні методи. У розподілі по частковим задачам, що поставлені та розв'язані, конкретними методами є: для задач стійкості – статичний та динамічний методи; для задач коливань – динамічний метод; для задач про закритичну поведінку – ітераційний.

Наукова новизна дисертаційної роботи полягає у наступному:

- уперше на базі теорії R-функцій і варіаційних методів розроблено універсальний метод розрахунку на стійкість ортотропних пластин складної форми при неоднорідному докритичному стані та дослідження їхньої закритичної поведінки;

- уперше запропоновано підхід для знаходження власних форм і частот коливань пластин складної форми, навантажених у своїй площині, що базується на спільному застосуванні динамічного та варіаційно-структурного методів;
- надано розвиток методу R-функцій (RFM) у вигляді побудованих структурних формул для функцій переміщень, що задовольняють всім або тільки головним крайовим умовам у випадку пластин складної форми, при різних засобах закріплення та навантаження країв;
- встановлено закономірності поведінки пластин, обумовлені впливом геометричної інформації (різні форми області, розташування отворів, вирізи), способів закріплення, навантаження, анізотропії матеріалу.

Достовірність отриманих результатів забезпечується чітким математичним обґрунтуванням запропонованого підходу, їхнім порівнянням для областей канонічної форми з точними аналітичними розв'язками або з результатами, отриманими за допомогою інших методів, перевіркою збіжності результатів у конкретних задачах, а також використанням можливостей самої теорії R-функцій:

- порівняння результатів при використанні різних структур розв'язків даної задачі;
- зміна вимірності аппроксимаційних просторів і аналіз стабілізації результатів розв'язання;
- використання різних методів розв'язку (динамічний, статичний);
- обчислення інтегральних характеристик, що впливають з рівнянь рівноваги.

Практичне значення результатів роботи. Практична цінність полягає в розробці методів, алгоритмів і програмного забезпечення для розрахунку стійкості та дослідження поведінки пластин після її втрати. Дані, отримані внаслідок обчислювального експерименту, методика їхнього аналізу становлять інтерес для прикладних експериментальних досліджень. Створена база знань і програмне забезпечення можуть бути використані в навчальному процесі, при розробці автоматизованих систем, а також для комп'ютерного моделювання задач стійкості інженерами при проектуванні реальних конструкцій. Нові чисельні дані у вигляді таблиць, рисунків, графіків можуть бути використані як довідкові дані для розрахунку тонкостінних елементів.

Основні результати проведених у роботі досліджень використано при виконанні держбюджетної теми за координаційним планом Міносвіти та науки України, а також в учбовому процесі кафедри прикладної математики НТУ “ХП”.

Апробація результатів досліджень. Основні положення і результати, розглянуті в дисертаційній роботі, були подані й обговорювалися на наукових конференціях: 1-й Міській науково-практичній конференції молодих вчених (Харків, 1997 р.); міжнародних науково-технічних конференціях “Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я” (MicroCad) (Харків, 1998 р., 2000 р., 2001 р.); міжнародній конференції “Динамічні системи” (Київ, 1999 р.); на спільному засіданні кафедр “Прикладна математика”, “Динаміка та

міцність машин” та “Теоретична механіка” під керівництвом проф. Курпа Л.В. /НТУ “ХПІ”, Харків, 2001/; на семінарі відділа “Прикладна математика та обчислювальні методи” під керівництвом академіка НАН України Рвачова В.Л. /ІПМаш, Харків, 2001/; на семінарі каф. обчислювальної математики та математичної кібернетики під керівництвом проф. Кисельової О.В. /ДДУ, Дніпропетровськ, 2001/; на засіданні НТПР “Динаміка та міцність машин” під керівництвом проф. Кантора Б.Я. /ІПМаш, Харків, 2002/.

Публікації. Основні питання за темою поданої дисертаційної роботи викладені в ряді робіт автора у вигляді 7 наукових статей [1-7] і 2 тез доповідей на наукових конференціях [8, 9].

Особистий внесок здобувача. Всі основні положення дисертації отримані автором особисто. Роботи [3,4,7,9] опубліковані без співавторів. У наведених наукових статтях із співавтором проф. Л.В. Курпа особистий внесок здобувача полягає в наступному:

у роботі [1] виконано теоретичне обґрунтування методу розв’язку задачі про закритичну поведінку попередньо навантаженої ізотропної пластини;

у роботі [2] для задач стійкості та коливань ізотропних попередньо навантажених пластин розроблено метод розв’язку та отримані чисельні результати;

у роботах [5, 6] виведені функціонали, які досягають мінімуму на розв’язку задач стійкості та коливань ортотропних пластин складної форми в плані. Також розроблено програмне забезпечення для вирішення цих задач.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел із 119 найменувань і додатку. Загальний обсяг роботи 136 сторінок включаючи 36 рисунків, 29 таблиць.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано наукову актуальність та практичну цінність теми дисертації, що пов’язано з потребою в розробці нових методів аналізу деформування та стійкості ортотропних пластин складної форми з урахуванням неоднорідності напруженого стану та великих прогинів в зв’язку з використанням їх як елементів машинобудівних конструкцій. Визначено мету та задачі досліджень, а також наведено кваліфікаційні ознаки дисертації.

У першому розділі проведено аналіз методів розв’язку, описаних у літературі, що застосовуються за даною проблемою. Дослідженнями задач розрахунку пластин та оболонок займалися й займаються багато вчених, у тому числі Алфутов М.А., Васидзу К., Вольмир А.С., Кантор Б.Я., Курпа Л.В., Лехницький С.М., Рвачов В.Л., Тимошенко С.П та ін. Прикладні задачі стійкості пластин вирішувалися такими авторами: Баничук Н.В., Воробкова Н.Л., Ішлинський А.Ю., Коробко В.І., Преображенський І.Н. і ін. Проблема дослідження закритичного

стану пластин розглядалась такими авторами, як Вінокуров Л.П., Ісаханов Г.В., Корнішин М.С., Крицький А.Б., Логвінська А.А., Немировський Б.Я., Рогалевич В.В., Срубщик Л.С., Треногин В.А., Хондокар А.З., Файзуліна М.А. та ін.

Проблемою застосування теорії R-функцій до задач стійкості пластин займалися Айрапет'ян Г.А., Калініченко В.І., Кашуба Ж.Б., Курпа Л.В., Побережна О.В., Рвачов В.Л., Синєкоп М.С. Сунчелеєв Р.Я. Питанням вивчення вільних коливань присвятили роботи Веретельник В.В., Курпа Л.В., Манько Г.П., Рвачов В.Л., Учїшвілі Л.А. Фізично або геометрично нелінійні задачі теорії пружності розглядалися в роботах авторів: Архіпова О.В., Курпа Л.В., Морачковської І.О., Насриддінова Х.Ф., Рвачова В.Л. З аналізу джерел випливає, що раніше RFM не застосовувався для задач, аналізованих у даній роботі, а саме: стійкості ортотропних пластин при неоднорідному докритичному стані, для дослідження закритичної поведінки, а також для вивчення динамічної поведінки пластин, попередньо навантажених у своїй площині. У даній роботі метод RFM розвинутий для цього класу задач.

У **другому розділі** запропоновано метод для дослідження власних коливань та стійкості попередньо навантажених ортотропних пластин, що базується на застосуванні RFM. Розв'язок поставлених задач проведено з використанням динамічного і статичного підходів. У роботі на базі RFM виведена структура розв'язку для переміщень u, v , така, що крайові умови (3) точно задовольняються

$$U_{opt} = U_0 + U_1, \quad (7)$$

Аналогічна формула структури розв'язку була отримана й у випадку ізотропного матеріалу.

Далі подано метод розв'язання задачі стійкості ортотропних пластин при неоднорідному докритичному стані, що базується на теорії R-функцій і статичному підході. У цьому випадку задача стійкості зведена до послідовного розв'язання плоскої задачі теорії пружності (1,3), тобто знаходження зусиль N_1^0, N_2^0, S^0 і розв'язку власне задачі стійкості, тобто визначення таких значень параметра λ з рівняння (2), при яких, поряд із початковим невикривленим станом, існують нові згинні стани рівноваги пластини. Найменше зі значень λ буде критичним, тобто при його перевищенні початковий невикривлений стан перестає бути стійким.

Для розв'язання плоскої задачі теорії пружності складено функціонал $I \mathbf{U}^-$, який мінімізується на множині функцій, що задовольняють, принаймні, кінематичним крайовим умовам. Структура розв'язку плоскої задачі теорії пружності може бути обрана у формі (7).

Внаслідок розв'язання плоскої задачі теорії пружності знайдені переміщення u, v та зусилля N_1^0, S^0, N_2^0 в середині області Ω і зроблено перехід до розв'язання диференціального рівняння (2).

Для знаходження критичних значень параметра λ в даній роботі використано енергетичний критерій стійкості у формі Брайана, відповідно до якого

$$\delta \Pi = 0, \quad (8)$$

$$\text{де } \Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} D_1 w_{,11}^2 + 2D_1 v_2 w_{,22} w_{,11} + D_2 w_{,22}^2 + 4D_k w_{,12}^2 d\Omega + \\ + \frac{1}{2} \lambda \int_{\Omega} N_1^0 w_{,1}^2 + 2S^0 w_{,1} w_{,2} + N_2^0 w_{,2}^2 d\Omega - \text{повна потенційна енергія системи.}$$

Таким чином, розв'язання диференціальних рівнянь (1,2) при відповідних граничних умовах зведено до системи лінійних алгебраїчних рівнянь та задачі на власні значення. Узагальнена задача на власні значення вирішена чисельними методами: за допомогою розкладання Холецького, перетворення Хаусхолдера та QR-алгоритму.

Для розв'язання задачі про коливання пластини функція прогину подана в такому вигляді:

$$\bar{w}(x, y, t) = w(x, y) \cdot [\cos \Lambda t + b \sin \Lambda t], \quad (9)$$

де Λ – частота власних коливань пластини, яка була знайдена за допомогою критерію:

$$\delta (\Pi - T) = 0, \quad (10)$$

$$\text{де } T = \frac{\rho h \Lambda^2}{2} \int_{\Omega} w^2 d\Omega - \text{кінетична енергія,}$$

Π – повна потенційна енергія системи.

Для розв'язання отриманої задачі попередньо необхідно визначити напруги або зусилля N_1, N_2, S , розподілені усередині пластини. У залежності від засобу закріплення краю, було обрано структурну формулу для функції прогину. Потім на підставі умови стаціонарності (10) розв'язано задачу на власні значення. При розв'язанні задачі про коливання пластини, одночасно з частотами, були знайдені також критичні навантаження. Застосовуючи динамічний метод, вважаємо, що пластині, яка знаходилася в стані рівноваги, надані довільне початкове відхилення і початкова швидкість у поперечному напрямку. Диференціальне рівняння руху, тобто рівняння поперечних коливань складено з урахуванням подовжніх сил; до складу цього рівняння λ увійшло як параметр. Частоти власних коливань пластини Λ залежать від розмірів, пружних сталих пластини і від λ . Найменше відмінне від нуля значення λ , що відповідає переходові від незатухаючих коливань (9) до руху, який характеризується необмежено зростаючими відхиленнями від плоскої форми, і є критичним.

Динамічний метод разом із теорією R-функцій використано вперше. Його застосування ускладнює алгоритм розв'язання задачі стійкості, проте дозволяє в той же час знаходити власні частоти пластин при неоднорідному докритичному стані. Застосування двох методів (динамічного

і статичного) для розв'язання даного класу задач дає можливість судити про достовірність результатів.

У третьому розділі роботи запропоновано новий метод для дослідження закритичної поведінки ортотропних пластин, навантажених зусиллями у своїй площині. Лінеаризація нелінійної системи рівнянь базується на основі ітераційного методу. У цьому випадку система (5,6) може бути представлена в такій формі:

$$AU_i = l \cdot w_{i-1}, \quad (11)$$

$$D_1 \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w_i}{\partial y^4} = \left(N_{1i} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + 2S_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial y} + N_{2i} \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \right) + q, \quad (12)$$

де i - номер ітерації.

Таким чином, розв'язання системи (5, 6) зводиться до послідовного розв'язання рівнянь (11,12) у циклі. За початкове наближення функції прогину узяті нульові значення. На першому кроці з обраним початковим наближенням розв'язана лінійна задача згину пластин. Отримане рішення є початковим наближенням для геометрично нелінійної задачі згину пластин. Задачі (11,12) розв'язуються доти, доки різниця між коефіцієнтами функції прогину на суміжних кроках не буде достатньо малою.

Розв'язок диференціального рівняння (12) було отримано із застосуванням енергетичного критерію стійкості у формі Брайана (8).

Для розв'язання системи (11) виведено функціонал

$$\begin{aligned} I(u_1, v_1) = & \int_{\Omega} \left\{ \frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2} u_{1,1}^2 + \frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2} v_{1,2}^2 + \frac{E_1\nu_2 + E_2\nu_1}{1-\nu_1\nu_2} u_{1,1}v_{1,2} + G u_{1,2}^2 + v_{1,1}^2 \right. \\ & + w_1^2 \left(\frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2} u_{1,1} + \frac{E_2\nu_1}{1-\nu_1\nu_2} v_{1,2} \right) + w_2^2 \left(\frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2} v_{1,2} + \frac{E_1\nu_2}{1-\nu_1\nu_2} u_{1,1} \right) + \\ & + G u_{1,2} + v_{1,1} w_1 w_2 + 2 \left[\frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2} u_{0,1} u_{1,1} + \frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2} v_{0,2} v_{1,2} + \right. \\ & \left. \frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2} v_{0,2} u_{1,1} + u_{0,1} v_{1,2} + G u_{0,2} + v_{0,1} u_{1,2} + v_{1,1} \right] \} d\Omega + \\ & + \int_{\partial\Omega} \left\{ \left[\left(\frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2} w_1^2 + \frac{E_1\nu_2}{1-\nu_1\nu_2} w_2^2 \right) \omega_1 + 2G w_1 w_2 \omega_2 \right] u_1 + \right. \\ & \left. + \left[\left(\frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2} w_2^2 + \frac{E_2\nu_1}{1-\nu_1\nu_2} w_1^2 \right) \omega_2 + 2G w_1 w_2 \omega_1 \right] v_1 - 2 u_{1n} F_1^0 + v_{1n} F_2^0 \right\} dS, \end{aligned}$$

мінімум якого досягається на розв'язку задачі. Передбачається, що функція прогину w відома з попереднього кроку ітерації, а для переміщень u, v індекс i випускається.

При розв'язанні задачі методом Релея-Рітца функції переміщень задаємо у вигляді рядів

$$w = \sum_{i=1}^N a_i B_0 \Phi_i, \quad \bar{u} = \sum_{i=1}^{n_1} c_i B_1 \Phi_i, \quad \bar{v} = \sum_{i=n_1+1}^{n_2} c_i B_2 \Phi_i,$$

де B_0, B_1, B_2 – оператори відповідних структур розв'язків; a_i, c_i – невизначені коефіцієнти; Φ_i – деяка повна система функцій, наприклад, поліноми Чебишева, тригонометричні, степеневі або інші. Невизначені коефіцієнти знаходяться з умов мінімуму відповідних функціоналів, тобто із систем алгебраїчних рівнянь

$$\frac{\partial I_1}{\partial a_i} = 0, \quad i = \overline{1, N}; \quad \frac{\partial I_2}{\partial c_i} = 0, \quad i = \overline{1, n_2},$$

або в матричній формі

$$AX = B, \quad \hat{A}\hat{X} = \hat{B},$$

де $X = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_N]$, $\hat{X} = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_{n_2}]$.

На базі розробленого методу в рамках системи “POLE” створене математичне забезпечення, що дозволяє робити розрахунок напружено-деформованого стану в стадії закритичної поведінки пластин при різних умовах закріплення країв і засобах навантаження. Дано приклад робочої програми на мові RL із коментарями.

У четвертому розділі наведені результати чисельних досліджень із проблем стійкості, власних коливань і поведінки після втрати стійкості для пластин, навантажених у своїй площині. Спочатку наведено опис розв'язку тестових задач для пластин канонічної форми. Достовірність результатів розрахунків із достатньо великою точністю підтверджена при порівнянні даних, отриманих розробленими в дисертаційній роботі методами, із даними, обчисленими іншими підходами і методами. Використання методу R-функцій надало можливість провести розрахунки для пластин неканонічної форми за різних граничних умов. Універсальність алгоритму дозволяє варіювати параметри (форма, умови навантаження і закріплення країв, властивості матеріалу), не змінюючи алгоритму, що, зокрема, досягається завдяки використанню побудованих структурних формул.

Як приклади, нижче подані результати кількох задач, розглянутих в роботі. Спочатку досліджено власні коливання ортотропної пластини (рис. 1), навантаженої зусиллями P , прикладеними паралельно осі OY . Вважаємо, що пластина затиснена по зовнішній межі, а межа внутрішнього кола – вільна.

Задача була розв'язана з використанням динамічного методу при таких значеннях параметрів: пластина виготовлена з фанери 2-го типу, при напрямку осі OX поперек волокон сорочки, тобто

$$E_1 = 0,6 \cdot 10^5, \quad E_2 = 1,2 \cdot 10^5, \quad G = 0,07 \cdot 10^5, \quad \nu_1 = 0,036, \quad \nu_2 = 0,071;$$

$c/a=0,3; R/a=0,1; f/a=0,1; s/a=0,3$. На рис. 2 зображена залежність частоти $\Lambda = \frac{\lambda}{a^2} \sqrt{\frac{D_3}{\rho h}}$ від розміру

прикладеного навантаження $P = k \frac{\pi^2 \sqrt{D_1 D_2}}{a^2}$ при варіюванні розмірів врізів d/a . На підставі

розрахункових досліджень встановлено, що зростання глибини врізів збільшує стійкість.

Для цієї ж пластини за допомогою статичного методу були знайдені критичні навантаження у залежності від розміру врізів:

при $d/a=0,45 - k=3,41; d/a=0,4 - k=3,70; d/a=0,35 - k=4,12; d/a=0,3 - k=5,15$, що добре узгоджується з даними, наведеними на рис. 2

Далі досліджено закритичну поведінку ортотропної квадратної пластини з круглим отвором, навантажену паралельно осі ОХ (рис. 3) в залежності від відношення радіусу вписаної окружності до сторони квадрату.

Матеріал пластини був вибраний той самий як у прикладі 1. При дослідженнях залежності

параметру навантаження $k = \frac{a^2 P}{\pi^2 \sqrt{D_1 D_2}}$ від максимального прогибу $w_0 = \frac{w_{max}}{h}$ варіювався

радіус отвору. Відношення $R/a=0$ відповідає квадратній пластині без отвору. Для цього випадку щодо параметру k були надані значення від 2,55 до 4, тоді йому відповідний обчислений прогиб w_0 зростав з 0 до 2,2. Встановлення начального значення параметру k при розрахунках

обумовлено тим, що воно є критичним. В роботі Лехницького С.Г. для $\frac{R}{a}=0$ отримане значення

параметру критичного навантаження $k=2,55$, що узгоджується з даними дисертації. Збіг результатів дозволяє зробити висновок щодо вірогідності розробленого методу для дослідження закритичної поведінки ортотропних пластин, навантажених зусиллями в своїй площині.

У результаті обчислювального експерименту було знайдено критичні навантаження, з яких

починалось дослідження закритичної поведінки. При різних відношеннях $\frac{R}{a} : 0,1; 0,15; 0,2$ були

отримані значення параметру критичного навантаження k відповідно: 2,14; 1,60; 1,25. Дані, які наведені в роботі, свідчать про те, що стійкість ортотропної пластини зростає при зменшенні радіусу внутрішнього кола. Це пов'язано з тим, що внутрішня границя області залишається вільною.

Наприкінці було проведено дослідження стійкості зубчастого диску пили. Характер розподілу напружено-деформівного стану диска залежить від значень його геометричних характеристик: діаметру, товщини, форми зуб'їв, радіусу скруглення западини між зуб'ями, їх висоти та шагу. Однаковою мірою, на значення напруг впливають як зовнішні силові фактори

(сила порізки, сила подачі, кутова швидкість обертання диску) так і показники об'єктного середовища (температура та хімічний склад полоси металу, що обробляється).

У режимі реальної роботи дискова пила повинна знаходитися в плоскому стані й неприпустимо прикладати до неї навантаження близькі, а тим більш перевищуючі критичне. У зв'язку з цим виникає необхідність в дослідженні величин критичних навантажень (при яких плоска форма перестає бути стійкою та виникають нові ізгибні форми рівноваги) в залежності від розмірів внутрішнього та зовнішнього радіусів пили, форми зуба, відношення між прикладеними силами P_c (сила різання) і P_p (сила подачі).

У відповідності до аналізу літературних джерел можна зробити висновок про те, що напруження, які призводять до створення щелин, виникають, як правило, у впадині попереду зуба, який знаходиться в активному робочому стані. Отже, достатньо виділити один зуб, а всю іншу частину пили подати у вигляді круглого диску з отвором, як показано на рис. 4.

Задача була розв'язана при наступних значеннях параметрів: пила виготовлена з бистроріжучої сталі P18 з модулем пружності $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ та коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0,28$; товщина диску $h = 0,006 \text{ м}$, шаг між зуб'ями $t = 0,05 \text{ м}$, радіус скруглення впадини $r_1 = 0,01 \text{ м}$, ширина половини зуба $\epsilon = 0,001 \text{ м}$, половина кута між зуб'ями $\alpha = 30^\circ$.

Також досліджено величину критичного навантаження для сили P_c в залежності від радіуса зовнішньої окружності та кількості координатних функцій для функції прогибу. При розв'язку цієї задачі сталими були величини: кутове прискорення $\omega = 50 \text{ с}^{-1}$, радіус внутрішнього отвору $R_1 = 0,15 \text{ м}$, товщина $h = 0,006 \text{ м}$. Для наближення кожного переміщення u, v вибрано 78 координатних функцій. Крайові умови для функції прогибу w були вибрані з урахуванням того, що пила насажена на вал і не може переміщуватись у поперечному напрямку. Тобто вважалось, що пластина вільно оперта на внутрішній частині кола й вільна на зовнішній. Результати досліджень збігу розв'язку наведені в табл. 1.

Таблиця 1

Величина критичного навантаження P_c^{kp} , Н

в залежності від кількості координатних функцій для w (N)

N	$R, \text{ м}$			
	0,4	0,5	0,6	0,7
45	22946	19002	16706	15824
55	20737	17668	15825	15108
66	20074	17192	15454	14780

78	18536	16083	14764	14251
91	18109	15800	14558	14029

При малих радіусах зовнішній окружності спостерігається кращий збіг розв'язку. При $R=0,7$ м, починаючи з 105 координатних функцій, накопичується похибка обчислень. Зменшення радіусу зовнішнього кола впливає на зростання стійкості пили.

Дослідимо зміну значень критичного навантаження в залежності від відношення сил P_p і P_c . Результати наведені в табл. 2.

Таблиця 2

Величина критичного навантаження P_c^{kp} , Н
в залежності від відношення прикладених навантажень

$\frac{P_p}{P_c}$	$R, \text{ м}$			
	0,4	0,5	0,6	0,7
1,2	22837	19697	18048	17282
1,6	18109	15800	14558	14029
2,0	14905	13072	12078	11687
2,4	12631	11106	10273	9973,6
2,8	10942	9636,3	8916,9	8678,9

Зі збільшенням прикладеного навантаження пила втрачає стійкість швидше. Цей факт очевиден з фізичної точки зору та знаходить ще одно підтвердження при аналізі значень показників, отриманих у розрахунках (табл. 2).

При початкових даних $R=0,4$ м, $R_1=0,1$ м, $\frac{P_p}{P_c}=1,6$ задача стійкості з урахуванням швидкості обертання була розв'язана в системі "POLE", результати досліджень в залежності від кількості координатних функцій наведені в табл. 3.

Таблиця 3

Величина критичного навантаження P_c^{kp} , Н

Тип задачі	N				
	45	55	66	78	91
з обертанням	23120	21567	20957	19719	19366
без обертання	22348	20784	20178	18924	18574

Для перевірки отриманих результатів методом скінчених елементів була розв'язана поставлена задача без урахування обертання: $P_c^{kp} = 18196,4 \text{ Н}$. Різниця між результатами, отриманими різними методами (MSE та RFM), складає 2%.

ВИСНОВКИ

За допомогою проведених досліджень досягнуто основної мети роботи – розроблено новий метод розв'язання задач стійкості та коливань пластин довільної форми, навантажених у своїй площині, а також досліджено закритичну поведінку ортотропних пластин. Розв'язання цієї задачі було здійснено за допомогою варіаційно-структурного, ітераційного, динамічного та статичного методів, що дозволило обґрунтовано виконати дослідження відповідних математичних моделей.

До головних результатів роботи належать:

1. На базі теорії R-функцій розроблено новий метод розв'язання задач стійкості ортотропних пластин при неоднорідному докритичному стані. Цей метод було реалізовано як за допомогою статичного, так і динамічного підходів, що надало можливість перевірити достовірність результатів.
2. Вперше запропоновано метод розв'язання задач про коливання ортотропних пластин, навантажених у своїй площині, який використовує динамічний підхід та теорію R-функцій, що сприяло можливості досліджувати динамічну поведінку пластин практично довільної форми.
3. Надано подальший розвиток конструктивним засобам теорії R-функцій у вигляді побудованих структурних формул для функцій переміщень, які враховують фізичні (ортотропність матеріалу, способи закріплення та навантаження) та геометричні (форма пластини в плані) параметри у розв'язаних задачах.
4. Запропоновано схему лінеаризації для дослідження закритичної поведінки ортотропних пластин складної форми та отримано конкретні розв'язки задач.
5. Створено програмне забезпечення для системи "POLE" у вигляді конкретних програм, побудованих на вхідній мові системи.
6. Досліджено точність та збіжність запропонованих методів на низці тестових задач, а також одержані чисельні результати для ряду нових задач стійкості та коливань попередньо навантажених пластин складної форми для різних варіантів закріплення, які можуть бути використані при проектуванні конкретних конструктивних елементів.

ОПУБЛІКОВАНІ ПРАЦІ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Курпа Л.В., Линник А.Б. Исследование закритического поведения пластин, нагруженных в

- своей плоскости с помощью метода R-функций // Доповіді Національної академії наук України. – 2001. – №3. – С. 57-61.
2. Курпа Л.В., Линник А.Б. Решение задач устойчивости и колебаний пластин сложной формы, нагруженных в срединной плоскости // Проблемы машиностроения. – 1999. – Т. 2, – №1-2. – С. 93-102.
 3. Линник А.Б. Программное обеспечение системы POLE для исследования закритического поведения пластин // Радиоэлектроника и информатика. – 2000. – №2. – С. 123-128.
 4. Линник А.Б. Решение задачи устойчивости изотропной пластины при неоднородном докритическом состоянии с помощью вариационно структурного метода // Новые решения в современных технологиях. Вестник Харьк. Гос. политехн. ун-та. - Харьков: ХГПУ. – 1998. – Вып. 17. – С. 53-55.
 5. Курпа Л.В., Линник А.Б. Застосування теорії R-функцій до задач стійкості та коливань ортотропних пластин // Вісник Запорізького державного університету. – 2000. – №1. – С. 67-71.
 6. Курпа Л.В., Линник А.Б. Исследование на устойчивость ортотропных пластин сложной формы в плане // Труды междунар. науч.-техн. конф. “Информационные технологии: наука, техника, технология, образование, здоровье” (MicroCad 98). – Ч. 1. – Харьков, Мишкольц, Магдебург: Харьк. гос. политехн. ун-т, Мишкольц. ун-т, Магдебург. ун-т. – 1998. – С. 75-79.
 7. Линник А.Б. Об одном подходе к исследованию закритического поведения пластин // Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: Збірка наукових праць ХДПУ. Вип. 8. – Харків: Харк. держ. політехн. ун-т. – 2000. – С. 141-142.
 8. Курпа Л.В., Линник А.Б. Применение метода R-функций к задачам о колебаниях и устойчивости пластин, нагруженных в срединной плоскости // Тез. докл.: Международная конференция: “Моделирование динамических систем и исследования устойчивости”. – К.: КУ. – 1999. – С. 32.
 9. Линник А.Б. Расчет пластин на устойчивость при неоднородном докритическом состоянии методом R-функций // Збірник доповідей 1-ої міської науково-практичної конф. “Актуальні проблеми сучасної науки у дослідженнях молодих вчених м. Харкова”. – Харків: АТ “Бізнес-Інформ”. – 1997. – С. 56-58.

АНОТАЦІЯ

Линник Г.Б. Розв'язок задач стійкості пластин при неоднорідному докритичному стані за допомогою методу R-функцій. - Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.02.04 - механіка деформівного твердого тіла. - Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, Харків, 2002.

Дисертаційна робота присвячена розробці нового методу для розв'язання задач стійкості та коливань ортотропних пластин, навантажених у своїй площині, та дослідження закритичної поведінки пластин довільної форми в плані. Запропонований метод базується на спільному застосуванні варіаційних методів і теорії R-функцій. Для розв'язання задач стійкості при неоднорідному докритичному стані та коливань пластин розроблено метод, що містить в собі динамічний та статичний підходи. Надано подальший розвиток конструктивним засобам теорії R-функцій у вигляді побудованих структурних формул щодо функцій переміщень, які задовольняють усім або лише головним крайовим умовам. Розроблено програмне забезпечення, що дозволяє розв'язувати широкий клас задач стійкості та коливань ортотропних пластин при неоднорідному докритичному стані, а також дослідити їх закритичну поведінку.

Ефективність та достовірність запропонованого методу підтвержена цілою низкою чисельних результатів, які порівнювались з точними розв'язками або отриманими іншими методами. Знайдено значення критичного навантаження, власні частоти та форми коливань, а також досліджено закритичну поведінку конкретних елементів тонкостінних конструкцій при зміні їхньої форми, матеріалу, умов навантаження та закріплення країв.

Ключові слова: ортотропні пластини, метод Рітца, теорія R-функцій, динамічний і статичний підходи, структури розв'язків, закритична поведінка, стійкість, коливання, програмуюча система "POLE".

АННОТАЦІЯ

Линник А.Б. Решение задач устойчивости пластин при неоднородном докритическом состоянии с помощью метода R-функций. - Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 01.02.04 - механика деформируемого твердого тела. - Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Харьков, 2002.

Диссертационная работа посвящена разработке нового метода для решения задач устойчивости и колебаний ортотропных пластин, нагруженных в своей плоскости, и исследования закритического поведения пластин произвольной формы в плане. Для решения задач устойчивости при неоднородном докритическом состоянии разработан метод, который использует статический подход и теорию R-функций. В этом случае решение задачи устойчивости было сведено к последовательному решению плоской задачи теории упругости для учета

неоднородности напряженно-деформированного состояния и собственно решению задачи устойчивости. Были получены функционалы, достигающие минимума на решении указанных задач. Согласно методу Ритца, функции перемещений разлагались в ряд по некоторым координатным функциям и решение задачи устойчивости заключалось в решении системы линейных алгебраических уравнений и задачи на собственные значения.

Собственные частоты и формы колебаний предварительно нагруженных пластин были найдены с помощью нового подхода, основанного на вариационно-структурном и динамическом методах. Применение динамического метода дало возможность наряду с частотами определить также и значения критических нагрузок, которые соответствовали нулевым частотам.

Предложен метод решения задачи исследования закритического поведения, который основан на итерационном и вариационно-структурном методах. Исходная нелинейная система дифференциальных уравнений сводится в этом случае к решению в цикле систем уравнений. В качестве начального приближения для функции прогиба выбиралось нулевое значение. С помощью полученных функционалов и разложений для перемещений задача о закритическом поведении была сведена к последовательному решению систем линейных алгебраических уравнений. Элементы матриц Ритца получены для ортотропных и изотропных пластин.

Для минимизации функционалов, полученных в работе, были построены координатные функции, удовлетворяющие заданным краевым условиям. В связи с этим было выполнено дальнейшее развитие конструктивных средств теории R-функций в виде построенных структурных формул, удовлетворяющих всем или только главным краевым условиям. Разработано программное обеспечение, которое позволяет решать широкий класс задач устойчивости и колебаний ортотропных пластин при неоднородном докритическом состоянии, а также исследовать их закритическое поведение.

Эффективность и достоверность предложенного метода подтверждена целым рядом полученных численных результатов, которые сравнивались с точными решениями и результатами, полученными другими методами. Найдены значения критической нагрузки, собственные частоты и формы колебаний, а также исследовано закритическое поведение конкретных элементов тонкостенных конструкций при изменении их формы, материала, условий нагружения и закрепления краев.

В качестве технического приложения была решена задача устойчивости пилы с режущей рабочей кромкой в виде зубчатого диска. Исследовались значения критических нагрузок для силы резания в зависимости от геометрических и силовых параметров. Также анализировалось напряженно-деформированное состояние дисковых пил. Было проведено сравнение результатов, полученных с помощью вариационно-структурного метода и МКЭ.

Ключевые слова: ортотропные пластины, метод Ритца, теория R-функций, динамический

и статический методы, структуры решения, закритическое поведение, устойчивость, программирующая система “POLE”.

SUMMARY

Linnik A.B. Solving problems of stability plates at unhomogeneous before buckling state with the help of the R-functions method. - Manuscript.

Thesis for the scientific degree of Candidate of Technical Science by speciality 01.02.04 - mechanics of the deformable solids. N.A. Podgorny's Institute for Problems in Machinery NAS Ukraine, Kharkiv, 2002.

The work is devoted to the development of the new method for the solution of such problems: stability and vibration of orthotropic plates loaded in the plane, research of post buckling behaviour of a plate with arbitrary form in the plan. The proposed method is based on joint application of variational methods and R-functions theory. For the solving of stability problems at unhomogeneous before buckling state and vibrations ones the developed method applies the dynamic and static approaches. The constructive means RFM have received the further development as the constructed structural formulas satisfying given on boundary conditions. The created software makes possibility to solve a wide class of tasks of stability and vibration orthotropic plates at unhomogeneous before buckling state, and also to investigate their post buckling behaviour.

The efficiency and reliability of the proposed method is confirmed by a lot of received numerical results, which compare with known analytical and received another methods results. The value of critical load, natural frequencies and forms of vibrations are found, and also is investigated post buckling behaviour of concrete elements of thin-walled designs when their form, material, conditions loading and fastening of edges changes.

Key words: orthotropic plate, Ritz's method, theory of R-functions, dynamic and static approaches, structure of the solution, post buckling behaviour, stability, vibration, programming system “POLE”.