

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МАШИНОБУДУВАННЯ ім. А.М. ПІДГОРНОГО

САЛО Валентин Андрійович

УДК 539.3

**ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ
ЗАДАЧ СТАТИКИ НЕТОНКИХ ОРТОТРОПНИХ ОБОЛОНОК
З ОТВОРАМИ ДОВІЛЬНИХ РОЗМІРІВ І ФОРМ**

01.02.04 – Механіка деформівного твердого тіла

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора технічних наук

Харків – 2003

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Національному технічному університеті
"Харківський політехнічний інститут" Міністерства освіти і науки України.

Науковий консультант: – доктор технічних наук, професор

Морачковський Олег Костянтинович,
Національний технічний університет
"Харківський політехнічний інститут",
завідувач кафедри теоретичної механіки.

Офіційні опоненти: – доктор технічних наук, професор

Кантор Борис Якович,
Інститут проблем машинобудування
ім. А.М. Підгорного НАН України,
завідувач відділу міцності тонкостінних конструкцій

доктор технічних наук, професор

Грищак Віктор Захарович,
Запорізький державний університет
Міносвіти та науки України,
завідувач кафедри прикладної математики.

доктор фізико-математичних наук, професор

Чехов Валерій Миколайович,
Таврійський національний університет
ім. В.І. Вернадського,
завідувач кафедри прикладної математики.

Провідна установа: – Інститут технічної механіки НАН і НКА України,
відділ механіки деформівного твердого тіла,
м. Дніпропетровськ.

Захист відбудеться " 26 " лютого 2004 р. о 14-00 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д
64.180.01 при Інституті проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України за
адресою: 61046, м. Харків, вул. Дм. Пожарського, 2/10.

З дисертацією можна ознайомитись у науково-технічній бібліотеці ІПМаш ім. А.М. Підгорного
НАН України за адресою: 61046, м. Харків, вул. Дм. Пожарського, 2/10.

Автореферат розісланий " 21 " січня 2004 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради
к.т.н., с.н.с.

Б.П.Зайцев

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. У сучасній техніці оболонки з отворами є одними з найбільш відповідальних конструктивних елементів, від міцності і жорсткості яких залежить працездатність і надійність конструкції в цілому.

Широке використання в інженерних конструкціях оболонок із сучасних матеріалів, а також ускладнення конструктивних форм оболонкових елементів приводять до необхідності розвитку механіки оболонок, побудови уточнених моделей і розрахункових схем.

У науковій літературі накопичено великий доробок по методах розрахунку на міцність і жорсткість пружних оболонок. Разом з тим у механіці деформівного твердого тіла залишаються актуальними проблеми, що пов'язані із створенням ефективних методів для визначення напружено-деформованого стану (НДС) статично навантажених анізотропних і неоднорідних оболонок довільної товщини, з отворами довільних розмірів і форм. Істотний прогрес у цьому напрямку є неможливим без застосування сучасних ЕОМ, залучення повної системи співвідношень тривимірної теорії пружності й узагальнених теорій оболонок, що ґрунтуються на різних підходах до зведення розв'язку тривимірної задачі регулярною послідовністю розв'язків двовимірних задач.

З огляду на потреби в уточнених розрахунках нетонких анізотропних оболонок з отворами, які розповсюджені у різних галузях техніки, розробка науково обґрунтованих, універсальних, надійних і алгоритмічно простих, ефективних при чисельній реалізації методів розрахунку зазначених оболонок, є актуальною проблемою, розв'язання якої має важливе наукове і практичне значення.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Результати роботи отримані при виконанні держбюджетних науково-дослідних тем: “Створення теорії і методів розрахунку тонкостінних конструкцій з ізотропних і ортотропних матеріалів, що пошкоджуються при повзучості” (2000–2003 рр., № ДР 0100U001650), “Розробка математичного і алгоритмічного забезпечення високоточних систем навігації і керування” (2001–2003 рр., № ДР 0101V001803), “Розробка наукових основ і методів параметричного синтезу механічних систем, що перебувають під впливом випадкових зовнішніх збурювань, на підставі даних експериментальних досліджень” (2002–2004 рр., № ДР 0102U000978).

Мета і задачі дослідження. Метою роботи є розробка, теоретичне і чисельне обґрунтування чисельно-аналітичного методу розв'язання задач статички однорідних і неперервно неоднорідних по товщині нетонких ортотропних оболонок з отворами довільних розмірів і форм.

Для досягнення сформульованої мети поставлені і вирішені такі задачі:

- теоретично обґрунтовано використання змішаного варіаційного принципу Рейсснера для вирішення наукової проблеми по темі дисертаційної роботи;

- наведено математичні постановки задач статички нетонких оболонок на основі загальних рівнянь тривимірної теорії пружності і принципу Рейсснера;
- теоретично досліджено питання збіжності методу Рітца при пошуку стаціонарної точки неекстремального функціонала Рейсснера;
- отримано апостеріорні інтегральні оцінки точності наближених розв'язків варіаційних задач для змішаного функціонала Рейсснера і на основі запропонованих оцінок виконано чисельні дослідження збіжності поданих у роботі розв'язків крайових задач різної складності;
- запропоновано аналітичні структури розв'язків, що точно задовольняють усі граничні умови крайових задач статички нетонких оболонок з отворами, сформульованих на основі варіаційного принципу Рейсснера;
- створено програмні розробки для ПЕОМ, що реалізують чисельно-аналітичний метод розв'язання задач статички нетонких оболонок з отворами і процеси регулярного уточнення моделі оболонки;
- проведено дослідження щодо достовірності одержаних в роботі результатів, окремі з яких порівняно з відомими в науковій літературі аналітичними, чисельними й експериментальними даними;
- розв'язано ряд нових задач статички нетонких ортотропних оболонок з отворами, що мають теоретичний і практичний інтерес.

Об'єктом дослідження є пружні однорідні і неоднорідні по товщині ортотропні оболонки з отворами довільних розмірів і форм.

Предметом дослідження є поля напружено-деформованого стану в оболонках з отворами.

Методи дослідження містять:

- метод І.М. Векуа для побудови регулярних послідовностей процесу уточнення моделей деформування оболонок;
- методи і варіаційні нерівності теорії операторів у гільбертовому просторі для доведення достатньої ознаки збіжності методу Рітца при пошуку стаціонарної точки неекстремального функціонала Рейсснера;
- метод подвійності теорії опуклого аналізу для математичного обґрунтування апостеріорних оцінок точності розв'язків змішаних варіаційних задач;
- теорію R-функцій для створення аналітичних структур розв'язків, що точно задовольняють крайові умови на граничних поверхнях оболонок;
- обчислювальні методи для розрахунків НДС оболонок.

Наукова новизна одержаних результатів. Виконані в роботі дослідження дозволили одержати нові наукові результати:

- розроблено і науково обґрунтовано новий чисельно-аналітичний метод розв'язання в тривимірній постановці задач статички однорідних і неоднорідних по товщині нетонких ортотропних оболонок з отворами довільних розмірів і форм;
- уперше сформульовано і доведено на основі використання теорем і варіаційних нерівностей теорії операторів достатню ознаку збіжності методу Рітца при пошуку стаціонарної точки неекстремального функціонала Рейсснера;
- створено нові структури розв'язків, що точно задовольняють усі граничні умови для просторових крайових задач статички нетонких оболонок;
- на основі методу подвійності теорії опуклого аналізу запропоновано апостеріорні інтегральні оцінки точності наближених розв'язків варіаційних задач для змішаного функціонала Рейсснера;
- вперше отримано нові кількісні і якісні закономірності статички послаблених отворами нетонких ортотропних оболонок з неоднорідними по товщині властивостями матеріалів.

Практичне значення одержаних результатів. Практичну цінність роботи складає створений новий чисельно-аналітичний метод розрахунку оболонок з отворами, який можна використовувати при проектуванні відповідальних оболонкових елементів конструкцій сучасної техніки. Розроблений метод дозволив одержати уточнені розв'язки ряду прикладних задач, зокрема поля НДС для послабленого періодичною системою отворів корпусу гідромотора.

Результати роботи впроваджені в практику АО “СКБ Укрелектромаш” (м. Харків) при аналізі міцності послабленого отвором вала асинхронного двигуна спеціального призначення й УМГ “Харківтрансгаз” (м. Харків) при визначенні та аналізі НДС газопроводів. Це підтверджено відповідними актами про використання розробок і результатів наукових досліджень дисертаційної роботи.

Результати роботи використовуються також у навчальному процесі Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут".

Особистий внесок здобувача. Усі результати, наведені в дисертаційній роботі, отримані здобувачем самостійно. У спільних публікаціях здобувачу належать: у роботах [3, 18] – математичне обґрунтування практичного застосування апостеріорної оцінки точності наближених розв'язків задач, сформульованих на основі принципу Рейсснера; у роботах [4, 29] – математичне обґрунтування застосування методу Рітца для функціонала Рейсснера; у роботах [12] – математична постановка, метод розв'язання задачі і всі чисельні результати розрахунків; у роботі [13] – математичні дослідження запропонованої оцінки точності наближених розв'язків задач; у роботі [14] – математичні дослідження двосторонньої оцінки точності розв'язків задач; у роботі [15] – математичне обґрунтування достатньої ознаки збіжності методу Рітца для варіаційного принципу

Рейсснера; у роботі [31] – аналіз властивостей чисельної реалізації різних аналітичних виразів функціонала Рейсснера.

Окремі теоретичні дослідження за темою дисертаційної роботи обговорювалися з науковим консультантом д.т.н., проф. О.К. Морачковським.

Апробація результатів дисертації. Основні положення і результати дисертаційної роботи доповідалися й обговорювалися на наукових конференціях, симпозиумі, з'їзді: 2-й Всесоюзній конференції по теорії пружності, Тбілісі, 1984 р.; 3-й Всесоюзній конференції “Змішані задачі механіки деформівного тіла”, Харків, 1985 р.; 7-й Всесоюзній науково-технічній конференції по керованих і автоматичних механічних приводах і передачах, Одеса, 1986 р.; 1-му Всеукраїнському з'їзді по теорії механізмів і машин, Харків, 1997 р.; міжнародних науково-технічних конференціях “Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я”, Харків, 1997-2003 рр.; міжнародних науково-технічних конференціях “Фізичні і комп'ютерні технології в народному господарстві”, Харків, 2000-2003 рр.; 6-му Міжнародному симпозиумі українських інженерів-механіків, Львів, 2003 р.

Основні результати дисертаційної роботи обговорювалися на наукових семінарах кафедри “Теоретична механіка” НТУ “ХПІ” (керівник – д.т.н., проф. Морачковський О.К.) протягом 1997 – 2003 рр.; на засіданні вченої ради інженерно-фізичного факультету НТУ “ХПІ” (2002 р.) і на науково-технічній проблемній раді ПМаш ім. А.М. Підгорного НАН України (Харків, 2003 р.).

Публікації. За результатами досліджень, наведених у дисертаційній роботі, опубліковано 34 (з них 25 без співавторів) наукові праці, серед яких 1 – монографія (без співавторів); 26 – статті, опубліковані в наукових журналах і збірниках наукових праць з переліку фахових видань ВАК України; 7 – доповіді і тези, опубліковані в збірниках робіт наукових конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, п'ятих розділів, висновків, списку використаних літературних джерел з 220 найменувань (на 21 стор.) і додатку. Повний обсяг роботи складає 317 стор., у тому числі основний текст – 271 стор., 58 рисунків по тексту, 60 рисунків на 15 стор., 35 таблиць по тексту, 9 таблиць на 5 стор., 5 додатків на 5 стор.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтована актуальність теми дисертації, сформульовані мета й основні задачі досліджень, висвітлені наукова новизна, теоретичне і практичне значення одержаних результатів, надані відомості про публікації, особистий внесок автора, ступінь апробації роботи.

У першому розділі наведена характеристика наближених методів розв'язання задач механіки суцільних середовищ, дано огляд сучасного стану проблеми визначення концентрації напружень в оболонках з отворами, однієї з найважливіших проблем механіки деформівного твердого тіла, у

розв'язанні якої фундаментальні результати одержані в Інституті механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України.

Дослідженням із зазначеної проблеми присвячені роботи Ю.О. Ашмаріна, А.В. Бурлакова, С.П. Гавелі, С.О. Голобородька, Е.І. Григолюка, В.З. Грищака, О.М. Гузя, М.І. Длугача, С.В. Закори, О.І. Зірки, С.О. Калосєрова, В.Г. Карнаухова, Я.Ф. Каюка, О.С. Космодаміанського, А.І. Лур'є, Г.І. Львова, Ю.М. Немиша, В.А. Осадчука, Б.Л. Пелеха, І.М. Пірогова, І.М. Преображенського, А.К. Приварнікова, В.П. Ревенка, Г.М. Савіна, О.О. Сясьського, Л.А. Фільштинського, М.П. Флейшмана, Х.С. Хазанова, І.Ю. Хоми, І.А. Цурпала, Д.І. Чернописького, І.С. Чернишенка, Вал.М. Чехова, Вік.М. Чехова, В.О. Шалдирвана, Ю.О. Шевлякова, К.І. Шнеренка, М.О. Шульги і багатьох інших учених.

За результатами аналізу наукової літератури з теорій та методів розрахунку оболонок з отворами зроблено висновок, що розробка в рамках уточнених теорій ефективних методів розрахунку оболонок з отворами довільних розмірів і форм належить до актуальної проблеми, вирішення якої особливо важливо при розрахунку анізотропних оболонок із сучасних неоднорідних матеріалів. Основним питанням теорії оболонок є проблема переходу від тривимірних задач теорії пружності до двовимірних. Методи побудови двовимірних теорій оболонок можна поділити на дві основні групи: методи, що базуються на прийнятті різних гіпотез (класична теорія і зсувні моделі прикладних теорій) і методи з регулярним процесом наближення до розв'язків тривимірної задачі теорії пружності (асимптотичний метод і метод розкладань по поперечній координаті).

Досить повно вивчено і практично завершено теорію тонких оболонок, що ґрунтується на гіпотезах Кірхгофа-Лява (класична теорія). Основний внесок у розвиток теорії оболонок зробили С.О. Амбарцумян, В.З. Власов, А.С. Вольмір, І.І. Ворович, О.Л. Гольденвейзер, Е.І. Григолюк, Я.М. Григоренко, О.М. Гузь, М.О. Кільчевський, А.І.Лур'є, Х.М.Муштарі, В.В. Новожилов, К.Ф. Черних та ін.

До теорій оболонок, що ґрунтуються на менш жорстких припущеннях, ніж гіпотези Кірхгофа-Лява, віднесені теорії С.П. Тимошенка, С.О. Амбарцумяна, Я.М. Григоренка, П. Нагді, В.В. Пікуля, В.Г. Піскунова, О.О. Рассказова, Е. Рейсснера, В.О. Родіонової та ін. Теоретичні і прикладні аспекти досліджень оболонок на основі різних моделей деформування знайшли своє відображення в роботах А.Т. Василенка, В.Т. Грінченка, В.З. Грищака, В.С. Гудрамовича, В.І. Гуляєва, П.Д. Доценка, В.О. Заруцького, Б.Я. Кантора, М.М. Крюкова, В.Д. Кубенка, Л.В. Курпи, В.А. Максимюка, М.В. Марчука, О.К. Морачковського, М.М. Николишина, В.П. Ольшанського, Н.Д. Панкратової, Б.Л. Пелеха, О.В. Плеханова, Г.Я. Попова, В.С. Проценка, О.П. Прусакова, В.Л. Рвачова, М.С. Синєкопа, І.І. Соколовської, Г.Т. Сулима, М.А. Сухорольського, А.Ф. Улітка, І.Ю. Хоми, В.І. Шваб'юка, Ю.М. Шевченка та ін.

Метод гіпотез застосовується в основному для розрахунку тонких оболонок. Для нетонких оболонок, у задачах по вивченню просторової концентрації напружень біля отворів необхідно залучати тривимірну теорію пружності й узагальнені теорії оболонки, що ґрунтуються на заміні розв'язання тривимірної задачі теорії пружності регулярною послідовністю розв'язків двовимірних задач. Асимптотичні підходи, запропоновані в роботах В.О. Олександрова, І.І. Воровича, О.Л. Гольденвейзера, О.С. Космодаміанського та ін., ґрунтуються на розкладанні розв'язків у ряди по ступенях малого параметра, які в основному залежать від відносної товщини оболонки. Методи, що ґрунтуються на зображенні розв'язків у вигляді розкладень по поперечній координаті наведено в роботах І.М. Векуа, В.О. Баженова, В.І. Гуляєва, О.Ю. Калекіна, М.О. Кільчевського, П.П. Лізунова, Х.М. Муштари, О.В. Плеханова, О.П. Прусакова, І.Г. Терегулова, І.Ю. Хоми та ін.

У розділі докладно проаналізовано відомі у літературі уточнені теорії оболонки. Відзначено, що їхнє різноманіття і притаманні їм недоліки створюють певні ускладнення в виборі і практичному застосуванні теорії оболонки. В більшості теорій використовуються різні гіпотези про деформування оболонки та зміну метрики оболонки по товщині, що обмежує достовірність результатів визначення НДС оболонки, призводить до суттєвих похибок у розрахунках нетонких анізотропних оболонки, при вивченні концентрації напружень біля отворів.

Зроблено висновок, що одним із перспективних шляхів побудови уточненої теорії оболонки є підхід І.М. Векуа. За цим підходом компоненти вектора переміщень і тензора напружень зображено по поліномах Лежандра від поперечної координати, за рахунок чого наближені послідовності є асимптотично збіжними до розв'язків тривимірних задач з необхідною точністю. Поширення підходу І.М. Векуа на нетонкі анізотропні оболонки дано в монографії І.Ю. Хоми. Такий підхід реалізовано для оболонки обертання в роботах П. Чікала з використанням принципу Лагранжа й у роботах О.Ю. Калекіна на основі принципу Кастильяно. У даній дисертації підхід І.М. Векуа використовується вперше на основі принципу Рейсснера для нетонких ортотропних оболонки з отворами.

За даними аналізу наукових праць, що присвячені питанням теорії і методам розрахунку оболонки з отворами, зроблено висновок, що до цього часу залишаються відсутніми науково обґрунтовані й ефективні для чисельної реалізації методи розрахунку на міцність і жорсткість статично навантажених нетонких ортотропних оболонки з отворами довільних розмірів і форм. Вирішення цієї проблеми має важливе наукове і практичне значення.

У **другому розділі** проаналізовані існуючі варіаційні принципи теорії пружності, вклад у розвиток і практичне застосування яких внесли Н.П. Абовський, В.Л. Бердичівський, К. Васідзу, О.С. Вольмір, П.П. Ворошко, К.З. Галімов, О.М. Гузь, Б.Я. Кантор, Р. Курант, К. Ланцош, А.І.

Лур'є, Л.В. Масловська, С.Г. Міхлін, П. Нагді, В.В. Новожилов, В. Прагер, Е. Рейсснер, К. Ректорис, Л.О. Розін, В.І. Слівкер, І.Г. Терегулов, Е. Тонті, К.Ф. Черних та ін.

У розділі відзначені особливості використання в розрахунковій інженерній практиці двоїстих принципів Лагранжа і Кастильяно й узагальнених варіаційних принципів теорії пружності. Виконано порівняльний аналіз існуючих у літературі варіаційних методів, зроблений висновок про те, що для підвищення точності розв'язання крайової задачі і побудови алгоритмів розрахунку уточнених математичних моделей доцільно незалежно визначати параметри напруженого і деформованого станів за допомогою змішаних варіаційних принципів. Обґрунтовано доцільність застосування для розв'язання досліджуваних задач принципу Рейсснера, наведені аналітичні вирази різних форм функціонала Рейсснера, основна форма якого в декартовій системі координат x_i ($i = \overline{1,3}$) має вигляд

де u_i і σ_{ij} – компоненти вектора переміщення \mathbf{u} і тензора напружень $\boldsymbol{\sigma}$; $W \in \mathbb{R}$ – пружний потенціал; F_i – компоненти вектора об'ємних сил \mathbf{F} ; n_j – компоненти одиничного вектора \mathbf{n} зовнішньої нормалі до граничної поверхні Γ досліджуваної просторової області Ω .

Границя Γ складається з частин Γ_u і Γ_σ , на яких задані переміщення u_i^* і компоненти t_i вектора поверхневих напружень \mathbf{t} :

У функціоналі I_R (1) незалежно варіюються вектор \mathbf{u} і тензор $\boldsymbol{\sigma}$, а в точці стаціонарності має місце $\min_u \max_\sigma I_R$. Варіаційний принцип Рейсснера полягає в тому, що варіаційне рівняння Рейсснера еквівалентне крайовим умовам (2), рівнянням рівноваги і співвідношенням між σ_{ij} і компонентами ε_{ij} тензора деформацій $\boldsymbol{\varepsilon}$, у яких ε_{ij} виражені відповідно до співвідношень Коші через компоненти u_i :

де a_{ijkl} – компоненти тензора податливості \mathbf{a} матеріалу деформівного тіла.

Досвід використання змішаних варіаційних підходів свідчить про їхню ефективність, однак складності пов'язані із відсутністю екстремуму в точці стаціонарності змішаного функціоналу. Це заважало чисельній реалізації таких підходів і ускладнювало оцінку точності результатів. У дисертації ця проблема вирішена за рахунок доведеної достатньої ознаки збіжності послідовності Рітца при відшуканні точки стаціонарності функціонала Рейсснера.

Система диференціальних рівнянь (4) і (5) в операторному вигляді де матричний диференціальний оператор A визначено на лінійній множині D_A функцій, що відповідають умовам (2) та є неперервними разом зі своїми першими похідними й інтегруються з квадратом в $\overline{\Omega} = \Omega + \Gamma$; δ_{rs} – символ Кронекера;

Як відомо, для крайової задачі $Bv = f$ збіжність послідовностей Рітца $\{v_n, v_n^-\} = \{f, v^-\}$ до точного розв'язку й еквівалентність методів Рітца і Бубнова-Гальоркіна доведені у випадку, коли B – оператор, що позитивно визначений у гільбертовому просторі H . Така властивість не притаманна оператору A (6), однак справедлива доведена в роботі **лема**: *при точному задоволенні структур наближених розв'язків усім крайовим умовам метод Рітца для варіаційної задачі, сформульованої на основі принципу Рейсснера, буде збігатися з методом Бубнова-Гальоркіна для диференціальних рівнянь Ейлера функціонала Рейсснера.*

За умов припущення такого розкладання оператора A :

С.Г. Михліним сформульовано достатню ознаку збіжності методу Бубнова-Гальоркіна: *метод Бубнова-Гальоркіна збігається, якщо $Av = f$ має не більш одного розв'язку та існує розкладання вигляду (9) і при цьому в H :*

У роботі наведено розкладання вигляду (9), для якого виконані умови (10), і за допомогою методів і варіаційних нерівностей теорії операторів доведено **теорему 1**: *послідовності Рітца збігаються із точним розв'язком крайової задачі, сформульованої на основі змішаного варіаційного принципу Рейсснера, якщо структури наближених розв'язків точно задовольняють усі крайові умови.*

Таким чином, хоча геометричні і статичні крайові умови (2) є природними для функціонала Рейсснера, пошук його точки стаціонарності доцільно здійснювати на класі напружень і переміщень, що задовольняють усі крайові умови. У такому випадку, по-перше, відповідно до доведеної теореми послідовності Рітца для функціонала Рейсснера будуть збігатися по енергії оператора задачі до точного розв'язку; по-друге, знаходження розв'язку можна одержати при певному числі координатних функцій, що знижує нагромадження похибок і обчислювальні витрати; по-третє, у варіаційному рівнянні зникають поверхневі інтеграли і вихідна система рівнянь Рітца має симетричну матрицю стрічкової структури. Разом з тим рівняння Ейлера, що відповідають стаціонарності функціонала Рейсснера, є системою диференціальних рівнянь першого ступеня відносно переміщень і напружень, а більшість варіантів крайових умов, які розглядаються у теорії оболонки, відповідають крайовим умовам I роду. Ці обставини істотно спрощують структури розв'язків досліджуваних задач.

Вирішення проблеми достовірності результатів при розв'язуванні задач прямими методами суттєво залежить від ефективності контролю збіжності. У дисертації на базі теорії подвійності опуклого аналізу запропонована апостеріорна інтегральна оцінка точності чисельних розв'язків, одержуваних при відшукуванні точки стаціонарності функціонала Рейсснера I_R . Як відомо, розв'язанням варіаційної задачі для функціонала Лагранжа I_L є поле кінематично можливих

переміщень $\bar{\mathbf{u}}$, а розв'язанням двоїстої задачі для функціонала Кастильяно I_C – поле статично можливих напружень $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$. У дисертації показано, що аналітичний вираз лагранжіана $L(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$, сформульованого за допомогою перетворення Лежандра на перемінних основної і двоїстої задач, збігається з функціоналом Рейсснера I_R , якщо останній визначити на класі кінематично можливих переміщень і статично можливих напружень. Тоді існує єдина для $L(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ сідлова точка $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\boldsymbol{\sigma}})$, компоненти якої будуть розв'язками основної $\inf_{\mathbf{u}} I_L(\mathbf{u}) \stackrel{=}{=} \inf_{\mathbf{u}} L(\mathbf{u}, \bar{\boldsymbol{\sigma}})$ і двоїстої $\sup_{\boldsymbol{\sigma}} I_C(\boldsymbol{\sigma}) \stackrel{=}{=} \sup_{\boldsymbol{\sigma}} L(\bar{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\sigma})$ задач. Справедливі доведені в роботі рівності:

Згідно з (12), задача мінімізації функціонала Лагранжа I_L і двоїста їй задача максимізації функціонала Кастильяно I_C – еквівалентні задачі щодо визначення сідлової точки функціонала Рейсснера I_R . Цій висновок покладено в основу апостеріорної оцінки отриманих за допомогою функціонала I_R наближених розв'язків u_i і σ_{ij} . Шукані компоненти \mathbf{u} і $\boldsymbol{\sigma}$ прийняті у вигляді:

де ω^u, ω^σ – R -функції, що описують граничні поверхні Γ_u і Γ_σ , на яких задані функції $u_i^*, \sigma_{ij}^* = t_i$ (2); u_i^k, σ_{ij}^k – шукані сталі; f_k^u, f_k^σ – апроксимуючі функції.

Після підстановки (13) у (3) отримано систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно u_i^k, σ_{ij}^k . Для оцінки збіжності розв'язків (13) підраховуються значення функціоналів Лагранжа I_L^n , Кастильяно I_C^n , Рейсснера I_R^n і величини I_ε :

Величина відповідає двоїстому зазору, що застосовується у теорії неопуклого програмування:

Показано, що із порівняння величин трьох функціоналів з'являються умови для створення процесу регулярного уточнення розв'язків за рахунок збільшення кількості апроксимацій в (13), поки не буде виконано рівність (11) з наперед заданою точністю. Процедура наближення до сідлової точки запропоновано здійснювати за схемою: фіксуючи u_i , шукаємо таке значення σ_{ij} , при якому функціонал досягає мінімуму; приймаючи σ_{ij} , шукаємо u_i , при якому функціонал досягає максимуму. За умовами збіжності значень функціоналів та доведеної одиничності сідлової точки одержуємо u_i і σ_{ij} будуть енергетично еквівалентні точним розв'язкам. Це сформульовано в **теоремі 2**: *стаціонарні значення функціоналів Лагранжа, Кастильяно і Рейсснера збігаються на класі кінематично можливих переміщень і статично можливих напружень. У роботі розглянуті приклади, що мають аналітичні розв'язки (розтягання циліндра, задача Ламе) і ілюструють точне виконання рівностей (11).*

У **третьому розділі** викладено чисельно-аналітичний метод розв'язання задач статички нетонких ортотропних оболонок з отворами довільних розмірів і форм; наведені структури розв'язків, що точно задовольняють усі граничні умови для досліджуваних у дисертаційній роботі

крайових задач. Метод ґрунтується на застосуванні загальних рівнянь тривимірних задач теорії пружності, варіаційного принципу Рейсснера, методу І.М.Векуа та теорії R-функцій.

Розглянуто елемент оболонки (рис. 1), як тривимірне тіло, обмежене лицевими поверхнями S_1 і бічною поверхнею S_2 , що перетинається з серединною поверхнею S_3 уздовж лінії L . Введено в ортогональну криволінійну систему координат (x, y, z) таку, що координатні лінії x, y, z і головні осі ортотропії матеріалу оболонки збігаються з лініями головних кривин $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$, вісь z спрямована по нормалі k .

Це дозволяє визначити у такому вигляді вектор переміщення u , де u_x, u_y, u_z та компоненти тензора σ на довільних з нормаллю площадках оболонки:

У дисертації подані в ортогональній криволінійній системі координат аналітичні вирази варіаційного рівняння Рейсснера тривимірних задач статки ортотропних оболонок довільної гауссової кривини. Крайові умови сформульовані на поверхні відповідно до енергетичних пар: а також на лицевих поверхнях (S_1, S_2) оболонки:

Далі на основі теорії R-функцій і методу розкладання функцій у ряди Фур'є по поліномах Лежандра, залежних від поперечної координати y , створені нові структури розв'язків, які точно задовольняють усі варіанти крайових умов (18) і (19). В роботі, не порушуючи загальності, надані структури розв'язків для оболонок, послаблених одним отвором, поверхня якого має рівняння $F(x, y, z) = 0$, або періодичною уздовж однієї з ліній (x, y, z) системою отворів. З цих структур можна одержати структури для оболонок з неперіодичною системою довільного числа однакових чи різних за формою і розмірами отворів.

Наприклад, розрахунки оболонок з навантаженням і формою отвору (кругового, еліптичного, прямокутного та ін.), що симетричні відносно поверхонь S_1, S_2 , виконані в межах (в плані) області $ABCD$, яка відповідає $ABCD$ на рис. 2. Рівняння поверхонь S_1, S_2 визначались функціями $F_1(x, y, z)$ і $F_2(x, y, z)$:

Напрямні косинуси нормалі k (рис. 2) на поверхні отвору з використанням теорії R-функцій обчислені так:

де n – нормалізоване рівняння першого порядку, при цьому:

Крайові умови на поверхнях оболонки повинні задаватися згідно з (18), на поверхнях S_1 і S_2 оболонки з одним отвором – згідно з (19), а для оболонки з періодичною (двокоперіодичною) системою отворів уздовж однієї (кожної) з ліній x, y, z на S_1, S_2 – умови періодичності розв'язку вигляду:

З урахуванням (20) справедливі вирази:

Шукані компоненти вектора u і тензора σ приймалися у вигляді рядів:

Введені в (25) функції U_i, σ_{ij} разом з F_1, F_2 задовольняють граничні умови (14) на поверхні отвору: де U_i, σ_{ij} – шукані сталі; U_i, σ_{ij} – апроксимуючі функції; F_1, F_2 – поліноми Лежандра; (x, y, z) ; U_i, σ_{ij} – непарні і парні апроксимуючі функції; U_i, σ_{ij} – шукані сталі.

Для оболонки з одним отвором функції U_i, σ_{ij} прийняті у вигляді:

У структурах (26) функції узгоджені з умовами (18), (19) та узагальнено надані так:

Сталі $\sigma, \tau, \nu, \mu, \lambda$, у виразах (29) приймають значення одиниці (задане переміщення) чи нуля (задано напруження) і необхідні для того, щоб у кожному математичному запису крайових умов на поверхнях оболонки не зустрічалися взаємно відповідні величини із шуканих переміщень і напружень. Наприклад, однорідним крайовим умовам на поверхні отвору можна поставити у відповідність такі комбінації значень сталих σ, τ :

Для оболонки з періодичною (наприклад, уздовж лінії) системою отворів на формулюються умови (23), які будуть виконані, якщо у (28) прийняти:

Конкретна модель оболонки визначається завданням кількостей n в апроксимаціях переміщень і напружень (26) поліномів Лежандра. Вибір моделі відповідає комбінації величин n , де n – число утримуваних членів у розкладанні по координаті тангенціальних переміщень; n – нормального переміщення; n – тангенціальних напружень; n – поперечних дотичних напружень і n – поперечного нормального напруження. При величина n характеризує порядок 1-го наближення теорії оболонок. Завдання параметрів дозволяє автоматизувати процес уточнення моделі оболонки. У рамках розробленого методу з'явилася можливість переходу до різних двовимірних теорій оболонок і створення послідовної класифікації існуючих у літературі і нових уточнених теорій оболонок.

Так, варіанту (2,1,2,1,0) відповідає теорія оболонок типу Тимошенка – Рейсснера; (2,2,2,2,1) – уточнена теорія Я.М. Григоренка, В.Т. Василенко і Н.Д. Панкратової, що враховує поперечні зсуви й обтиснення по товщині оболонки; (2,3,2,3,2) – теорія Рейсснера–Нагді; (3,1,3,1,0) і (4,2,4,2,1) – прикладні теорії В.В. Пікуля; (3,2,3,2,1) – прикладна теорія В.Г. Піскунова і О.О. Рассказова; (4,3,4,3,2) – прикладна теорія В.О. Родіонової, Б.Ф. Тітаєва і К.Ф. Черних.

Структури розв'язків (26) інваріантні для однорідних і неоднорідних ортотропних оболонок, враховують зміну метрики по товщині оболонки і точно задовольняють більшість варіантів граничних умов, що формулюються в задачах статки багатозв'язних і однозв'язних оболонок.

У розділі розглянуті тестові тривимірні задачі для циліндричних оболонок, у серединній поверхні радіуса яких введена система координат (r, θ, z) , де r – відстань, обмірювана уздовж твірної, θ – довжина дуги напрямної, z – відстань уздовж нормалі k . Так, вирішена задача про деформування циліндра, навантаженого на ділянці внутрішньої поверхні рівномірним тиском p , а на ділянці зовнішньої поверхні – q .

Для різних моделей (0) ізотропного циліндра довжини $2a$ в табл. 1 подано (σ, τ) значення переміщень і напружень $(u, v, w, \sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz})$, (при $r=a$); на рис. 3 (цифри на графіках – числа апроксимацій при n) – розподіл шуканих величин по товщині циліндра (трикутниками позначені результати, до яких асимптотично збігаються уточнені розв'язки).

Установлено, що по мірі уточнення моделі оболонки необхідно підвищувати точність інтегрування (тобто збільшувати кількість вузлів квадратурних формул Гаусса) коефіцієнтів Рітца. Згідно з табл. 2 (при ;), зі збільшенням чисел i і чисельні розв'язки сходяться до розв'язків точних (показані напівжирним шрифтом). Однак при подальше збільшення i та погіршує збіжність розв'язків. Разом з тим, як впливає i з табл. 3 (у чисельниках результати для моделі $(2,1,2,1,0)$, у знаменниках – $(7,7,7,7,7)$), при підвищенні точності інтегрування збіжність розв'язків спостерігається знову. У конкретному розрахунку нескладно визначити для обраної моделі оболонки мінімальне число i , при якому результати збігаються.

На основі різних моделей оболонок виконані дослідження зі збіжності розв'язків для задачі про деформування вільно обертого по торцях циліндра (довжини a), навантаженого внутрішнім тиском при p . Порівняння розрахункових даних наведено в табл. 4 та на рис. 4, де

Індекси плюс і мінус в (39) відповідають i ; k – масштабний множник. У знаменниках табл. 4 (;) – відомі літературні дані. На рис. 4 (;) наведено розподіл по товщині величин (39); цифри на графіках відповідають числам i ().

Уточнені розв'язки істотно відрізняються від результатів, що одержані за використанням теорії типу Тимошенка (штрихпунктирні лінії на рис. 4; штрихові лінії – модель (4,3,4,3,2) прикладної теорії оболонок). При великих показниках змінюваності навантаження слід використовувати уточнені теорії навіть при малій товщині оболонок.

У розділі розглянута перспективна можливість застосування створеного методу для розрахунку неоднорідних оболонок у випадку відомих залежностей пружних характеристик матеріалу від координат точок тіла. Безпосередня підстановка у варіаційне рівняння Рейсснера цих залежностей і одержаних структур розв'язань, використання запропонованої апостеріорної інтегральної оцінки чисельних результатів дозволяють успішно досліджувати НДС неоднорідних оболонок, чисельні розрахунки яких подані в п'ятому розділі.

У четвертому розділі на основі розробленого методу виконані розрахунки однозв'язних і послаблених отворами ізотропних, трансропних і ортотропних циліндричних оболонок; проведено оцінки збіжності результатів; досліджено вплив товщини, граничних умов і вигляду навантаження на НДС пружного циліндра; встановлено вірогідність одержаних результатів шляхом їхнього порівняння з відомими в літературі чисельними й експериментальними даними.

Виконано розрахунки ізотропних циліндрів під дією локального тиску p . У табл. 5 і 6 – результати розрахунків у випадку жорстко закріплених торців (37). У першому рядку табл. 5 – розв'язки при використанні моделі (2,1,2,1,0); у другому – (7,7,7,7,7).

На рис. 5 і 6, у табл. 7 – результати (σ, ϵ) для умов на торці циліндра:

При жорсткому закріпленні торців (40d) на рис. 5 цифрами 1, 2, 3 і 4 позначені графіки $\tilde{\sigma}_{11}$ в перерізах відповідно, а на рис. 6 цифрами 1, 2 і 3 – графіки в перерізах при різних умовах на торцях циліндра: суцільними (40a), штриховими (40c) і штрихпунктирними (40d) лініями. Числа в квадратних дужках (табл. 5 – 7) і графіки рис. 5, показані штриховими лініями, є результатами роботи Григоренка Я.М. і Крюкова М.М.

Досліджено напружений стан ортотропного циліндра (довжини a) під дією тисків, що змінюються по параболічному закону уздовж твірної (ρ). Граничні умови на лицевих поверхнях циліндра:

На рис. 7 (ρ ; σ ; τ ; ϵ) суцільними (ρ) і штриховими (σ) лініями при наведено розподіл напружень σ , штрихпунктирною – графік із роботи Неміша Б.Ю. для трансформного циліндра, коли умову на вільних торцях (ρ) замінено інтегральною умовою $\int \rho \rho^2 d\rho = 0$. Така заміна вносить похибку у поле напружень у безпосередній близькості до торців.

Досліджено дію на циліндричні оболонки (при ρ) несиметричного тиску ρ . У табл. 8 для ізотропного циліндра довжини z з жорстко закріпленими торцями (37) подані при значення переміщень w і напружень σ , а на рис. 8 – 10 – розподіли σ і τ , по товщині ортотропного циліндра (ρ).

На рис. 8 цифри 0, 1 і 2 належать до значень (ρ), на рис. 9 і 10 цифрами 1, 2 і 3 позначені графіки (σ) при ρ . Побудовані суцільними лініями на рис. 8–10 функції відповідають завданню на торцях умови (37); штриховими – умови (35). Більш тонкими лініями побудовані графіки, які подані в роботі Крюкова М.М., у квадратних дужках табл. 8 результат роботи Григоренка Я.М. і Крюкова М.М.

Наступний цикл досліджень, що наведені в розділі, присвячено циліндричним оболонкам з отворами. Розглянуто послаблений еліптичним отвором циліндр (рис. 11), до торцевої поверхні якого прикладені осьові сили P з інтенсивністю P . Досліджено вплив розмірів отворів, анізотропії матеріалу і товщини оболонки на величину коефіцієнтів концентрації мембранних і максимальних по товщині згинаючих напружень на поверхні отвору, де σ . Відзначений задовільний збіг отриманих уточнених розв'язків з відомими в літературі даними.

Виконано розрахунок послабленого наскрізним прямокутним отвором із закругленими кутами радіуса r склопластикового циліндра (рис. 12) під дією осьових стискаючих сил P . У силу симетрії розрахунок зведений до дослідження (у плані) області $ABCD$ – ділянки (рис. 13). Рівняння поверхонь AB , BC визначаються функціями r , (ρ):

де R – символи R-операцій теорії R-функцій.

Чисельну реалізацію задачі здійснено для нетонкого (ρ) циліндра. На рис. 14 показано (суцільними лініями для ізотропної, а штриховими для ортотропної оболонки зі склопластику) розподіл приведених переміщень w і напружень (σ) на контурі отвору при P (і відповідно) у випадку

застосування моделі (4,3,4,3,2). З наведених графіків випливає, що максимальні напруження виникають в околі точки В (рис. 13) кутової зони прямокутного отвору. Для ізотропного циліндра: σ_{θ} ; σ_r і σ_z (експериментальні дані Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка: 2.9; 2.7 і 2.4 відповідно).

У різних галузях техніки практично важливими є задачі розрахунку НДС циліндрів при дії відцентрових навантажень. У розділі наведені результати розрахунків ослаблених немалим отвором ортотропних циліндрів, що обертаються навколо осі симетрії з постійною кутовою швидкістю. У роботі надано аналітичний вираз змішаного варіаційного рівняння Рейсснера з урахуванням співвідношення для інтенсивності сил інерції:

Рівність у (42) відповідає недеформованій схемі навантаження, а – деформованому стану, коли відцентрове навантаження залежить від зміни розмірів пружного тіла при його деформації. На відміну від звичайної постановки деформована схема навантаження приводить до нелінійної залежності компонентів вектора σ і тензора ϵ від величини ω , тому при наближенні параметра ω (– нормуюча величина; ω_0) до визначеної величини починають швидко зростати значення напружень і переміщень.

У табл. 9 для різних товщин і співвідношень склопластикового циліндра надані (при ω_0) значення безрозмірних колових напружень, обчислених по деформованій (чисельники) і по звичайній (знаменники) схемах. У першому рядку таблиці – дані максимальних напружень в точці (рис. 11) контуру кругового отвору на внутрішній поверхні циліндра, у другому рядку – у тій же точці циліндра без отвору. При ω_0 напруження за уточненою схемою є більшими до 10% для циліндра з отвором і до 1% – без отвору.

При розкладанні по координаті компонентів тензора σ перші два члени тангенціальних напружень σ_{θ} і перший член поперечних дотичних напружень σ_{rz} у структурах (27) статично відповідають прикладеним у серединній поверхні зусиллям і моментам. Інші члени – самозрівноважені по товщині оболонки напруження, на величини яких впливають різні фактори (товщина, вид навантаження оболонки, наявність отворів та анізотропії матеріалу). Внесок самозрівноважених напружень у загальний напружений стан збільшується з відмінністю закону розподілу шуканих напружень по координаті від лінійного для σ_{θ} і закону квадратичної параболи для σ_{rz} , загальноприйнятих в теорії тонких оболонок з кінцевою зсувною жорсткістю.

Це ілюстровано для товстостінного (ω_0) циліндра порівнянням даних (при ω_0) напружень першого рядка табл. 9 і напружень третього рядка без обліку самозрівноваженої частини, де різниця складає до $\approx 10\%$ при ω_0 . При збільшенні величини параметра ω_0 чи відносної товщини ω_0 неврахування самозрівноважених частин напружень може призвести до значних похибок, а різниця між результатами, одержуваними за двома схемами деформування циліндричної оболонки, може стати (особливо для анізотропних оболонок) суттєвою.

У розділі наведені результати прикладних досліджень. Досліджено циліндричний корпус гідромотора з періодичною системою порожнин, на поверхні яких діє рівномірно розподілене навантаження інтенсивності. Для випадку, коли порожнини отворів навантажені силами, що не змінюються уздовж осі корпуса і перпендикулярні до цієї осі, частина корпуса, вилучена від торців, зазнає плоскої деформації. У циліндричній системі координат визначення НДС пружної області з періодичною системою кругових отворів радіуса зводиться до дослідження періодичної ділянки (рис. 15), що відповідає проміжку $(\theta, \theta + \pi)$.

Чисельну реалізацію задачі виконано для ізотропного корпуса, що має $\nu = 0,3$. На рис. 16 показані графіки розподілу уздовж контуру отвору напруження $\sigma_{\theta\theta}$, а в табл. 10 для характерних точок області наведені значення $\sigma_{\theta\theta}$, які знайдені при різних величинах міжцентрової відстані $2a$ і радіуса отвору r .

Одержані результати, що встановлені у вигляді залежності напруженого стану корпуса гідромотора від розмірів отворів і від їхнього розташування в розрахунковій області, використані при проектуванні гідромотора.

У п'ятому розділі розглянуті результати досліджень з концентрації напружень на базі створеного в роботі методу для розв'язування задач статички ортотропних (зокрема, ізотропних і транстропних) однорідних і неоднорідних сферичних оболонок із полюсними круговими отворами радіуса r .

Положення довільної точки в сферичній оболонці (рис. 17) товщини h визначалося координатами θ і ϕ , що введені в серединній поверхні радіуса r . Поверхня оболонки складається з лицевих і бічних поверхонь (θ, ϕ) двох співвісних отворів, рівняння яких визначаються функціями $\theta = \theta(\phi)$:

У роботі виконано розрахунки оболонки під дією внутрішнього тиску p у випадку, коли отвори закриті кришками. При граничні умови на поверхнях (θ, ϕ) отворів: $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} = 0$, де напруження статично еквівалентне на перерізуючому зусиллю.

Для різних значень ізотропної тонкої (h/r) оболонки на рис. 18 і в табл. 11 при $\nu = 0,3$ (коли взаємовпливом отворів можна нехтувати) наведені результати обчислення (при $p = 1$) коефіцієнтів концентрації напружень $K_{\theta\theta}$ і $K_{\phi\phi}$, які одержано на основі моделі (4,3,4,3,2) оболонок. Одержані величини коефіцієнта $K_{\theta\theta}$ на більшій частині інтервалу зміни параметра μ менш ніж на 1% відрізняються від результатів (у квадратних дужках табл. 11 і штрихова лінія на рис. 18), відомих в літературі для положистої сферичної оболонки з отвором.

При використанні моделі теорії оболонок для нетонкого (h/r) ортотропного сферичного поясу одержані результати, що ілюстровано на рис. 19 – уздовж безрозмірної координати θ по меридіану оболонки показані графіки розподілення коефіцієнтів $K_{\theta\theta}$ і $K_{\phi\phi}$. Результати свідчать про суттєву їх

залежність від анізотропії матеріалу оболонки (цифри 1, 2, 3, 4, 5 відповідають значенням співвідношення).

На рис. 20 зображено розподіли уздовж меридіана поверхні приведених напружень і переміщень. Цифрами 1, 2, 3, 4, 5 позначені графіки, які відповідають ; штрихпунктирні лінії – умовам (33), штрихові – (37), суцільні – умовам шарнірного закріплення Γ_s .

Далі розглянуті розрахункові дані НДС ортотропного сферичного поясу, що перебуває під дією локального внутрішнього тиску. Для дослідженої симетричної (θ, φ) задачі результати одержані при різних умовах (40) на бічних поверхнях отворів. На рис. 21а,б (вільні отвори) і на рис. 21в,г (жорстко закріплені отвори) – наведені (при $\nu = 0$) розподілення σ_{θ} , уздовж меридіана. Цифри біля графіків рис. 21а,б відповідають значенням співвідношення μ , що характеризує ступінь ортотропії, а на рис. 21в,г – (при $\mu = 0$), що характеризує зсувну жорсткість матеріалу оболонки.

Одержані результати дають досить повне уявлення про залежність НДС оболонки від ступеня анізотропії матеріалу оболонки і від граничних умов на бічних поверхнях отворів.

В цьому розділі роботи розглянуто один з перспективних напрямів для застосування розробленого методу. Це – розрахунки неоднорідних оболонок з відомими залежностями зміни пружних характеристик матеріалу від координат. Труднощі математичного й обчислювального характеру при розрахунках такого класу неоднорідних оболонок набагато більші, ніж для однорідних оболонок. Розглянуті ортотропні оболонки з неоднорідною структурою по товщині. Неоднорідність матеріалу моделювалась завданням модулів пружності і зсуву (ν) довільними функціями поперечної координати:

де μ, ν – сталі величини; μ_0, ν_0 – параметри, що характеризують неоднорідність матеріалу оболонки.

Розгляд загальної залежності пружних характеристик від усіх трьох координат не вносить принципових ускладнень при використанні розробленого методу. У виконаних у роботі розрахунках функції (44) мали вигляд

На рис. 22 наведені графіки функцій з (45), які відповідають лінійному – $\mu = \mu_0 + \mu_1 z$, кубічному – $\mu = \mu_0 + \mu_1 z + \mu_2 z^2 + \mu_3 z^3$, експоненціальному – $\mu = \mu_0 e^{\mu_1 z}$, експоненціально–степеневому – $\mu = \mu_0 e^{\mu_1 z} + \mu_2 z^2$, логарифмічному – законам зміни модуля пружності уздовж товщини оболонки. Для наочного порівняння результатів на рис. 22 розподіл функції (μ) показаний при збільшенні (чи зменшенні) у два рази: (чи μ_1).

Результати розрахунків для нетонкої ($\mu = 0$) ортотропної оболонки ілюстровані на рис. 23, де наведені уздовж меридіана розподілення прогину і коефіцієнта концентрації напружень для різних залежностей з (45). Штрихові лінії відповідають однорідній оболонці з пружними характеристиками $\mu = 1$.

Аналіз результатів свідчить про те, що на НДС неоднорідної оболонки суттєво впливає ступінь відмінності закону зміни пружних характеристик матеріалу від їхнього лінійного розподілу по

товщині оболонки. Це ілюстровано шляхом порівняння даних для сферичних оболонок із залежностями i , які найбільш відрізняються одна від одної.

Для двох різних моделей неоднорідної ортотропної оболонки в табл. 12 порівняно величини прогину i і напружень σ , при ν . У чисельниках таблиці – значення цих величин при лінійному ν , у знаменниках – експоненціально-степеневому ν – законам. Відсотки встановлюють відхилення знайдених результатів від точних, що одержані при використанні моделі (7,7,7,7,7) теорії оболонок сьомого наближення.

У залежності від числа апроксимацій по товщині оболонки в структурах для переміщень i і напружень на рис. 24 проілюстровані дані про співвідношення між функціоналами i і σ . Штрихові і штрихпунктирні лінії відповідають тонкостінній (t) і товстостінній (T) оболонкам, а суцільні – оболонкам середньої (m) товщини.

Цифри 1 і 2 біля кривих на рис. 24 відповідають лінійному ν – і нелінійному ν – законам зміни по товщині пружних характеристик матеріалу оболонки. Графіки наочно показують зміну безрозмірної величини двоїстого зазору δ , що характеризує інтегральну оцінку збіжності розв'язків, від кількості прийнятих апроксимацій (одиниця по ординаті відповідає сідловій точці функціоналу Рейсснера).

Для залежностей i і σ на рис. 25 показані уздовж координати меридіана (θ) оболонки графіки розподілення коефіцієнта концентрації напружень K у перерізі r . Цифри 1, 2, 3 і 4 відповідають результатам, які отримано за моделями: (2,1,2,1,0), (2,2,2,2,1), (4,2,4,2,1) і (4,3,4,3,2); штрихова лінія – модель теорії оболонок сьомого наближення. За цими дослідженнями зроблено висновок, що для одержання достовірних результатів при розрахунку НДС неоднорідної оболонки з нелінійним законом зміни пружних характеристик по товщині варто використовувати модель уточненої теорії більш високого порядку наближення.

В усіх розрахунках отримані оцінки збіжності розв'язків, досліджено вплив на НДС оболонок ступеня анізотропії матеріалу, товщини, виду навантаження і граничних умов на поверхнях отворів. Одержані на базі розробленого методу результати підтверджують можливість його ефективного використання при розв'язанні просторових задач різної складності для статично навантажених однорідних і неоднорідних ортотропних оболонок довільної товщини.

ВИСНОВКИ

У дисертації наведено вирішення науково-технічної проблеми, що полягає в створенні науково обґрунтованого методу розрахунку тривимірного напружено-деформованого стану статично навантажених нетонких анізотропних і неоднорідних оболонок з отворами довільних розмірів і

форм. Вирішення цієї проблеми, яка до цього часу залишається однією з актуальних проблем механіки деформівного твердого тіла, має важливе наукове і практичне значення.

Розроблений у дисертації новий чисельно-аналітичний метод і наведені нові результати і висновки, що отримані особисто автором роботи, складають суттєвий науковий внесок у розвиток спеціальності 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла і призначені для інженерних розрахунків оболонкових елементів конструкцій у різних галузях сучасної техніки.

Найбільш важливі наукові і практичні результати дисертаційної роботи полягають у такому.

1. Уперше створено чисельно-аналітичний метод розв'язання просторових задач статички нетонких ортотропних оболонок з отворами довільних розмірів і форм. В основу запропонованого у роботі нового методу покладені змішаний варіаційний принцип Рейсснера, метод І.М. Векуа і теорія R-функцій.

2. Надано нову варіаційну постановку просторових крайових задач статички нетонких пружних оболонок, за рахунок чого в ортогональній криволінійній системі координат розроблено різні варіанти моделей уточненої теорії неоднорідних ортотропних оболонок довільної гауссової кривини.

3. Уперше сформульовано і на основі використання теорем і варіаційних нерівностей теорії операторів у гільбертовому просторі математично доведено достатню ознаку збіжності методу Рітца при відшуканні точки стаціонарності неекстремального функціонала Рейсснера із використанням структур розв'язків, що точно задовольняють усі граничні умови.

4. Розвинуто метод редукції тривимірних задач теорії оболонок за рахунок запропонованого алгоритму регулярного процесу уточнення моделей оболонки шляхом варіювання кількістю утримуваних членів у компонентах структур розв'язків для переміщень і напружень.

5. Створено нові структури розв'язків задач статички ортотропних оболонок, що враховують зміну метрики по товщині оболонок і точно задовольняють усі граничні умови крайових задач, сформульованих на основі принципу Рейсснера. Геометрична інформація крайових задач для оболонок з отворами довільної форми враховується на аналітичному рівні за допомогою теорії R-функцій.

6. Запропоновано на базі методу подвійності теорії опуклого аналізу апостеріорну двосторонню оцінку точності наближених розв'язків неекстремальних варіаційних задач, і її ефективність підтверджено чисельними дослідженнями збіжності, задовільною відповідністю одержуваних результатів з відомими в літературі аналітичними, чисельними й експериментальними даними. Зроблено висновок, що у випадку програмної реалізації апостеріорна оцінка може стати надійним засобом перевірки достовірності наближених чисельних результатів.

7. Отримано на основі створеного методу нові результати, що мають теоретичний і практичний інтерес для встановлення нових закономірностей впливу тривимірності НДС і неоднорідності матеріалу на концентрацію напружень і розподілення переміщень та напружень по товщині анізотропних оболонок.

8. Досліджено НДС рівномірно обертового склопластикового циліндра з невеликим отвором для випадку, коли задано фактичне значення відцентрового навантаження, що враховує зміну розмірів тіла при його деформації.

9. Вперше отримано уточнені розв'язки просторових задач для неоднорідної нетонкої сферичної оболонки з двома полюсними отворами та досліджено залежність НДС ортотропної оболонки від законів зміни пружних характеристик матеріалу вздовж товщини оболонки.

10. З аналізу виконаних у роботі розрахунків оболонок встановлено, що для задач статички тонких однорідних оболонок уточнені теорії дають практично однакові результати; для оболонок середньої товщини слід використовувати теорії Я.М. Григоренка, А.Т. Василенка, Н.Д. Панкратової, В.Г. Піскунова, О.О. Рассказова, В.О. Родіонової і К.Ф. Черних. Розрахунки неоднорідних та товстостінних оболонок вимагають використання уточнених теорій оболонок більш високого порядку наближення.

11. Практичну цінність роботи підтверджено актами упровадження виконаних за допомогою розробленого методу прикладних розрахунків конкретних конструктивних елементів сучасної техніки.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ РОБІТ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Сало В.А. Краевые задачи статички оболочек с отверстиями. – Харьков: НТУ “ХПИ”, 2003. – 216 с.

2. Сало В.А. О двусторонней оценке точности приближенных решений задач теории оболочек, полученных методом Ритца для неэкстремального функционала Рейсснера // Доповіді НАН України. – Київ, 2003. – № 1. – С. 53–57.

3. Морачковский О.К., Ромашов Ю.В., Сало В.А. Метод R–функций в решении задач теории упругости на основе смешанного вариационного принципа Рейсснера // Прикладная механика. – Киев, 2002. – Т. 38, № 2. – С. 65–71.

4. Морачковский О.К., Ромашов Ю.В., Сало В.А. Розрахунок ущільнювальних елементів затворів на основі варіаційного принципу Рейсснера // Машинознавство. – 2001. – № 12. – С.3–7.

5. Сало В.А. Вариційно-структурний метод в задачах розрахунку концентрації напружень в нетонких циліндричних оболонках з прямокутними отворами // *Машинознавство*. – 2002. – № 8. – С. 13–16.
6. Сало В.А. Розрахунок ослаблених отворами оболонкових елементів конструкцій на основі варіційного принципу Рейсснера // *Машинознавство*. – 2003. – № 3. – С. 3–6.
7. Сало В.А. Розрахунок напружено-деформованого стану ослаблених отворами пружних сферичних оболонок довільної товщини // *Машинознавство*. – 2003. – № 7. – С. 34–38.
8. Сало В.А. Розрахунок товстостінних циліндрів при нерівномірному тиску на основі варіційного принципу Рейсснера // *Машинознавство*. – 2003. – № 9. – С. 23–26.
9. Сало В.А. Вариационно-структурный метод в задачах расчета вращающихся ортотропных цилиндров в случае нагружения по деформированной схеме // *Науково-практичний журнал “Інтегровані технології та енергозбереження”*. – Харків: НТУ (ХПІ), 2002. – № 4. – С. 44–51.
10. Сало В.А. Апостериорная оценка точности результатов расчета напряженно-деформированного состояния упругих оболочек произвольной толщины // *Науково-практичний журнал “Інтегровані технології та енергозбереження”*. – Харків: НТУ (ХПІ), 2003. – № 1. – С. 37–46.
11. Сало В.А. Об эффективном методе расчета анизотропных оболочечных элементов конструкций из материалов неоднородной структуры // *Восточно-европейский журнал передовых технологий*. - Харьков, 2003. - Вып. 5. -С. 16-18.
12. Сало В.А., Штейнвольф Л.И. Исследование напряженно-деформированного состояния корпуса гидромотора // *Динамика и прочность машин*. Сб. науч. трудов ХПИ. – Харьков: ХПИ, 1990. – Вып. 51. – С. 107–111.
13. Ромашов Ю.В., Сало В.А. Двусторонняя оценка решений смешанных вариационных задач теории упругости // *Вестник Харьк. гос. политех. ун-та*. Сб. науч. трудов. – Харьков: ХГПУ, 1999. – Вып. 36. – С. 131–134.
14. Ромашов Ю.В., Сало В.А. Метод двусторонней оценки численных решений задач теории упругости, полученных при помощи функционала Рейсснера // *Вестник Харьк. гос. политех. ун-та*. Сб. науч. трудов. – Харьков: ХГПУ, 1999. – Вып. 53. – С. 25–30.
15. Ромашов Ю.В., Сало В.А. Достаточный признак сходимости метода Ритца для смешанного вариационного принципа Рейсснера теории упругости // *Вестник Харьк. гос. политех. ун-та*. Сб. науч. трудов. – Харьков: ХГПУ, 1999. – Вып. 85. – С. 22–26.
16. Сало В.А. Доказательство достаточного признака сходимости метода Ритца для смешанного вариационного принципа Рейсснера // *Вестник Харьк. гос. политех. ун-та*. Сб. науч. трудов. -Харьков: ХГПУ, 2000. -Вып. 95. -С.70–75.

17. Сало В.А. Вариационно-структурный метод расчета ортотропных оболочек вращения с конечной сдвиговой жесткостью // Вестник Харьк. гос. политех. ун-та. Сб. науч. трудов. – Харьков: ХГПУ, 2000. – Вып. 116. – С. 113–117.

18. Морачковский О.К., Ромашов Ю.В., Сало В.А. Вариационный принцип Рейсснера и структуры решений краевых задач теории упругости // Вестник нац. техн. ун-та “ХПИ”. Сб. науч. трудов. – Харьков: НТУ (ХПИ), 2001. – № 6. – С. 164–166.

19. Сало В.А. О сходимости вариационно-структурного метода расчета нетонких упругих оболочек // Вестник нац. техн. ун-та “ХПИ”. Сб. науч. трудов. – Харьков: НТУ (ХПИ), 2002. – № 10, Т. 2. – С. 113–118.

20. Сало В.А. Вариационно-структурный метод в задаче расчета нетонкой ортотропной оболочки с отверстием // Вестник нац. техн. ун-та “ХПИ”. Сб. науч. трудов. – Харьков: НТУ (ХПИ), 2002. – № 9, Т. 9. – С. 43–46.

21. Сало В.А. Напряженно-деформированное состояние многосвязных оболочек произвольной толщины // Авиационно-космическая техника и технология. Сб. науч. трудов Нац. аэрокосмич. ун-та им. Н.Е.Жуковского. – Харьков: НАКУ “ХАИ”, 2002. – Вып. 29. – С.20–23.

22. Сало В.А. Расчет на прочность и жесткость конструктивных оболочечных элементов, ослабленных отверстиями // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. Сб. науч. трудов Нац. аэрокосмич. ун-та им. Н.Е.Жуковского. – Харьков: НАКУ “ХАИ”, 2002. – Вып. 31(4). – С.133–138.

23. Сало В.А. Расчет ортотропной сферической оболочки, ослабленной отверстиями // Вестник Харьк. нац. автодорожного ун-та. – Харьков: ХНАДУ, 2003. – Вып. 21. – С. 89-93.

24. Сало В.А. Расчет на прочность и жесткость упругих толстостенных цилиндров при различном закреплении его торцов // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. Сб. науч. трудов Нац. аэрокосмич. ун-та им. Н.Е.Жуковского. – Харьков: НАКУ “ХАИ”, 2003. – Вып. 33(2). – С. 61–66.

25. Сало В.А. О структурах решений краевых задач статики нетонких ортотропных оболочек с отверстиями // Вестник нац. техн. ун-та “ХПИ”. Сб. науч. трудов. – Харьков: НТУ (ХПИ), 2003. – № 8, Т. 3. – С. 73–76.

26. Сало В.А. Напряженно-деформированное состояние толстостенной цилиндрической оболочки под действием несимметричного давления // Вестник нац. техн. ун-та “ХПИ”. Сб. науч. трудов. – Харьков: НТУ (ХПИ), 2003. – № 12, Т. 1. – С. 110–115.

27. Сало В.А. Исследование полей перемещений и напряжений в упругих цилиндрах при произвольных граничных условиях на торцах // Вестник нац. техн. ун-та “ХПИ”. Сб. науч. трудов. – Харьков: НТУ (ХПИ), 2003. – № 16. – С. 3–6.

28. Сало В.А. Вариационно-структурный метод расчета на прочность и жесткость ослабленных отверстиями элементов машиностроительных конструкций // Вісник Інженерної академії України. – Київ, 2000. – Спец. випуск. – С. 399–402.

29. Морачковский О.К., Ромашов Ю.В., Сало В.А. Свойства моделей и достоверность анализа прочности упругих тел, основанных на смешанном вариационном принципе Рейсснера // Вісник Інженерної академії України. – Київ, 2001. – Ч. 2. № 3. – С. 13–16.

30. Сало В.А. Вариационно-структурный метод расчета анизотропных многосвязных оболочек и пластин с конечной сдвиговой жесткостью // Сб. науч. трудов межд. наук.-техн. конф. “Инф. технологии: наука, техника, технология, образование, здоровье”. – Харьков: ХГПУ, 1997. – Вып. 5. Ч. 1. – С. 149–151.

31. Морачковский О.К., Ромашов Ю.В., Сало В.А. Особенности численного алгоритма в расчетах упругих пластин и оболочек на основе принципа Рейсснера // Сб. науч. трудов межд. наук.-техн. конф. “Инф. технологии: наука, техника, технология, образование, здоровье”. – Харьков: ХГПУ, 1998. – Вып. 6. Ч. 1. – С. 108–110.

32. Сало В.А. Вариационно-структурный метод расчета ортотропной конической оболочки с конечной сдвиговой жесткостью // Сб. науч. трудов межд. наук.-техн. конф. “Инф. технологии: наука, техника, технология, образование, здоровье”. – Харьков: ХГПУ, 1999. – Вып. 7. Ч. 1. – С. 360–363.

33. Сало В.А. Вариационно-структурный метод в задаче расчета упругой цилиндрической оболочки, ослабленной эллиптическим отверстием // Труды 5-й межд. наук.-техн. конф. “Физические и компьютерные технологии в народном хозяйстве”. – Харьков: ХНПК ”ФЭД”, 2002. – С. 637–640.

34. Сало В.А. Розрахунок ослаблених отворами оболонкових елементів конструкцій на основі варіаційного принципу Рейсснера // Збірник наук. трудів 6-го міжн. симпозіуму укр. інженерів-механіків. Тези доповідей. – Львів, 2003. – С. 48–49.

АНОТАЦІЯ

Сало В.А. Чисельно-аналітичний метод розв'язання задач статички нетонких ортотропних оболонок з отворами довільних розмірів і форм. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 01.02.04 – “Механіка деформівного твердого тіла”. – Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, Харків, 2003.

У роботі вирішена науково-технічна проблема, що полягає в створенні науково обґрунтованого й універсального чисельно-аналітичного методу розрахунку тривимірного

напружено-деформованого стану статично навантажених однорідних і неперервно неоднорідних по товщині нетонких ортотропних оболонок з отворами довільних розмірів і форм.

На основі змішаного варіаційного принципу Рейсснера і загальних рівнянь теорії пружності дана варіаційна постановка просторових крайових задач статички ортотропних оболонок довільної товщини.

Сформульована і математично доведена достатня ознака збіжності методу Рітца при відшуванні точки стаціонарності неекстремального функціонала Рейсснера. Запропоновано апостеріорну двосторонню оцінку точності наближених розв'язків мішаних варіаційних задач.

Створено нові структури розв'язків, що враховують зміну метрики по товщині ортотропних оболонок і точно задовольняють усі граничні умови досліджуваних крайових задач. Геометрична інформація задач для оболонок з отворами довільної форми враховується на аналітичному рівні за допомогою теорії R-функцій.

Розроблений метод може знайти ефективне застосування при проектуванні оболонкових елементів конструкцій у різних галузях техніки.

Ключові слова: варіаційний принцип Рейсснера, теорія R-функцій, оболонки з отворами, концентрація напружень, неоднорідні оболонки.

ABSTRACT

Salo V.A. Numerical - analytical method of solving the problems of statics non-thin orthotropic shells with holes of any sizes and forms. - Manuscript.

The thesis is presented for a Doctor Degree of Technical Sciences by speciality 01.02.04 – "Mechanics of Deformable Solids". – A.N. Podgorny Institute for Problems in Machinery National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkov, 2003.

In this work the scientific and technical problem which consists in creation of scientifically proved, universal and effective numerical-analytical method of computation three-dimensional stress-strained state statically loaded homogeneous and continuously non-uniform on thickness non-thin orthotropic shells with holes of any sizes and forms is solved.

On the basis of the mixed Reissner's variational principle and the general equations of the theory of elasticity the variational statement of the spatial boundary problems of the statics orthotropic shells of any thickness is given.

It is formulated and the sufficient test of convergence of Ritz's method is proved when searching of a point of stationary non-extreme Reissner's functional. The posteriori two-sided estimation of exactitude of the approached solutions of the mixed variational problems is offered.

New structures of solutions, which take into account the change of the metrics on thickness of the orthotropical shells and precisely satisfy to all boundary conditions of the studied problems, are created. The geometrical information of problems for the shells with holes of any form is taking into account analytically with help of the R-functions theory.

The created method may be used when designing the shell elements of the structures in different areas of the engineering.

Key words: Reissner's variational principle, R-functions theory, shells with holes, concentration of stresses, non-uniform shells.

АННОТАЦИЯ

Сало В.А. Численно-аналитический метод решения задач статики нетонких ортотропных оболочек с отверстиями произвольных размеров и форм. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности 01.02.04 – “Механика деформируемого твердого тела”.- Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Харьков, 2003.

В работе решена актуальная научно-техническая проблема, которая состоит в создании научно обоснованного эффективного численно-аналитического метода расчета трехмерного напряженно-деформированного состояния статически нагруженных однородных и непрерывно неоднородных по толщине нетонких ортотропных оболочек с отверстиями произвольных размеров и форм.

В диссертации на основе смешанного вариационного принципа Рейсснера и общих уравнений теории упругости дана вариационная постановка пространственных краевых задач статики ортотропных оболочек произвольной толщины; представлено в ортогональной криволинейной системе координат аналитическое выражение вариационного уравнения Рейсснера трехмерных задач статики оболочек произвольной гауссовой кривизны.

Сформулирован и с помощью теорем и вариационных неравенств теории операторов в гильбертовом пространстве математически доказан достаточный признак сходимости метода Ритца при отыскании точки стационарности неэкстремального функционала Рейсснера. Конструктивным следствием доказанного признака является то, что для улучшения сходимости процесса Ритца искомые функции целесообразно представить структурами, точно удовлетворяющими всем краевым условиям.

В работе на основе использования метода разложения функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра и теории R-функций созданы новые структуры решений, которые учитывают изменение

метрики по толщине оболочек и точно удовлетворяют всем граничным условиям исследуемых краевых задач для оболочек с отверстиями произвольной формы.

В рамках разработанного метода дано развитие метода редукции трехмерных задач теории оболочек за счет предложенного алгоритма регулярного процесса уточнения моделей оболочки путем варьирования количеством удерживаемых членов в разложении по поперечной координате оболочки компонент вектора перемещения и тензора напряжений. Задание соответствующих параметров позволяет в алгоритме автоматизировать процесс перехода к разным двумерным теориям оболочек, создает наглядную и логически стройную классификацию существующих в литературе и новых уточненных теорий оболочек.

Установлено, что уточнение модели оболочки требует повышения точности интегрирования коэффициентов Ритца; на конкретном примере показано, как для выбранной модели оболочки определить такое минимальное число узлов квадратурных формул Гаусса, при котором результаты имеют достоверный характер.

На базе метода двойственности теории выпуклого анализа предложена апостериорная двусторонняя оценка точности приближенных решений неэкстремальных вариационных задач и ее эффективность подтверждена численными исследованиями сходимости представленных в работе решений краевых задач различной сложности, а также удовлетворительным соответствием получаемых результатов с известными в литературе аналитическими, численными и экспериментальными данными. Для процедуры приближения к седловой точке функционала Рейсснера в работе предложен соответствующий алгоритм и показано, как при сравнении вычисляемых значений функционалов Лагранжа, Кастильяно и Рейсснера можно построить процесс уточнения решений за счет последовательного выбора количества аппроксимаций искомых величин, пока аналитическое выражение для интегральной оценки не будет выполнено с наперед заданной точностью (при совпадении значений функционалов полученные решения будут энергетически эквивалентны точному решению). В случае программной реализации апостериорная оценка может стать надежным средством проверки достоверности приближенных результатов.

В работе рассмотрена перспективная возможность применения созданного метода для расчета неоднородных оболочек в случае известных зависимостей упругих характеристик материала от координат точек тела. Непосредственная подстановка в вариационное уравнение Рейсснера этих зависимостей и полученных структур решений, использование предложенной апостериорной интегральной оценки численных результатов позволяют успешно исследовать НДС неоднородной оболочки.

На основе разработанного метода в работе выполнено большое число конкретных расчетов для односвязных и ослабленных отверстиями изотропных, трансропных и ортотропных

цилиндрических и сферических оболочек при разных вариантах граничных условий на боковых поверхностях отверстий. Проведены оценки сходимости численных результатов, исследовано влияние на НДС однородных и неоднородных оболочек степени анизотропии материала, толщины, вида статической нагрузки и граничных условий. В результате выполненных в работе исследований найдены имеющие теоретический и практический интерес новые количественные и качественные закономерности статики ослабленных отверстиями нетонких ортотропных оболочек с неоднородной по толщине структурой.

Созданный новый численно-аналитический метод расчета нетонких оболочек с отверстиями, позволивший в уточненной математической постановке успешно решить ряд задач прикладного характера, может найти эффективное применение при проектировании ответственных оболочечных элементов конструкций в разных областях современной техники.

Ключевые слова: вариационный принцип Рейсснера, теория R-функций, оболочки с отверстиями, концентрация напряжений, неоднородные оболочки.

Автор висловлює щирю вдячність науковому консультантові доктору технічних наук, професору, завідувачу кафедри теоретичної механіки НТУ "ХП" Морачковському Олегу Костянтиновичу за цінні поради, консультації та постійну увагу при виконанні даної роботи.

Сало Валентин Андрійович

**Чисельно-аналітичний метод розв'язання
задач статички нетонких ортотропних оболонок
з отворами довільних розмірів і форм**

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора технічних наук

Спеціальність 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

Відповідальний за випуск – к.т.н. доц. Дружинін Є.І.

Підп. до друку 12.01.2004р. Формат видання 145×215.

Формат паперу 60×90/16. Папір Certain. Друк. – ризографія.

Обсяг 1,9 авт. арк. Наклад 100 прим. Зам. № 10.

Видавничий центр НТУ "ХПІ". Свідоцтво ДК 116 від 10.07.2000р.

Друкарня НТУ "ХПІ", 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21
