МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

АДАШЕВСЬКА Ірина Юріївна

УДК 514.18

ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВАНЬ БАГАТОЛАНКОВИХ МАЯТНИКОВИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

Спеціальність 05.01.01 –
Прикладна геометрія, інженерна графіка

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

Київ – 2006

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Національному технічному університеті „Харківський політехнічний інститут” Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: - доктор технічних наук, професор
Куценко Леонід Миколайович,
професор кафедри пожежної і
аварійно-рятувальної техніки,
Академія цивільного захисту України
(м. Харків)

Офіційні опоненти: - доктор технічних наук, професор
Ванін Володимир Володимирович,
завідувач кафедри нарисної геометрії,
інженерної та комп’ютерної графіки,
Національний технічний університет України
„Київський політехнічний інститут” (м. Київ)
- кандидат технічних наук, доцент
Гнатушенко Володимир Володимирович,
доцент кафедри електронних засобів телекомунікацій,
Дніпропетровський національний університет
(м. Дніпропетровськ)

Провідна установа: Донецький національний технічний університет,
кафедра нарисної геометрії
і комп’ютерної графіки,
Міністерства освіти і науки України,
(м. Донецьк)

Захист відбудеться "_21_" _вересня_ 2006 р. о 13 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.056.06 у Київському національному університеті будівництва і архітектури за адресою:

03680, Київ-680, Повітрофлотський проспект, 31, ауд. 466

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Київського національного університету будівництва і архітектури за адресою:

03680, Київ-680, Повітрофлотський проспект, 31

Автореферат розісланий "_18_" _серпня_ 2006 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради В.О. Плоский

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Маятникові коливальні системи широко застосовуються в машинах і механізмах, наприклад, у сільськогосподарських молотарках, у гасителях вібрацій та різноманітних заспокоювачів, у вібро –устаткуванні, у церковних дзвонах, у морських бакенах, розважальних атракціонах, тощо. Дослідженням цих систем займаються фахівці багатьох областей точних наук: теоретичної механіки, теорії машин і механізмів, прикладної й обчислювальної математики, і т.п. На ефективність функціонування перерахованих пристроїв істотно впливають їх експлуатаційні параметри, у тому числі і пов'язані з їх геометричною формою. Особливо це стосується багатоланкових маятникових механічних систем. При дослідженні цього різновиду пристроїв бажано було б унаочнити взаємне положення окремих ланок маятника у певні моменти часу, а також передбачити варіанти нестійкості (хаотичності) коливань. Ці два питання можуть стати предметом дослідження прикладної геометрії, адже взаємне положення ланок маятника можна унаочнити із застосуванням комп'ютерної анімації, а варіанти хаотичності коливань можна дослідити за допомогою спеціальних графічних зображень – фазових портретів коливань.

З *позицій прикладної геометрії* ці два питання виявились у ще не зайнятій науковій ніші. Звідси стає зрозумілою актуальність обраної теми досліджень, яка полягає в розробці алгоритмічного забезпечення програм геометричного моделювання багатоланкових механічних маятникових коливань вантажів, та вивчення цього процесу засобами унаочнення у часі фазових портретів і анімаційного моделювання положень ланок маятникових коливальних систем.

Маятникові механізми, як динамічні системи, розглядалися у роботах Є.І.Бутікова, В.С.Аніщенка, А.Л.Фрадкова, В.В.Козлова, Г.М.Яковенка, С.В.Кузнецова, Б.А.Мартинова, А.В.Борисова, О.М.Кисельова та ін. Геометричне моделювання складних за формою об'єктів як результату їх профілювання за певними законами належать до головних напрямків розвитку прикладної геометрії та інженерної графіки. Однак проведені дослідження не дозволили створити інформаційне забезпечення геометричного моделювання фазових портретів і анімаційного моделювання. Причина цього полягала у відсутності математичних процесорів, які б дозволили здійснювати їх геометричне моделювання на аналітичному та графічному рівнях.

У роботах Л.М.Куценка та його учнів (С.В.Росохи, О.В.Васильєва, В.В.Суліми, В.М.Попова) увагу приділено методам геометричного моделювання певних процесів у середовищі математичного процесора Maple. При цьому ще не дослідженими виявились питання розробки ефективних алгоритмів моделювання та виявлення особливостей коливань багатоланкових маятникових систем. Тому темою даної роботи обрано створення теоретичної бази для алгоритмів геометричного моделювання коливань багатоланкових маятників.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Роботу виконано на кафедрі нарисної геометрії і графіки Національного технічного університету „Харківський політехнічний інститут” в рамках науково-технічної програми кафедри за замовленням НВП „Екструдер”.

Формулювання наукової задачі, нове вирішення якої отримано в дисертації. Унаочнити у часі взаємне положення ланок в процесі коливань багатоланкових маятникових механічних систем на основі розв’язання системи рівнянь Лагранжа другого роду, та побудувати, в залежності від вхідних параметрів, множину фазових портретів коливальних систем з метою виявлення особливостей цих систем.

Мета і задачі дослідження. Метою дослідження є створення теоретичної бази для алгоритмів комп'ютерної анімації коливань багатоланкових маятникових систем, а також для побудови їх фазових портретів.

Об'єктом дослідження є процес коливань механічних систем маятникового типу.

Предметом дослідження є математичне забезпечення алгоритмів геометричного моделювання та комп'ютерної анімації коливань багатоланкових маятникових систем, а також побудови їх фазових портретів.

Методи дослідження: теорія інваріантних множин динамічних систем, елементи теорії коливань, диференціальних рівнянь та обчислювальної математики, а також елементи комп'ютерної графіки у середовищі математичного процесора Maple та пакету WinSet.

Для досягнення цієї мети у дисертації поставлено такі **основні задачі**:

- проаналізувати та класифікувати способи опису коливальних процесів, характерних для багатоланкових маятників;
- для опису процесу коливань багатоланкових маятників розробити для процесора Maple метод автоматичного визначення системи диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду;
- скласти програму розв'язання системи диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду за заданими початковими умовами;
- на основі знайдених розв’язків запропонувати метод унаочнення коливального процесу маятникових коливальних систем;
- проаналізувати взаємне положення ланок маятникової системи в обраний момент часу із застосуванням торової системи координат, де кількість обертів ланки дорівнює кількості витків лінії на поверхні тора;
- побудувати множину фазових портретів коливальних систем маятникового типу у середовищі пакету WinSet;
- результати впровадити у виробництво для розрахунку вібраційного апарату маятникового типу та у навчальний процес.

Наукові положення, розроблені особисто дисертантом та їх новизна. Наукову новизну роботи має метод унаочнення у часі процесу коливань ланок маятникових механічних систем, складовими якого є спосіб складання та розв’язання диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду, в результаті чого одержуються залежності для кутів відхилення ланок маятника від вертикалі, а також побудовані фазові портрети процесу коливань, що дозволяють виявити особливості цих систем.

Вірогідність та обґрунтованість результатів підтверджується доведенням тверджень, аналітичними перетвореннями за допомогою процесора Maple та побудованими за допомогою комп'ютера зображеннями результатів розв'язання диференціальних рівнянь, а також розрахунками у процесі впровадження.

Практичне значення одержаних результатів дисертації полягає у спроможності на її теоретичній базі розраховувати реальні маятникові коливальні системи в процесі їх впровадження у машинах і механізмах сільгоспмолотарок, церковних дзвонів, морських бакенів, гасителів вібрацій та різноманітних заспокоювачів, розважальних атракціонів, тощо. Реалізація роботи виконана в НВП „Екструдер" при розрахунку вібраційного апарату маятникового типу, та у навчальний процес НТУ „ХПІ", що підтверджується довідками про використання запропонованої методики.

Особистий внесок здобувача. Особисто автор виконала теоретичні дослідження по складанню та розв'язанню диференціальних рівнянь, розробила для математичного процесора Maple версії алгоритмів унаочнення процесу коливань багатоланкових маятників, а також для пакету WinSet побудови фазових портретів коливальних систем.

Апробація результатів дисертації. Основні положення дисертаційної роботи доповідалися та обговорювались на:

науковому семінарі кафедри нарисної геометрії та графіки НТУ під керівництвом к.т.н., проф. А.М.Краснокутського (м. Харків, 2004 - 2006 рр.);

міській секції графіки під керівництвом д.т.н., проф. Л.М.Куценка (м. Харків, 2006 р);

науковому семінарі кафедри нарисної геометрії та комп'ютерної графіки ДонНТУ під керівництвом д.т.н., проф. І.А.Скидана (м. Донецьк, 2006 р.);

науковому семінарі кафедри нарисної геометрії, інженерної та комп'ютерної графіки НТУУ „КПІ" під керівництвом д.т.н., проф. В.В.Ваніна (м. Київ, 2006 р.);

другій науково-практичній конференції „Геометричне і комп'ютерне моделювання: енергозбереження, екологія, дизайн" (м. Сімферополь, 2005 р.);

україно–російській науково–практичній конференції "Сучасні проблеми геометричного моделювання" (м. Харків, 2005 р.);

науково – практичній конференції "Сучасні проблеми геометричного моделювання" (м. Дніпропетровськ, 2006 р.).

Публікації. За результатами досліджень опубліковано 12 робіт (з них 3 одноосібно, 9 у виданнях, які рекомендовано ВАК України).

Структура і обсяг роботи. Дисертація складається із вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел із 155 найменувань та додатків. Робота містить 164 сторінок машинописного тексту та 48 рисунків.

ЗМІСТ РОБОТИ

Вступ містить загальну характеристику роботи. Обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету та задачі досліджень. Показано наукову новизну і практичну цінність отриманих розв'язків.

У **першому розділі** наведено огляд схем багатоланкових маятників та традиційні методи визначення їх коливань. Крім розглянутих маятників ланцюгового типу на рис. 1 наведено ще схеми багатоланкових маятників а) магдебурзького; б) коромислового; в) Томсона-Тета та г) комбінованого. Позначено кути та довжини ланок. Також вважається, що вантажі різних мас можуть розміщатися як в кінцевих точках ланок, так і в вузлах ланок.

а)	б)
в)	г)

Рис. 1. Схеми деяких багатоланкових маятників

Для опису коливань багатоланкових маятників використано рівняння Лагранжа другого роду $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial u_i'}\right)-\frac{\partial L}{\partial u_i}=0$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, де u_i' - похідні за часом t від узагальнених координат $u_i(t)$, і де позначено $L = K - P$. Тут через K і P позначено вирази для кінетичної та потенціальної енергії.

В роботі наведено критичний аналіз методів автоматизованого складання та розв'язання системи рівняння Лагранжа другого роду. Розглядалися варіанти використання пакетів REDUSE і MathCAD. В результаті аналізу перевагу в роботі було надано пакету Maple. Також було розглянуто огляд пакетів для побудови фазових портретів коливань систем маятникового типу.

В другому розділі наведено метод автоматизованого формування системи двох (як приклад) диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial u'}\right)-\frac{\partial L}{\partial u}=0; \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v'}\right)-\frac{\partial L}{\partial v}=0,$$

де u' і v' - похідні за часом t від узагальнених координат u і v, де $L = K - P$, і де позначено через K кінетичну енергію, а через P - потенціальну енергію, яка може задаватися узагальненими силами.

Для автоматизованого формування у аналітичному вигляді системи рівнянь Лагранжа другого роду доцільно використати Maple-оператор `subs(X=A,B)`, який дозволяє у виразі В замінити підвираз Х на підвираз А.

Твердження 1. Результати диференціювання $\dfrac{\partial L}{\partial u'}$, $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial u'}\right)$ і $\dfrac{\partial L}{\partial u}$ у аналітичному вигляді можна одержати за допомогою Maple-операторів

```
    dL_U := subs(W = diff(u(t),t),
                      diff(subs(diff(u(t), t) = W, L), W));
    dL_U_dt := diff(dT_U, t);
   dL_U_ := subs(W = u(t), diff(subs(u(t) = W, L), W)).
```

Тоді рівняння Лагранжа другого роду у аналітичному вигляді можна одержати за допомогою оператора `dL_U_dt - dL_U_ =0.`

Проілюструємо це твердження на прикладі складання рівнянь Лагранжа другого роду для подвійного маятника. З рис. 2 одержуємо координати вузлових точок

```
     xa := L1*sin(u(t));
     ya := L1*cos(u(t));
     xb := xa+L2*sin(v(t));
     yb := ya+L2*cos(v(t)).
```

Враховуючи вирази для кінетичної та потенціальної енергії, одержуємо (наведено screen shot робочого вікна Maple, тому аналітичні вирази є стилізованими)

$$L := \frac{1}{2}\,m1\left(L1^2\cos(\mathrm{u}(t))^2\left(\frac{d}{dt}\mathrm{u}(t)\right)^2 + L1^2\sin(\mathrm{u}(t))^2\left(\frac{d}{dt}\mathrm{u}(t)\right)^2\right) + \frac{1}{2}\,m2\Bigg(\left(L1\cos(\mathrm{u}(t))\left(\frac{d}{dt}\mathrm{u}(t)\right) + L2\cos(\mathrm{v}(t))\left(\frac{d}{dt}\mathrm{v}(t)\right)\right)^2 + \left(-L1\sin(\mathrm{u}(t))\left(\frac{d}{dt}\mathrm{u}(t)\right) - L2\sin(\mathrm{v}(t))\left(\frac{d}{dt}\mathrm{v}(t)\right)\right)^2\Bigg) + (m1+m2)\,g\,L1\cos(\mathrm{u}(t)) + m2\,g\,(L1\cos(\mathrm{u}(t)) + L2\cos(\mathrm{v}(t)))$$

Програмна реалізація операторів наведеного твердження приводить до системи диференціальних рівняння Лагранжа другого роду:

$$L1\Bigg(m1\,L1\left(\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{u}(t)\right) - m2\cos(\mathrm{u}(t))\,L2\sin(\mathrm{v}(t))\left(\frac{d}{dt}\mathrm{v}(t)\right)^2 + m2\cos(\mathrm{u}(t))\,L2\cos(\mathrm{v}(t))\left(\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{v}(t)\right) + m2\,L1\left(\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{u}(t)\right) + m2\sin(\mathrm{u}(t))\,L2\cos(\mathrm{v}(t))\left(\frac{d}{dt}\mathrm{v}(t)\right)^2 + m2\sin(\mathrm{u}(t))\,L2\sin(\mathrm{v}(t))\left(\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{v}(t)\right) + g\sin(\mathrm{u}(t))\,m1 + 2\,m2\,g\sin(\mathrm{u}(t))\Bigg) = 0$$

$$m2\,L2\left(-\cos(\mathrm{v}(t))\,L1\,\sin(\mathrm{u}(t))\left(\frac{d}{dt}\mathrm{u}(t)\right)^2+\cos(\mathrm{v}(t))\,L1\,\cos(\mathrm{u}(t))\left(\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{u}(t)\right)\right.$$
$$+\sin(\mathrm{v}(t))\,L1\,\cos(\mathrm{u}(t))\left(\frac{d}{dt}\mathrm{u}(t)\right)^2+\sin(\mathrm{v}(t))\,L1\,\sin(\mathrm{u}(t))\left(\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{u}(t)\right)$$
$$\left.+L2\left(\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{v}(t)\right)+g\,\sin(\mathrm{v}(t))\right)=0$$
.

Позначивши ліві частини рівнянь як `ODE1` і `ODE2`, розв'яжемо одержану систему рівнянь з початковими умовами, наприклад, такими:

```
initial := {u(0)=Pi/2, D(u)(0)=0, v(0)=Pi, D(v)(0)=0},
```

будемо чисельно:

```
sol := dsolve({ODE1,ODE2} union initial, numeric,
method=rkf45, output=listprocedure).
```

Опція `output=listprocedure` дозволяє отримати розв'язок у вигляді процедур. Після доопрацювання

```
solu :=  subs(sol, u(t)):
solv :=  subs(sol, v(t)):
dsolu := subs(sol, diff(u(t),t)):
dsolv := subs(sol, diff(v(t),t)):
```

ці розв'язки можна трактувати і використовувати, як аналітичні вирази.

Твердження 2. Фазовий портрет для змінної *u(t)* на проміжку часу [0...T] можна побудувати за допомогою оператора

```
plot([solu(t), dsolu(t),t=0..T], labels=[u,du]).
```

Твердження 3. Оцінити кількість кругових обертань вільної ланки маятника можна в торовій системі координат (рис. 3 а) за допомогою кількості витків кривої

```
x := (L1 + L2*cos(solv(t)))*cos(solu(t));
y := (L1 + L2*cos(solv(t)))*sin(solu(t));
z := L2*sin(solv(t)),
```

намотаної на поверхню тора (рис. 3 б)

$$x=(L1+L2\cos v)\cos u;\qquad y=(L1+L2\cos v)\sin u;\qquad z=L2\sin v.$$

а)	б)

Рис. 3. Торова система координат та витки кривої на поверхні тора

Для прикладу розглянемо моделювання коливань магдебурзького (оберненого) маятника (рис 1 а). Він складається зі стержнів довжин $L_1 + L_0$ і L_2, на яких в точках *A* і *C* закріплені кульки з масами m_1 і m_2. Для визначеності взято L_0 = 0,45; L_1 = 0,3; L_2 = 0,2; m1 = 3.5 і m2 = 1.5 умовних одиниць. Через Jc позначено момент інерції всього тіла відносно центру мас (Jc = 0,1). Тоді

```
xa := L1*sin(u(t));          ya := L1*cos(u(t));
xb := -L0*sin(u(t));         yb := -L0*cos(u(t));
```

```
xc := xb + L2*sin(v(t));      yc := yb + L2*cos(v(t)),
```

і вирази для кінетичної і потенціальної енергії матимуть вигляд

$$K := \frac{1}{2}\, m1\, L1^2 \left(\frac{d}{dt}\mathrm{u}(t)\right)^2 - m2\, L0 \left(\frac{d}{dt}\mathrm{u}(t)\right) L2 \left(\frac{d}{dt}\mathrm{v}(t)\right) \cos(\mathrm{u}(t)-\mathrm{v}(t))$$
$$+\frac{1}{2}\, m2\, L0^2 \left(\frac{d}{dt}\mathrm{u}(t)\right)^2 + \frac{1}{2}\, m2\, L2^2 \left(\frac{d}{dt}\mathrm{v}(t)\right)^2 + \frac{1}{2}\, Jc \left(\frac{d}{dt}\mathrm{v}(t)\right)^2$$

$$P := g\, m1\, (L1 - L1\cos(\mathrm{u}(t))) + g\, m2\, (-L0 + L2 + L0\cos(\mathrm{u}(t)) - L2\cos(\mathrm{v}(t)))$$

Автоматизовано складена система рівнянь Лагранжа другого роду має вигляд

$$ODE1 := m1\, L1^2 \left(\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{u}(t)\right) - m2\, L0\, L2 \left(\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{v}(t)\right) \cos(\mathrm{u}(t)-\mathrm{v}(t))$$
$$- m2\, L0\, L2 \left(\frac{d}{dt}\mathrm{v}(t)\right)^2 \sin(\mathrm{u}(t)-\mathrm{v}(t)) + m2\, L0^2 \left(\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{u}(t)\right) + g\, m1\, L1 \sin(\mathrm{u}(t))$$
$$- g\, m2\, L0 \sin(\mathrm{u}(t)) = 0$$

$$ODE2 := -\left(\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{u}(t)\right) m2\, L0\, L2 \cos(\mathrm{u}(t)-\mathrm{v}(t)) + \left(\frac{d}{dt}\mathrm{u}(t)\right)^2 m2\, L0\, L2 \sin(\mathrm{u}(t)-\mathrm{v}(t))$$
$$+ m2\, L2^2 \left(\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{v}(t)\right) + Jc \left(\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{v}(t)\right) + g\, m2\, L2 \sin(\mathrm{v}(t)) = 0$$

Для визначення стійкості магдебурзького маятника до хаотичних коливань, в залежності від початкових умов, слід одержану систему рівнянь розв'язати принаймні з трьома початковими умовами:

```
{u(0)=Pi/2,            D(u)(0)=0, v(0)=Pi, D(v)(0)=0};
{u(0)=Pi/2-Pi/10000, D(u)(0)=0, v(0)=Pi, D(v)(0)=0};
{u(0)=Pi/2+Pi/10000, D(u)(0)=0, v(0)=Pi, D(v)(0)=0}.
```

На рис. 4 зображені суміщені фазові портрети цих розв'язків, які позначено лінями, відповідно, суцільною, штрих-пунктирною та пунктирною. Значення параметрів: `L0=0,4; L1=0,4; L2=0,2; m1=3,5` і `m2=1,5.`

Рис. 4. Приклад фазових портретів хаотичних коливань

В результаті проведених комп'ютерних експериментів в роботі вдалося знайти набір параметрів `L0=0,4; L1=0,2; L2=0,2; m1=3,5` і `m2=1,5`, які забезпечують стійкість коливань магдебурзького маятника. На рис. 5 зображені відповідні фазові портрети.

Рис. 5. Приклад фазових портретів стійких коливань

В третьому розділі розглянуто геометричні інтерпретації, пов'язані з аналізом коливань. Нехай математичним маятником є кулька маси *m*, підвішена на нитці довжини *L*, яка відхилена на кут φ від вертикалі. Такий маятник звичайно досліджують за допомогою рівняння $\varphi'' + \omega^2 \sin\varphi = 0$, де $\omega^2 = g / L$, або при заміні $t \to t/\omega$, $\varphi'' + \sin\varphi = 0$. Розв'язки цього диференціального рівняння мають вигляд: $\varphi = 2\pi k$ і $\varphi = \pi(2k+1)$, де $k \in Z$, і відповідають положення рівноваги: $\varphi = 0$ - нижній й $\varphi = \pi$ - верхній. Вираз $\varphi'' + \sin\varphi$ помножимо на φ' і виконаємо інтегрування по *t*: $\frac{1}{2}(\varphi')^2 - \cos\varphi = E$. В результаті одержимо закон збереження енергії E для маятника. Якщо досліджувати тільки дійсні розв'язки, то $2E+2\cos(\varphi) \geq 0$, тобто $E \geq -1$. $E = -1$ відповідає стаціонарним розв'язкам $\varphi=2\pi k$, $k\in Z$. При $E > 1$ швидкість φ' ніколи не дорівнює нулю. Тобто, $E > 1$ відповідає обертовим розв'язкам (обертовий маятник). Якщо $E > -1$ і $E < 1$, тоді рівняння $\frac{1}{2}(\varphi')^2 - \cos\varphi = E$ визначає сім'ю замкнених кривих. Крайні значення φ досягаються при $\varphi' = 0$ і дорівнюють $\varphi_{\pm} = \pm 1/2\arccos(-E) + 2\pi k$. Максимальні значення швидкостей досягаються в точці $\varphi = 2\pi k$ і дорівнюють $\pm\sqrt{2E}$. Значенню $E = 1$ відповідають два типи траєкторій, це точки рівноваги $\varphi = \pi(2k+1)$ і сепаратриси, що відокремлюють коливальні рухи маятника від його обертових рухів.

На рис. 6 наведено лінії рівня функції енергії маятника $E = E(\varphi, \varphi')$, що зображені на фазовій площині маятника. Періодичність розташування ліній рівня дозволяє розглянути фазовий циліндр, який утворений в результаті "згортання" у трубку фазової площини маятника (рис. 7).

Рис. 6. Лінії рівня функції енергії маятника	Рис. 7. Фазовий циліндр

Наступним етапом абстрагування буде "згинання" циліндричного фазового простору маятника у U-подібну трубу так, щоб нижня точка рівноваги маятника опинилася в найнижчий точці U-подібної труби. В цьому випадку всі траєкторії залишаться на тій же висоті (рис. 8). Цим визначається геометричний погляд на збереження енергії, який застосовується *у теорії динамічних систем*. Адже завдяки цій ілюстрації втрату енергії маятника можна пояснити переходом точки на U-подібній трубі на більш низький енергетичний рівень. Переміщення точки по одному з відгалужень U-подібної труби відповідатиме повторюваному руху обертового маятника. Невелике тертя змусить точку опускатися по спіралі вниз труби. В результаті спіраль досягне вигину на трубі, і перейде у область її "розгалуження"; при цьому обертовий рух маятника має перейти у гойдання. Переміщення точки по U-подібній трубі нижче розгалуження відповідатиме коливальним рухам маятника, амплітуда його коливань зменшується, і, зрештою, він застигне в стані спокою “на дні” U-подібної труби (рис. 9).

Рис. 8. U-подібна труба, як результат “згинання” фазового циліндру	Рис. 9. Пояснення переходу у гойдання обертового руху маятника

Наведені графічні ілюстрації призначені для виявлення особливостей коливань маятника, до яких належить і хаотичність його рухів. Але на практиці зустрічаються маятникові системи, що відображають реальні процеси, і описи яких є значно складнішими, порівняно з описом $\varphi'' = -\sin\varphi$.

В якості прикладів в роботі розглядалися рівняння:

а) звичайного маятника (тест при $p_1 = 0$; $p_2 = 1$):

$$\varphi'' = -\sin\varphi + p_1 \sin(p_2 t);$$

б) параметричного маятника (тест при $p_1 = 0{,}1$; $p_2 = p_3 = 0$; $p_4 = 2$):

$$\varphi'' = -\sin\varphi + p_1 \cos(p_4 t)\sin\varphi + (p_2 + p_3 \cos\varphi)\varphi';$$

в) маятника генератора циклів (тест при $p_1 = -0{,}0285$; $p_2 = 1$; $p_3 = 3$):

$$\varphi'' = -\sin\varphi + y(p_1 + p_2 \cos(p_3\varphi));$$

г) маятника Морозова (тест при $p_1 = -0{,}027$; $p_2 = 1$; $p_3 = 3$, $p_4 = 1$; $p_5 = 5$):

$$\varphi'' = -\sin\varphi + \varphi'(p_1 + p_2 \cos(p_3\varphi))\,(1 + p_4 \sin(p_5 t));$$

д) полігармонічного маятника (тест при $p_1 = 0{,}2$; $p_2 = -1$; $p_3 = 0{,}1$, $p_4 = 1$):

$$\varphi'' = -p_1 \sin\varphi - p_2 \sin(3\varphi) + p_3 \sin(p_4 t)).$$

Далі наведено приклади фазових портретів, побудованих за допомогою пакету WinSet. Області хаотичності зображено дискретними точками. На рис. 10 зображено фазові портрети для параметричного маятника, які відповідають параметрам: а) $p_1 = 0{,}1$; $p_2 = p_3 = 0$; $p_4 = 2$; б) $p_1 = 0{,}1$; $p_2 = p_3 = 0$; $p_4 = 3$;
в) $p_1 = 0{,}1$; $p_2 = p_3 = 0$; $p_4 = 6$; г) $p_1 = -0{,}1$; $p_2 = p_3 = 0$; $p_4 = 2$.

а)	б)
в)	г)

Рис. 10. Фазові портрети для параметричного маятника.

На рис. 11 зображено фазові портрети для маятника генератора циклів, які відповідають параметрам: а) $p_1 = -0{,}0285$; $p_2 = 1$; $p_3 = 3$; $p_4 = 0$; $p_5 = 1$;
б) $p_1 = -0{,}0285$; $p_2 = 1$; $p_3 = 9$; $p_4 = 0$; $p_5 = 1$.

На рис. 12 зображено фазові портрети для полігармонічного маятника, які відповідають параметрам: а) $p_1 = 0{,}5$; $p_2 = -1$; $p_3 = 0$; $p_4 = 1$;
б) $p_1 = 0{,}2$; $p_2 = 3$; $p_3 = 0{,}1$; $p_4 = 1$;

в) $p_1 = 0,2$; $p_2 = -1$; $p_3 = 0,1$; $p_4 = 1$;

г) $p_1 = 0,5$; $p_2 = -1$; $p_3 = 0,5$; $p_4 = 1$;

а)	б)

Рис. 11. Фазові портрети для маятника генератора циклів

а)	б)
в)	г)

Рис. 12. Фазові портрети для полігармонічного маятника

В **четвертому розділі** представлено можливе впровадження одержаних результатів дисертації для розрахунку вібраційних апаратів маятникового типу. При цьому наголошується, що дисертація присвячена саме *геометричним,* а не технологічним питанням конструювання.

На рис. 13 показана схема вібраційного апарата. Робоча камера пристрою (3) установлена на чотирьох вертикальних пружинах (6). У двох підшипниках, жорстко зв'язаних з камерою, знаходиться коліно маятникового вала-ротора (4), де e – ексцентриситет, на якому укріплені дебаланси (5). Ротор зв'язаний гнучким валом (дюритом, 2) з валом електродвигуна (1).

Рис. 13. Схема вібраційного апарату маятниково-обертового типу

Для визначення рівнянь руху застосовано методику складання рівнянь Лагранжа другого роду на основі схеми механізму, який зображено на рис. 14. При цьому враховуються наступні параметри: M - сумарна маса робочої камери й оброблюваного матеріалу; m - маса всіх обертових деталей ротора; J - момент інерції робочої камери відносно осі, що проходить через центр мас C; I - момент інерції ротора відносно осі, що проходить через центр мас C_1; J_e - момент інерції електродвигуна; H_0 - довжина недеформованої пружини; k_x, k_y, k_ϑ - жорсткості пружин відповідно на зрушення, розтягання-стиск, поворот; $\Delta_0 = (M + m)g / 4k_y$ - початкова деформація пружини; $H = H_0 - \Delta_0$ - довжина статично деформованої пружини; k- твердість гнучкого вала на крутіння; k_r - згинова твердість вала.

Узагальненими координатами розглянутої коливальної системи обрано: кути повороту ротора електродвигуна і ротора механізму, які позначено, відповідно, як ψ і φ; декартові координати x і y , що визначають положення центра мас робочої камери стосовно нерухомої системи координат Oxy, а також кут повороту робочої камери ϑ.

Для моделювання коливань вібробункера було складено рівняння Лагранжа другого роду з врахуванням параметрів асинхронного двигуна. Розв’язання одержаної системи п’яти диференціальних рівнянь здійснювалося із застосуванням математичного пакету MatCAD.

Рис. 14. Розрахункова схема вібраційного механізму

Розв’язок системи диференціальних рівнянь з наступними параметрами: $\dot{\psi}(0)=\dot{\varphi}(0)=\dot{x}(0)=\dot{y}(0)=\dot{\vartheta}(0)=\dot{M}_D(0)=0$; $\psi(0)=\varphi(0)=\pi/2$; $x(0)=y(0)=\vartheta(0)=0$; $M_D(0)=M_s$; використовувався для дослідження динамічних процесів у вібраційному апараті.

На рис. 15 показані закони руху характерних точок робочої камери на сталому режимі ($b=0{,}28$м, $b_1=0{,}18$м). При цьому прийнято наступну нумерацію: 1 - центр мас; 2 - точка, що належить осі камери; 3 – найнижча точка вертикального діаметра; 4 і 5 - відповідно ліва і права точки горизонтального діаметра. З рисунка видно, що поворотні коливання можуть впливати на характер руху точок робочої камери.

Розглянута модель допомогла обрати оптимальні значення параметрів, які зменшують передачу вібрацій на основу, що приводить до розвантаження підшипників.

ВИСНОВКИ

Дисертацію присвячено новому розв’язанню задачі геометричного моделювання та унаочненню у часі взаємного положення ланок в процесі коливань багатоланкових маятникових механічних систем на основі розв’язання системи рівнянь Лагранжа другого роду, та побудові в залежності від вхідних параметрів множини фазових портретів коливальних систем з метою виявлення особливостей цих систем.

Значення для науки роботи полягає у подальшому розвитку способів опису та аналізу коливань багатоланкових маятникових механічних систем.

Значення для практики досліджень полягає в скороченні термінів та підвищенні точності моделювання коливань, одержанні моделей, що задовольняють заданим вимогам і прискорюють проектування виробів.

При цьому отримані результати, що мають науково-практичну цінність.

1. Виконано критичний огляд методів опису коливальних процесів, характерних для багатоланкових маятників, з чого випливає необхідність розробок комп’ютерних програм розрахунку їх коливань за допомогою математичних процесорів, здатних оперувати з аналітичними виразами.

2. Для опису процесу коливань багатоланкових маятників розроблено для математичного процесора Maple метод автоматичного визначення системи диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду; це дозволило розширити множину описів різновидів коливальних маятникових систем.

3. Складено програму розв'язання системи диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду за заданими початковими умовами, що дозволить розширити клас диференціальних рівнянь, які використовуються у методах прикладної геометрії.

4. На основі знайдених розв’язків було запропоновано метод унаочнення коливального процесу різновидів маятникових коливальних систем, що дозволило доповнити множину анімаційних зображень в прикладній геометрії.

5. Було проаналізовано взаємне положення ланок маятникової системи в обраний момент часу із застосуванням торової системи координат, де кількість обертів ланки дорівнює кількості витків лінії на поверхні тора; це дозволить суттєво формалізувати аналіз процесу коливань багатоланкових маятників.

6. Було побудовано множину фазових портретів коливальних систем маятникового типу у середовищі пакету WinSet, що дозволило аналізувати коливальний процес, у тому числі і визначати області хаотичності маятника.

7. Результати впроваджено в НВП „Екструдер” для розрахунку вібраційного апарату маятникового типу, та у навчальний процес кафедри нарисної геометрії і графіки НТУ „ХПІ”.

Основні положення дисертації опубліковано у таких роботах:

1. *Адашевська І.Ю.* Програма опису та побудови кривої шляхом приведення її рівняння до канонічного виду // Геометричне та комп’ютерне моделювання. Харків: ХДУХТ, 2004. Вип. 7. – С. 74-81

2. *Куценко Л.М., Адашевська І.Ю.* Шестиланковий механізм крокування для машин опорної прохідності // Геометричне та комп’ютерне моделювання. Харків: ХДУХТ, 2005. Вип. 9. – С. 82-89

Особисто автором розроблено алгоритм та складено програму розрахунку одного з прикладів багатоланкової коливальної системи.

3. *Адашевська І.Ю., Запольський Л.Л.* Дослідження шестиланкового механізму крокування для машин опорної прохідності // Геометричне та комп’ютерне моделювання. Харків: ХДУХТ, 2005. Вип. 10. – С. 112-119

Особисто автором виконано огляд схем механізмів крокування та складено програму розрахунку багатоланкової коливальної системи.

4. *Шатохін В.М., Адашевська І.Ю.* Геометричне моделювання переміщення точок робочої камери вібраційного апарату // Геометричне та комп’ютерне моделювання. Харків: ХДУХТ, 2005. Вип. 12. – С. 94-100

Особисто автором розроблено алгоритм та складено програму розрахунку вібраційного апарату маятникового типу.

5. *Куценко Л.М., Адашевська І.Ю.* Визначення положення прямої відносно множини точок на площині методом професора А.В.Найдиша // Геометричне та комп’ютерне моделювання. Харків: ХДУХТ, 2005. Вип. 13. – С. 49-59

Особисто автором розроблено алгоритм та складено програму ідентифікації положення прямої відносно множини точок на площині.

6. *Адашевська І.Ю.* Динамічний розрахунок важільного механізму у середовищі пакету MODEL VISIUN STUDIUM // Геометричне та комп’ютерне моделювання. Харків: ХДУХТ, 2006. Вип. 14. – С. 188-197

7. *Шатохин В.М., Адашевская И.Ю.* Моделирование динамических процессов в шариковых радиально-поршневых насосах // Геометричне та комп’ютерне моделювання. Харків: ХДУХТ, 2006. Вип. 14. – С. 41-51

Особисто автором розроблено алгоритм та складено програму розрахунку різновиду механізму маятникового типу.

8. *Адашевська І.Ю., Запольський Л.Л.* Геометричне моделювання циклічних механізмів крокування з пасивно керованою стопою// Геометрическое и компьютерное моделирование: энергосбережение, екологія, дизайн. Сборник научных трудов.- Киев: КНУТИД, 2005.– С. 90-98

Особисто автором складено програму розрахунку циклічних механізмів крокування як прикладу багатоланкової коливальної системи.

9. *Адашевська І.Ю.* Про можливість прокручування ланок чотири шарнірного механізму крокування для машин опорної прохідності // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Київ: КНУБА, 2005. Вип. 75. –С.210 - 216

10. *Адашевська І.Ю., Запольський Л.Л.* Основні типи механізмів крокування для машин опорної прохідності // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. Мелітополь: ТДАТА, 2005. Вип. 4. - Т. 29. - С. 79-83

Особисто автором розроблено алгоритм та складено програму розрахунку прикладу багатоланкової коливальної системи.

11. *Адашевська І.Ю., Запольський Л.Л.* Аналітичні методи аналізу і синтезу механізмів машин (огляд літературних джерел) // Праці Таврійської держ. агротехн. академії. Мелітополь:ТДАТА, 2006. Вип. 4.- Т. 31.- С. 137-146

Особисто автором виконано огляд літературних джерел синтезу механізмів машин як прикладів багатоланкових коливальних систем.

12. *Куценко Л.Н., Адашевская И.Ю., Шатохин В.М.* Геометрическое моделирование фазовых портретов колебания двойного маятника // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Вип. 2(43), Дніпропетровськ, 2006 – С. 120 - 124

Особисто автором складено програму унаочнення процесу коливань та побудови фазових портретів коливань подвійного маятника.

Адашевська І.Ю. Геометричне моделювання коливань багатоланкових маятникових механічних систем. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 05.01.01 – Прикладна геометрія, інженерна графіка. – Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ, Україна, 2006.

Дисертацію присвячено новому розв’язанню задачі геометричного моделювання та унаочненню у часі взаємного положення ланок в процесі коливань багатоланкових маятникових механічних систем на основі розв’язання системи рівнянь Лагранжа другого роду, та побудові, в залежності від вхідних

параметрів, множини фазових портретів коливальних систем з метою виявлення особливостей цих систем.

До головних результатів слід віднести метод автоматичного визначення системи диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду для опису процесу коливань багатоланкових маятників розроблених із застосуванням математичного процесора Maple. В результаті було складено програму розв'язання системи рівнянь Лагранжа другого роду за заданими початковими умовами. На основі знайдених розв’язків було запропоновано метод унаочнення коливального процесу різновидів маятникових коливальних систем. Із застосуванням торової системи координат було проаналізовано взаємне положення ланок маятникової системи в обраний момент часу, де кількість обертів ланки дорівнює кількості витків лінії на поверхні тора у фазовому просторі. Було побудовано множину фазових портретів коливальних систем маятникового типу у середовищі пакету WinSet, що дозволило аналізувати коливальний процес.

Ключові слова: математичний маятник, багатоланковий маятник, фазовий портрет коливань.

Адашевская И.Ю. Геометрическое моделирование колебаний многозвенных маятниковых механических систем. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 05.01.01 – Прикладная геометрия, инженерная графика. – Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Киев, Украина, 2006.

Диссертация посвящена новому решению задачи геометрического моделирования и визуализации во времени взаимного положения звеньев в процессе колебаний многозвенных маятниковых механических систем на основе решения системы уравнений Лагранжа второго рода, и построению, в зависимости от входных параметров, множества фазовых портретов колебательных систем с целью выявления особенностей этих систем. При исследовании колебаний двойных маятников целесообразно сделать наглядным взаимное положение отдельных звеньев маятника в определенные моменты времени, а также предусмотреть варианты нестойкости (хаотичности) колебаний. Эти два вопроса могут стать предметом исследования прикладной геометрии, ведь взаимное положение звеньев маятника можно сделать наглядным с применением компьютерной анимации, а варианты хаотичности колебаний можно исследовать с помощью специальных графических изображений - фазовых портретов колебаний. С позиций прикладной геометрии эти два вопроса оказались в еще не занятой научной нише. Отсюда становится понятной актуальность избранной темы исследований, которая заключается в разработке алгоритмического обеспечения программ геометрического моделирования многозвенных механических маятниковых колебаний грузов, и изучение этого процесса средствами компьютерной визуализации во времени фазовых портретов и анимационного моделирования положений звеньев маятниковых колебательных систем.

Геометрическое моделирование сложных по форме объектов, как результата их профилирования по определенным законам, принадлежат к главным направлениям развития прикладной геометрии и инженерной графики. Однако проведенные исследования не разрешили создать информационное обеспечение геометрического моделирования фазовых портретов и анимационного моделирования. Причина этого состояла в отсутствии математических процессоров, которые бы позволили осуществлять их геометрическое моделирование на аналитическом и графическом уровнях. При этом еще не исследованным оказался вопрос разработки эффективных алгоритмов моделирования и выявления особенностей колебаний многозвенных маятниковых систем. Поэтому темой данная работа избрана создание теоретической базы для алгоритмов геометрического моделирования колебаний многозвенных маятников.

К главным результатам работы следует отнести метод автоматического определения системы дифференциальных уравнений Лагранжа второго рода для описания процесса колебаний многозвенных маятников с применением математического процессора Maple. В результате была составлена программа решения системы уравнений Лагранжа второго рода по заданным начальным условиям, что позволило расширить класс дифференциальных уравнений, которые используются в методах прикладной геометрии. На основе найденных решений был предложен метод визуализации колебательного процесса разновидностей маятниковых колебательных систем, что позволило дополнить множество анимационных изображений в прикладной геометрии. С применением торовой системы координат было проанализировано взаимное положение звеньев маятниковой системы в избранный момент времени, где количество оборотов звена равняется количеству витков линии на поверхности тора в фазовом пространстве. Было построено множество фазовых портретов колебательных систем маятникового типа в среде пакета WinSet, что позволило анализировать колебательный процесс, в том числе и определять области хаотичности маятника. Результаты работы введено в НВП „Экструдер” для расчета вибрационного бункера маятникового типа, и в учебный процесс кафедры начертательной геометрии и графики НТУ „ХПІ”.

Ключевые слова: математический маятник, многозвенный маятник, фазовый портрет колебаний.

Adashevskay I.J. Geometrical modeling of fluctuations of iterative pendular mechanical systems. - the Manuscript.

Thesis on competition of a scientific degree of the candidate of engineering science on a specialty 05.01.01 - Applied geometry, engineering graph. - Kiev national university of construction and architecture, Kiev, Ukraine, 2006.

The dissertation is devoted to the new decision of a problem of geometrical modeling and visualization in time of mutual position of parts during fluctuations of iterative pendular mechanical systems on the basis of the decision of system of equations Lagrange of the second sort, and to construction depending on entrance parameters of set of phase portraits of oscillatory systems with the purpose of revealing of features of these systems. It is necessary to carry a method of automatic definition of system of differential equations Lagrange of the second sort to the main results for the description of process of fluctuations of iterative pendulum with application of mathematical processor Maple. The program of the decision of system of equations Lagrange of the second sort under the set entry conditions has been as a result made. On the basis of the found decisions the method of visualization of oscillatory process of versions of pendular oscillatory systems has been offered. With application toroidal systems of coordinates mutual position of parts of pendular system during the selected moment of time where the quantity of turns of a part is equaled to quantity of coils of a line on a surface torus in phase space has been analyses. The set of phase portraits of oscillatory systems of pendular type in the environment of package WinSet has been constructed.
Keywords: a mathematical pendulum, an iterative pendulum, a phase portrait of fluctuations.

Підписано до друку 14.08.2006 р. Формат 60x80 1\16 Друк. ризограф. Ум. друк. арк. 1,25 Наклад 100 Вид. № Зам. №

АЦЗ України, 61023, м. Харків, вул. Чернишевського, 94.