НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
"ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ"

Пільгун Галина Володимирівна

УДК 517.925:534.1

МЕТОДИ АНАЛІЗУ ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК І ПЛАСТИН СКЛАДНОЇ ФОРМИ

Спеціальність 05.02.09 – Динаміка та міцність машин

Автореферат

дисертації на здобуття наукового ступеня

кандидата технічних наук

Харків 2006

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Національному технічному університеті "Харківський політехнічний інститут" Міністерства освіти і науки України, м. Харків.

Науковий керівник – доктор технічних наук, професор
Курпа Лідія Василівна,
Національний технічний університет
"Харківський політехнічний інститут", м. Харків
завідувач кафедри прикладної математики

Офіційні опоненти – доктор технічних наук, професор
Грищак Віктор Захарович,
Запорізький державний університет, м. Запоріжжя
проректор з наукової роботи, завідувач кафедри прикладної математики

доктор технічних наук, професор
Морачковський Олег Костянтинович,
Національний технічний університет
"Харківський політехнічний інститут", м. Харків
завідувач кафедри теоретичної механіки

Провідна установа: Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України, відділ прикладної математики та обчислювальних методів, м. Харків

Захист відбудеться ***20 вересня 2006 р.*** о ***14 год. 30 хв.*** на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 64.050.10 у Національному технічному університеті "Харківський політехнічний інститут" за адресою: 61002, м. Харків, вул. Фрунзе, 21.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут" (61002, м. Харків, вул. Фрунзе, 21).

Автореферат розісланий ***16 серпня 2006 р.***

Виконуючий обов’язки вченого секретаря
спеціалізованої вченої ради Д 64.050.10 Бреславський Д. В.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Тонкі пружні пластини і оболонки, прогини яких є малими відносно основних розмірів, але досить суттєві порівняно з їх товщиною, широко застосовуються в сучасній техніці. Це, насамперед, стосується авіабудування, цивільного та промислового будівництва, кораблебудування, турбінобудування та інших галузей промисловості. Забезпечення надійності функціонування сучасних механізмів і конструкцій вимагає розробки нових ефективних методів для дослідження їх динамічної поведінки та аналізу впливу різних геометричних і фізичних факторів на міцність та стійкість деформівних систем. Аналіз стану даної проблеми дозволяє зробити висновок, що питання дослідження нелінійних коливань пологих оболонок, план яких відрізняється від простої геометричної форми (кола, трикутника, прямокутника, та ін.) а також оболонок, граничні умови яких відмінні від умов класичного шарнірного обпирання, досі залишаються мало вивченими. Одним з найскладніших моментів, що виникають під час розв'язання задач цього класу, є зведення континуальної моделі до дискретної, тобто мається на увазі перехід від системи нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними до відповідної системи звичайних нелінійних диференціальних рівнянь. Для здійснення такого переходу необхідно мати повну систему лінійно незалежних базисних функцій, що задовольняють крайові умови задачі. Побудова подібних систем функцій є досить складною проблемою, яка значно ускладнюється для областей довільної форми або складних крайових умов, в тому числі мішаного типу. Уникнути означених складностей можна завдяки використанню теорії R-функцій, що дозволяє в аналітичному вигляді будувати необхідні базисні функції. Тому розробка чисельно-аналітичних методів для дослідження вільних геометрично нелінійних коливань елементів тонкостінних конструкцій довільної форми та з різними видами закріплення, які використовують теорію R-функцій, є актуальною.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана на кафедрі прикладної математики Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут" (НТУ "ХПІ") відповідно до:

- держбюджетної теми "Розробка методів для розв'язку нелінійних диференціальних рівнянь, які моделюють статичні та динамічні процеси деформування в елементах тонкостінних конструкцій складної форми" за координаційним планом Міністерства освіти і науки України (№205-II, від 11.02.2002), ДР№ 0102V000980 (в період з 2002 р. по 2004 р.);
- держбюджетної теми "Розробка чисельно-аналітичних методів дослідження лінійних і нелінійних задач механіки для композитних пластин і пологих оболонок" за наказом Міністерства освіти і науки України (№960 від 22.12.2004), ДР№0105U000573 (в період з 2005 р. по 2006 р.).

Мета та основні задачі дослідження. Метою даної роботи є розробка ефективних методів дослідження вільних геометрично нелінійних коливань елементів тонкостінних конструкцій, що моделюються пологими оболонками і пластинами довільної форми в плані з різними умовами закріплення, а також розробка відповідного програмного забезпечення.

Реалізація цієї мети полягає у вирішенні наступних задач:

– на базі теорії R-функцій розробити універсальний чисельно-аналітичний метод для дослідження вільних геометрично нелінійних коливань ізотропних пологих оболонок довільної форми плану, математичні моделі яких побудовано в рамках теорії Доннелла–Муштарі–Власова. Одержати в аналітичному вигляді коефіцієнти звичайного нелінійного диференціального рівняння, до якого зведено початково-крайову задачу;

– для дослідження нелінійних коливань пластин складної геометрії розробити новий підхід, який базується на лінеаризації відношень між деформаціями і переміщеннями, теорії R-функцій, варіаційних методах та ітераційному процесі;

– створити програмне забезпечення на базі автоматизованої системи POLE–RL для реалізації кожного з запропонованих методів дослідження; провести тестування обох методів на задачах про вільні нелінійні коливання пластин і пологих оболонок та обґрунтувати достовірність отриманих результатів;

– розв'язати нові задачі про вільні нелінійні коливання пологих оболонок та пластин довільної форми при великих амплітудах;

– застосувати розроблене програмне забезпечення для дослідження геометрично нелінійних коливань механічних об'єктів, а саме, бандажної полки робочої лопатки турбіни, елементів обшивки резервуару з технологічними отворами тощо.

Об'єкт дослідження – нелінійні пружні механічні системи, елементами яких можуть бути пологі оболонки і пластини довільної форми плану.

Предмет дослідження – вільні геометрично нелінійні коливання пологих оболонок і пластин складної форми в плані при різних способах закріплення.

Методи дослідження – комплексне застосування теорії R-функцій, варіаційного методу Рітца, процедури Гальоркіна, методу Рунге-Кутта для дослідження нелінійних коливань пологих оболонок і пластин складної форми в плані при різних способах їх закріплення.

Наукова новизна одержаних результатів полягає у наступному:

- вперше для дослідження нелінійних коливань елементів тонкостінних конструкцій, які моделюються ізотропними пологими оболонками довільної форми плану, розроблено новий чисельно–аналітичний метод, в основу якого покладено теорію R-функцій та варіаційні методи;
- розширено метод зведення нелінійної системи рівнянь руху теорії оболонок Доннелла–Муштарі–Власова до задачі Коші для дослідження пологих оболонок з планом довільної форми і різними видами крайових умов. Одержано формули для визначення коефіцієнтів

звичайного нелінійного диференціального рівняння;

- за допомогою теорії R-функцій і варіаційних методів узагальнено метод дослідження вільних коливань гнучких пластин з планом простої геометричної форми з шарнірним або жорстким закріпленням країв, в основу якого покладено апріорну лінеаризацію геометричних співвідношень для пластин складної форми та з різними граничними умовами;
- розв'язано низку нових задач про вільні нелінійні коливання оболонок і пластин довільної форми в плані, які є розрахунковими схемами елементів тонкостінних конструкцій, у тому числі за допомогою запропонованих методів розв'язано конкретні практичні задачі. А саме, досліджено вплив геометричних параметрів, способів закріплення на амплітудно-частотні залежності бандажної полки робочої лопатки турбіни; обшивки резервуарів, що мають технологічні отвори у місцях сполучення з трубопроводом та зібрані з панелей з надрізами різної геометричної форми.

Практична цінність роботи полягає в тому, що запропоновані методи реалізовані у вигляді послідовностей програм, застосування яких дає можливість дослідити динамічну поведінку елементів тонкостінних конструкцій складної форми. За допомогою розроблених методів та створеної низки програм на базі системи POLE-RL можна визначати власні частоти і форми коливань, амплітудно-частотні залежності та характер відгуку елементів конструкцій з достатньою точністю, внаслідок чого одержані результати можуть бути використані для розв'язання проблеми міцності та надійності елементів тонкостінних конструкцій.

Розробки та результати дисертаційної роботи були використані при виконанні держбюджетних тем "Розробка методів для розв'язку нелінійних диференціальних рівнянь, які моделюють статичні та динамічні процеси деформування в елементах тонкостінних конструкцій складної форми" за координаційним планом Міністерства освіти і науки України (№205-II від 11.02.2002, ДР№0102V000980, заключний звіт за 2004 р., п.п. 3.2, 3.3) та "Розробка чисельно-аналітичних методів дослідження лінійних і нелінійних задач механіки для композитних пластин і пологих оболонок" за наказом Міністерства освіти і науки України (№ 960 від 22.12.2004, №ДР0105U000573, анотований звіт за 2005 р.) на кафедрі прикладної математики НТУ "ХПІ", а також у навчальному процесі при викладанні курсу "Рівняння математичної фізики" для спеціальності "Динаміка і міцність", про що свідчить відповідний акт із застосування.

Особистий внесок здобувача. Основні результати, викладені в дисертації, належать здобувачеві, а саме: розробка методу для досліджень вільних геометрично нелінійних коливань пологих оболонок з планом довільної форми на базі теорії R-функцій, завдяки якої в загальному випадку запропоновано зведення системи нелінійних рівнянь руху з частинними похідними до задачі Коші; застосування підходу розв'язання задач нелінійних коливань гнучких пластин, основаного на лінеаризації геометричних співвідношень, для пластин складної геометрії та з різними умовами закріплення, здійснення математичних викладок, розробка і програмна реалізація чисельних алгоритмів, розв'язання тестових та нових задач.

Апробація результатів дисертації. Основні положення і результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на X–XIII міжнародних науково-практичних конференціях "Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я" (Харків, 2002–2005 рр.); 5-й і 6-й міжнародних науково-технічних конференціях "Фізичні та комп'ютерні технології у народному господарстві" (Харків, 2002 р.); 6-му міжнародному симпозіумі українських інженерів-механіків (Львів, 2003 р.); 2-й міжнародній конференції "Актуальні проблеми механіки деформованого твердого тіла" (Донецьк, 2003 р.); міжнародній конференції "Computer Modeling of Dynamical Systems" (Санкт-Петербург, Росія, 2004 р.); 21-му міжнародному конгресі з теоретичної і прикладної механіки (Варшава, Польща, 2004 р.); 1-й міжнародній конференції "Nonlinear Dynamics" (Харків, 2004 р.); міжнародній конференції "Dynamical system modeling and stability investigation" (Київ, 2005 р.); конференції молодих вчених і спеціалістів "Сучасні проблеми машинобудування" ІПМаш НАН України (Харків, 2005 р.); 77-му щорічному з'їзді спілки математиків і механіків (Берлін, Німеччина, 2006 р.); на наукових семінарах кафедри прикладної математики НТУ "ХПІ".

Публікації. Основні результати опубліковано у 16 наукових працях, серед яких 5 статей – у фахових виданнях, затверджених ВАК України, 1 стаття – у збірках наукових праць, 1 стаття – у міжнародному науковому журналі, 3 статті – у працях наукових конференцій та 6 тез доповідей на наукових конференціях і конгресах.

Структура і обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, 3 розділів, висновків, 1 додатка. Загальний обсяг дисертаційної роботи становить 169 сторінок, 34 рисунка по тексту та 8 – на 4 сторінках; 1 таблиця на 1 сторінці та 32 – по тексту; 221 найменування використаних літературних джерел на 20 сторінках. Обсяг основного тексту дисертації – 143 сторінки.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність теми дослідження, визначено об'єкт та предмет дослідження, сформульовано мету і основні задачі роботи, визначено наукову новизну, практичне значення одержаних результатів, викладено основні положення, що виносяться на захист.

У першому розділі проведено аналіз стану проблеми геометрично нелінійних коливань пологих оболонок і пластин, а також існуючих методів для їх подальшого розвитку. Основні ідеї розвитку теорії нелінійних коливань пластин і пологих оболонок було закладено в працях видатних вчених-механіків із багатьох країн: В. В. Болотіна, В. З. Власова, А. С. Вольміра, І. І. Воровича, Е. І. Григолюка, Я. М. Григоренка, В. І. Гуляєва, Г. Доннелла, Х. М. Муштарі, О. Д. Ониашвілі, С. П. Тимошенка, Є. Рейсснера, C. Chia, A. Leissa, J. Reddy та ін. Подальший розвиток нелінійної динаміки пологих оболонок поданий у працях К. В. Аврамова, О. Я. Григоренка, В. З. Грищака, Б. Я. Кантора, П. С. Ковальчука, Т. А. Краснопольської, В. Д. Кубенка, А. І. Маневича, А. А. Мартинюка, М. В. Марчука, Ю. В. Михлина, О. К. Морачковського, J. Awrejcewicz, V. Krys'ko та інших. Достатньо широко стан проблеми розглянуто в оглядових статтях В. Д. Кубенка, П. С. Ковальчука, Я. М. Григоренка, Я. Г. Савули, І. С. Мухи, В. І. Гуляєва, M. Amabili, M. Païdoussis, C. Chia, F. Moussaoui, R. Benamar, M. Qatu та інших. Огляд публікацій, присвячених даній проблемі, дозволив зробити висновок про досить обмежену кількість праць, де розглянуто задачі геометрично нелінійної динаміки пологих оболонок складної форми з різними умовами закріплення, а також сформулювати постановку задач досліджень, спрямованих на розробку нових та подальший розвиток існуючих методів розрахунку вільних нелінійних коливань пологих оболонок і пластин складної форми з різними типами умов закріплення країв.

Із загальної кількості проблем сучасної нелінійної динаміки в роботі окреслена проблема вільних геометрично нелінійних коливань ізотропних пологих оболонок довільної форми плану та різноманітним закріпленням країв.

У другому розділі виконана математична постановка задач, наведено основні співвідношення та рівняння руху, а також граничні та початкові умови. Розроблено методи дослідження нелінійних коливань пологих оболонок та пластин, що мають план складної форми та різні види граничних умов. Для оболонок складної геометрії запропоновано алгоритм переходу від системи диференціальних рівнянь руху з частинними похідними до задачі Коші; в аналітичному вигляді одержано вирази для коефіцієнтів звичайного диференціального рівняння типу Дуффінга; зроблено варіаційну постановку задачі про вільні коливання гнучких пластин з планом довільної геометрії та різними способами закріплення, що базується на апріорній лінеаризації відношень між деформаціями і переміщеннями; частоти і форми коливань знаходяться за допомогою ітераційного процесу.

Математична постановка задачі виконана в рамках теорії Доннелла–Муштарі–Власова. При цьому припускається, що прогини точок серединної поверхні сумірні з товщиною оболонки, однак деформації, тобто подовження і зсуви, і кути повороту елементів оболонки вважаються малими, а тому усі співвідношення будуються підпорядкованими закону Гука для однорідного ізотропного тіла. Згідно з теорією пологих оболонок на відміну від теорії сильного згину в усіх співвідношеннях і рівняннях руху утримуються лише ті нелінійні члени, що містять нормальне переміщення і похідні від нього.

Для побудови рівнянь руху використано принцип Даламбера. В подальшому будемо розглядати динамічний процес без урахування інерції обертання елемента об'єму оболонки відносно напрямків OX і OY.

У рамках прийнятої теорії рівняння руху пологої оболонки мають вигляд:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \xi \partial \eta}=l_1(\bar{w})+Nl_1(\bar{w})+\lambda^2\frac{h^2}{a^2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \tau^2}; \tag{1}$$

$$\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \eta^2}=l_2(\bar{w})+Nl_2(\bar{w})+\lambda^2\frac{h^2}{a^2}\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \tau^2}; \tag{2}$$

$$\frac{1}{12}\nabla^4\bar{w}-(K_\xi+\mu K_\eta)\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}-(\mu K_\xi+K_\eta)\frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta}+(K_\xi^2+K_\eta^2+2\mu K_\xi K_\eta)\bar{w}=\frac{K_\xi+\mu K_\eta}{2}\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi}\right)^2+$$

$$+\frac{K_\eta+\mu K_\xi}{2}\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta}\right)^2+\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2}N_\xi+(1-\mu)\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi \partial \eta}T+\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2}N_\eta-\lambda^2\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \tau^2}, \tag{3}$$

де $\xi=\frac{x}{a}$; $\eta=\frac{y}{a}$; $\bar{w}=\frac{w}{h}$; $\bar{u}=\frac{ua}{h^2}$; $\bar{v}=\frac{va}{h^2}$; $\tau=\omega_0 t$; $K_\eta=\frac{a^2}{R_y h}$; $K_\xi=\frac{a^2}{R_x h}$; $\omega_0=\frac{\lambda}{a^2}\sqrt{\frac{Eh^2}{\rho(1-\nu^2)}}$.

$$l_1(\bar{w})=(K_\xi+\mu K_\eta)\frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi}; \qquad l_2(\bar{w})=(\mu K_\xi+K_\eta)\frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta}; \tag{4а,б}$$

$$Nl_1(\bar{w})=-\frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi}\left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2}\right)-\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi \partial \eta}; \tag{5а}$$

$$Nl_2(\bar{w})=-\frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta}\left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2}\right)-\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi \partial \eta}; \tag{5б}$$

$$N_\xi(u,v,w)=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\mu\frac{\partial v}{\partial \xi}-(K_\xi+\mu K_\eta)w+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2+\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)^2;\; T(u,v,w)=\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{\partial v}{\partial \xi}+\frac{\partial w}{\partial \xi}\frac{\partial w}{\partial \eta};$$

$$N_\eta(u,v,w)=\mu\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial v}{\partial \eta}-(\mu K_\xi+K_\eta)w+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)^2+\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2. \tag{6 а,б,с}$$

Суть методу переходу від початково-крайової задачі до задачі Коші, зводиться до наступного: функцію прогину $w(\xi,\eta,\tau)$ подамо у вигляді скороченого ряду Фур'є, а саме:

$$w(\xi,\eta,\tau)=y_1(\tau)W_1(\xi,\eta), \tag{7}$$

де $W_1(\xi,\eta)$ є компонентою власного вектора лінійних коливань пологої оболонки, що відповідає фундаментальній власній частоті.

Компоненти переміщень в серединній поверхні оболонки обираємо з міркувань, що функції $u=u(\xi,\eta,\tau)$ і $v=v(\xi,\eta,\tau)$ мають тотожно задовольняти рівнянням (1), (2) і відповідним граничним умовам. Тож після підстановки (7) в означені рівняння отримаємо систему рівнянь, розв'язок якої може бути поданий у вигляді:

$$u(\xi,\eta,\tau)=y_1(\tau)U_1(\xi,\eta)+y_1^2(\tau)U_2(\xi,\eta); \tag{8}$$

$$v(\xi,\eta,\tau)=y_1(\tau)V_1(\xi,\eta)+y_1^2(\tau)V_2(\xi,\eta). \tag{9}$$

У виразах (8), (9) функції U_1,V_1 є компонентами власного вектора, що відповідає власній частоті лінійної задачі, а функції U_2,V_2 знаходяться у результаті розв'язання системи (1), (2), права частина якої складається лише з виразів (5а,б), тобто є нелінійною відносно знаної функції прогину $W_1(\xi,\eta)$, при відповідних граничних умовах, тобто:

$$\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\xi^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\eta^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\xi\partial\eta}=Nl_1(w); \tag{10}$$

$$\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\eta^2}=Nl_2(w). \tag{11}$$

При цьому складові тангенціальних сил інерції у рівняннях (1), (2) для знаходження функцій U_2,V_2 не враховуються, оскільки в рамках обраної моделі мають несуттєвий вплив на деформований стан оболонки.

Розкладання проводилося за власними функціями, які було знайдено в процесі розв'язання відповідної лінійної задачі. Завдяки застосуванню методу R-функцій (RFM) та варіаційних методів, системи базисних функцій були побудовані в аналітичному вигляді, універсальному щодо геометрії оболонки.

Треба відмітити, що розв'язання системи диференціальних рівнянь (10), (11), яка може трактуватись як двомірна задача теорії пружності з правими частинами $Nl_1(w),Nl_2(w)$, що повністю визначаються власною функцією W_1 і відіграють роль фіктивних масових сил, в загальному випадку (складна геометрія, різні умови закріплення) пов'язано зі значними математичними труднощами. Ці розв'язки важливо мати в аналітичній формі, тому що вони будуть використані для розв'язання основного рівняння руху (3). Сумісне використання теорії R-функцій і варіаційного методу Рітца дозволяє відшукати функції U_2,V_2 саме в аналітичному вигляді. Цей факт є головною відзнакою першого із запропонованих підходів. Причому крайові умови для U_2,V_2 обиралися такими, як і для U_1,V_1 при розв'язанні лінійної задачі коливань оболонки.

Після підстановки виразів (7), (8), (9), у рівняння (3), отримаємо:

$$\begin{aligned}
&y_1(\tau)\left[\frac{1}{12}\nabla^4W_1-K_\xi\bar{N}_{\xi_L}^{(h)}(\vec{U}_1,W_1)-K_\eta\bar{N}_{\eta_L}^{(h)}(\vec{U}_1,W_1)\right]-y_1^2(\tau)\Big[K_\xi\bar{N}_{\xi_{NL}}^{(pl)}(\vec{U}_2,W_1)+\\
&+K_\eta\bar{N}_{\eta_{NL}}^{(pl)}(\vec{U}_2,W_1)+\bar{N}_{\xi_L}^{(h)}(\vec{U}_1,W_1)W_{1,\xi\xi}+2\bar{T}_L^{(h)}(\vec{U}_1)W_{1,\xi\eta}+\bar{N}_{\eta_L}^{(h)}(\vec{U}_1,W_1)W_{1,\eta\eta}\Big]-\\
&-y_1^3(\tau)\Big[\bar{N}_{\xi_{NL}}^{(pl)}(\vec{U}_2,W_1)W_{1,\xi\xi}+2\bar{T}_{NL}^{(pl)}(\vec{U}_2,W_1)W_{1,\xi\eta}+\bar{N}_{\eta_{NL}}^{(pl)}(\vec{U}_2,W_1)W_{1,\eta\eta}\Big]+\lambda^2y_1''(\tau)W_1=0,
\end{aligned} \tag{12}$$

де $\overline{N}_{\xi_L}^{(h)}(U_1,V_1,W_1) = \frac{\partial U_1}{\partial \xi} - (K_\xi + \mu K_\eta) W_1 + \mu \frac{\partial V_1}{\partial \eta}$, $\overline{T}_L^{(h)}(U_1,V_1) = \frac{1-\mu}{2}\left(\frac{\partial V_1}{\partial \xi} + \frac{\partial U_1}{\partial \eta}\right)$,

$\overline{N}_{\eta_L}^{(h)}(U_1,V_1,W_1) = \frac{\partial V_1}{\partial \eta} - (K_\eta + \mu K_\xi) W_1 + \mu \frac{\partial U_1}{\partial \xi}$, а $\overline{N}_{\xi_{NL}}^{(l)}()$, $\overline{N}_{\eta_{NL}}^{(l)}()$, і $\overline{T}_{NL}^{(l)}()$ утворюються у виразах (6 а,б,с), якщо $K_\xi = K_\eta = 0$.

Застосовуючи процедуру Бубнова–Гальоркіна та враховуючи, що $\iint_\Omega W_1 \cdot W_1 d\Omega = \|W_1\|^2$, отримаємо звичайне нелінійне диференціальне рівняння:

$$y_1''(t) + y_1(t) - \alpha y_1^2(t) + \beta y_1^3(t) = 0, \tag{13}$$

коефіцієнти якого мають вигляд:

$$\alpha = -\frac{\int_\Omega \left[K_\xi N_\xi^{(l)}(U_2,V_2,W_1) + K_\eta N_\eta^{(l)}(U_2,V_2,W_1) - N_\xi^{(h)}(U_1,V_1,W_1) W_{1,\xi\xi} \right.}{\lambda^2 \|W_1\|^2} - \frac{\left. - N_\eta^{(h)}(U_1,V_1,W_1) W_{1,\eta\eta} + (1-\mu) T^{(h)}(U_1,V_1) W_{1,\xi\eta} \right] W_1 d\Omega}{\lambda^2 \|W_1\|^2}; \tag{14}$$

$$\beta = -\frac{\int_\Omega \left[W_{1,\xi\xi} N_\xi^{(l)}(U_2,V_2,W_1) + (1-\mu) W_{1,\xi\eta} T^{(l)}(U_2,V_2,W_1) + W_{1,\eta\eta} N_\eta^{(l)}(U_2,V_2,W_1) \right] W_1 d\Omega}{\lambda^2 \|W_1\|^2}. \tag{15}$$

Для пластин рівняння (13) має простіший вигляд тому, що $K_\xi = K_\eta = 0$, тобто $\alpha = 0$.

Методи розв'язання одержаного рівняння добре відомі: метод гармонічного балансу, чисельний метод Рунге-Кутта, Гальоркіна та ін.

Окрім методу дослідження нелінійної динамічної поведінки пологих оболонок, в цьому розділі подано принципово інший підхід, що може бути ефективно використано для дослідження задач коливань гнучких пластин.

Варіаційне рівняння руху пластини (або оболонки) будуємо за варіаційним принципом Гамільтона–Остроградського, згідно з яким функціонал дії має вигляд:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} (P - K) dt, \tag{16}$$

де P і K – потенціальна і кінетична енергії оболонки.

Маючи на увазі, що коливання у часі є гармонійними, переміщення u, v, w подамо наступним чином:

$$u(x,y,t) = U(x,y)\sin \lambda t,\ v(x,y,t) = V(x,y)\sin \lambda t,\ w(x,y,t) = W(x,y)\sin \lambda t, \tag{17}$$

де λ – частота власних коливань.

Якщо підставити вирази (17) у функціонал (16) та проінтегрувати його на проміжку, що дорівнює чверті періоду коливань, тобто $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2\lambda}$, отримаємо:

$$S = \frac{1}{2}\frac{\pi}{4\lambda}\left[\int_\Omega \left\{ B\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}-(k_x+k_y)W\right)^2 + 2(\mu-1)\left(\left(\frac{\partial U}{\partial x}-k_xW\right)\left(\frac{\partial V}{\partial y}-k_yW\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right)\right]+\right.\right.$$

$$+D\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)^2-(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}-2\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right)^2\right)\right]\Bigg\}d\Omega+$$

$$+\frac{4B}{3\pi}\int_\Omega\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\mu\frac{\partial V}{\partial y}-(k_x+\mu k_y)W\right)+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2\left(\frac{\partial V}{\partial y}+\mu\frac{\partial U}{\partial x}-(k_y+\mu k_x)W\right)\right]d\Omega+$$

$$\left.+\frac{3B}{4}\int_\Omega\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2\right]^2 d\Omega-\lambda^2\rho h\int_\Omega (W^2+U^2+V^2)\,d\Omega\right], \qquad (18)$$

де $B=\dfrac{hE}{1-\mu^2}$ – тангенціальна жорсткість пластини або оболонки; $D=\dfrac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ – згінна або циліндрична жорсткість.

Як відомо, стаціонарне значення функціонал (18) здобуває на справжніх коливаннях пластини (оболонки), тобто при виконанні рівняння $\delta S = 0$, розв'язувати яке у роботі пропонується за допомогою варіаційного методу Рітца та теорії R-функцій. З цією метою шукані функції переміщень будемо відшукувати у вигляді лінійних комбінацій лінійно незалежних функцій u_i, v_i, w_i, що задовольняють крайовим умовам задачі. Слід зауважити, що через присутність у потенціальній енергії складника, зумовленого енергією деформованого стану оболонки при великих прогинах, функціонал (18) не є квадратичним відносно шуканих функцій переміщень. У цьому випадку при застосуванні методу Рітца до розв'язання задачі одержана система алгебраїчних рівнянь – система Рітца, буде нелінійною, що суттєво ускладнить обчислення. Цих труднощів можна уникнути, якщо ввести допоміжні функції f_1 і f_2 у співвідношення між деформаціями і переміщеннями:

$$f_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial x}, \quad f_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial y}, \qquad (19)$$

З урахуванням (19) геометричні співвідношення серединної поверхні оболонки матимуть наступний вигляд:

$$\varepsilon_x = u,_x - k_x w + f_1 w,_x, \varepsilon_y = v,_y - k_y w + f_2 w,_y, \gamma_{xy} = u,_y + v,_x + f_1 w,_y + f_2 w,_x. \tag{20}$$

Припустімо, що f_1 і f_2 – відомі функції, тоді після підстановки виразів (19) у функціонал (18), отримаємо квадратичний функціонал відносно шуканих функцій U, V, W, а саме:

$$S = \frac{1}{2}\frac{\pi}{4\lambda}\Bigg[\int_\Omega\Bigg\{B\Bigg[\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} - (k_x + k_y)W\right)^2 + 2(\mu-1)\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} - k_x W\right)\left(\frac{\partial V}{\partial y} - k_y W\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]\Bigg] +$$

$$+ D\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)^2 - (1-\mu)\left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right)^2\right]\right]\Bigg\} d\Omega +$$

$$+ \frac{8B}{3\pi}\int_\Omega\left[f_1\frac{\partial W}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \mu\frac{\partial V}{\partial y} - (k_x + \mu k_y)W\right) + f_2\frac{\partial W}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial y} + \mu\frac{\partial U}{\partial x} - (k_y + \mu k_x)W\right)\right] d\Omega +$$

$$+ \frac{3B}{4}\int_\Omega\left[f_1\frac{\partial W}{\partial x} + f_2\frac{\partial W}{\partial y}\right]^2 d\Omega - \lambda^2 \rho h \int_\Omega (W^2 + U^2 + V^2) d\Omega\Bigg]. \tag{21}$$

Таким чином, якщо знати функції f_1 і f_2, можна мінімізувати функціонал (21) за допомогою ітераційного процесу, що може бути побудований в такий спосіб: на першому кроці функції f_1 і f_2 вважаються рівними нулю, тобто $f_1 = f_2 = 0$, тоді задача зводиться до розв'язання лінійної задачі для одержання власної частоти і відповідних їй власних функцій; на другому – відбувається нормування одержаних власних функцій W_m, що відповідають власним числам λ_m за допомогою заданого значення амплітуди W_m^* / h у фіксованій точці $M_0(\xi, \eta)$. Як правило, такою точкою обирається точка максимуму відповідної форми коливань. Після знаходження власного вектора, відповідного обраній частоті, за формулами (19) обчислюємо нові функції f_1 і f_2 для наступного кроку ітерації. Власне ітераційний процес продовжуємо доти, доки евклідова норма різниці власних векторів на сусідніх ітераціях не перебільшить заданого значення точності ε, тобто

$$\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{a_{jm}^{(r)} - a_{jm}^{(r-1)}}{a_{jm}^{(r-1)}}\right)^2 < \varepsilon, \tag{22}$$

де r – номер ітерації; $a_{jm}^{(r)}, a_{jm}^{(r-1)}$ – коефіцієнти, що визначають власні функції W_m на сусідніх ітераціях r і $r-1$ за формулами $W_m^{(r)}(x, y) = \sum_{j=1}^{N} a_{jm}^{(r)} w_j$ і $W_m^{(r-1)}(x, y) = \sum_{j=1}^{N} a_{jm}^{(r-1)} w_j$, $m = 1, 2, ..., N$.

Для пластин співвідношення (20) та функціонал (21) спрощуються через $k_x = k_y = 0$.

У третьому розділі розроблені підходи і створене програмне забезпечення в рамках системи

POLE–RL, застосовані для дослідження вільних нелінійних коливань пологих оболонок і пластин різної форми в плані та з різними умовами закріплення, в тому числі для дослідження нелінійних коливань бандажної полки робочої лопатки турбіни, моделями для якої було обрано циліндричні панелі, закріплені з двох протилежних сторін; обшивки резервуарів з технологічними отворами в місцях сполучення з трубопроводом, що складається з елементів з надрізами складної форми. Достовірність створеного програмного комплексу було перевірено в результаті розв'язання низки тестових задач. Нижче наведено деякі з них.

Розглянемо задачу про вільні нелінійні коливання ізотропної пологої оболонки двоякої кривини з планом прямокутної форми, сторони якого дорівнюють $2a$ і $2b$. Граничні умови закріплення оболонки – шарнірно обпертий край, нерухливий у дотичному напрямку. Досліджено залежність скелетних кривих від типу кривини оболонок, що мають два варіанти геометричних параметрів: варіант А – $R_x/a=10; h/a=0{,}01; \mu=0{,}3$; варіант В – $h/R_x=0{,}001$; $a/R_x=0{,}4$; $\mu=0{,}3$. Порівняння одержаних результатів з відомими наведено на рис. 1, *а*, *б*.

Одержані результати відрізняються від відомих не більш ніж на 1–2 %. Перевірка достовірності одержаних результатів була виконана в ході аналізу практичної збіжності при зміні розмірності апроксимуючих просторів та збільшенні кількості вузлів інтегрування.

У наступних прикладах надаються результати досліджень нелінійних коливань пологих оболонок, що мають складну геометричну форму (рис. 2), або різні умови закріплення. Адже дослідження динаміки оболонок такого типу становлять практичний інтерес, бо їх можна розглядати як розрахункові моделі при проектуванні таких об'єктів, як діагональні лопатки компресорів авіадвигунів; робочих лопаток турбін або бандажних полок, куполів, навісів у будівельних конструкціях; окремих частин обшивки суден, резервуарів тощо, де можуть бути використані оболонки двоякої кривини, в тому числі панелі та пластини складної конфігурації, які в достатній мірі враховують геометричні та конструкційні особливості цих елементів, а також будь-які складні типи граничних умов.

Рис.1. Скелетні криві пологих оболонок різних типів кривини:

а – оболонки варіанту; *б* – оболонки варіанту В

([*] – Kobayashi Y,Leissa A.W. Large amplitude free vibration of thick shallow shells supported by shear diaphragms. // Int. J. of Non-Linear Mechanics. – 1995. – № 1. – p. 57–66; [**] – Leissa A.W, Kadi A.S. Curvature effects on shallow shell vibrations.//J. of Sound and Vibration. –1971.–№16. – p. 173–187; [***] – Chia C.Y. Nonlinear analysis of doubly curved symmetrically laminated shallow shells with rectangular planform // Ingenieur-Archiv. – 1988. – 58. – p. 252-264.)

Для обґрунтування достовірності результатів запропонованого підходу для досліджень впливу фізичних і геометричних факторів на амплітудно-частотні залежності пологих оболонок з планом складної форми розглянемо задачу про нелінійні коливання пологої оболонки з планом (рис. 2) та наступними геометричними і пружними параметрами: a = 0,1 м, b = 0,1 м, h = 0,001 м, R = 1 м, E = 206000 МПа, ρ = 7800 кг/м^3, μ = 0,3, що в безрозмірному вигляді відповідає варіанту А. Припустімо, що оболонка має ті ж самі граничні умови, що й у попередній задачі – класичний шарнір.

Рис. 2. Форма оболонки

Застосовуючи R-функції, рівняння межі області подамо у вигляді:

$$\omega(x,y) = (F_1 \wedge_0 F_2) \wedge_0 (F_3 \vee_0 F_4), \tag{23}$$

де $F_1 = (b^2 - y^2)/(2b) \geq 0$; $F_2 = (a^2 - x^2)/(2a) \geq 0$; $F_3 = (a_1^2 - x^2)/(2a_1) \geq 0$; $F_4 = (y + b_2) \geq 0$; $\wedge_0$ – R-кон'юнкція і $\vee_0$ – R-диз'юнкція.Згідно з варіаційно-структурним методом та теорією R-функцій, структури розв'язку, що відповідають наданим граничним умовам та формі плану оболонки можуть бути побудовані у вид вигляді

$$U = \frac{\partial \omega}{\partial x} P_2 + \omega P_3; V = \frac{\partial \omega}{\partial y} P_2 + \omega P_4; W_1 = \omega P_1, \tag{24}$$

або
$$U = \omega_1 \cdot P_3;\ V = \omega_2 \cdot P_4;\ W_1 = \omega \cdot P_1 \tag{25}$$

у випадку паралельності сторін плана і координатних осей. Підтвердження достовірності методу було перевірено за допомогою обчислювального експерименту, в ході якого складна геометрія області зводилась до канонічної. При цьому досліджувалась збіжність результатів розрахунку, одержаних за допомогою структурних формул (24) і (25) між собою та з відомими. Результати розрахунку та порівняння амплітудно-частотних залежностей, одержаних за допомогою різних структур, наведено на рис.3 для циліндричного і сферичного типів кривини оболонки. В ході розрахунку було встановлено, що для апроксимації невизначених компонент структури (24) достатньо обмежитись 56 координатними функціями і 42 – у випадку структури (25) для кожної з шуканих компонент вектора переміщень. Обрана кількість координатних функцій була встановлена під час дослідження практичної збіжності результатів розрахунку, проведеного для кожної структури окремо.

Рис. 3. Скелетні криві, одержані для структур (24), (25) (рис. 2, $a_1 \to a$ и $b_1 \to b$)

При дослідженні впливу глибини виступу на скелетні криві оболонок двоякої кривини із планом складної форми (рис. 2), було встановлено, що для обох типів оболонок при фіксованій амплітуді збільшення глибини виступу викликає різке зростання частотного відношення ω_{nl}/ω_L, рис.4, *а*, *б*.

Рис. 4. Вплив глибини вирізу на амплітудно-частотні залежності оболонок, рис. 2:
а – $K_\xi / K_\eta = 0$; *б* – $K_\xi / K_\eta = 1$

Дослідження впливу граничних умов на амплітудно-частотні залежності були проведені для пологих оболонок нульової та додатної гаусової кривини з прямокутним планом: варіант А – $a = 0{,}1$м, $b = 0{,}1$м, $h = 0{,}001$м, $R_x = 1$м, $E = 206000$МПа, $\rho = 7800$кг/м^3, $\mu = 0{,}3$; варіант В – $h / R_x = 0{,}001$, $a / R_x = 0{,}4$, $\mu = 0{,}3$. Розглянуто наступні типи крайових умов:

I – жорстко закріплений край оболонки $u|_{\partial\Omega} = 0$, $v|_{\partial\Omega} = 0$, $w|_{\partial\Omega} = 0$, $\left.\dfrac{\partial w}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0$;

II – шарнірно закріплений край, нерухливий у площині оболонки (нерухливий шарнір)

$$u|_{\partial\Omega} = 0,\ v|_{\partial\Omega} = 0,\ w|_{\partial\Omega} = 0,\ M_n|_{\partial\Omega} = 0;$$

III – шарнірно закріплений, нерухливий у тангенціальному напрямку край (класичний шарнір)

$$v|_{\partial\Omega} = 0,\ N_n|_{\partial\Omega} = 0,\ w|_{\partial\Omega} = 0,\ M_n|_{\partial\Omega} = 0;$$

IV – шарнірно закріплений край, рухливий у площині оболонки (рухливий шарнір)

$$N_n|_{\partial\Omega} = 0,\ N_\tau|_{\partial\Omega} = 0,\ w|_{\partial\Omega} = 0,\ M_n|_{\partial\Omega} = 0.$$

Залежності амплітуди $W_{\max} / h$ та частотного відношення ω_{nl} / ω_L нелінійної частоти до основної лінійної, одержані для наведених типів крайових умов, зображено на рис.5, *а*, *б*. Треба зазначити, що при фіксованому значенні амплітуди частотне відношення ω_{nl} / ω_L суттєво залежить від типу крайових умов та кривини оболонки. Так, для І типу крайових умов було встановлено, що для оболонки циліндричного типу кривини скелетна крива є кривою жорсткого типу, а для оболонки сферичного типу – кривою м'якого типу, рис. 5, *а*.

Рис. 5. Амплітудно-частотні залежності пологих оболонок циліндричної ($K_\xi / K_\eta = 0$) і сферичної ($K_\xi / K_\eta = 1$) кривини з граничними умовами I–IV: *а* – варіант А; *б* – варіант В

У разі шарнірного закріплення краю для оболонок обох типів було встановлено, що при фіксованому значенні амплітуди, близькому до товщини оболонки, найменше частотне відношення відповідає нерухливому шарніру, а найбільше – рухливому. Тобто збільшення жорсткості в площині оболонки посилює "м'якість" скелетної кривої. Цей висновок було підтверджено й для шарнірно закріплених оболонок, варіант В, теж двох типів кривини, рис. 5, *б*.

У разі досліджень нелінійних коливань гнучких пластин було виконано порівняння результатів двох підходів, представлених у роботі, одержано нові результаті досліджень фізичних та геометричних факторів на амплітудно-частотні залежності. Порівняння результатів розрахунків методами I та II представлено в таблиці 1 для квадратної шарнірно закріпленої пластини. Одержані результати відрізняються від відомих в літературі, де були реалізовані аналогічні підходи, не більш ніж на 1–3 %.

Таблиця 1

Амплітудно-частотні залежності квадратної пластини, порівняння підходів I і II

W/h	[+]	I (RFM)	[++]	II[a)] (RFM)	[++]	II[b)] (RFM)
0.2	1.0218	1.0196	1.0134	1.0137	1.0185	1.0185
0.4	1.0832	1.0764	1.0528	1.0533	1.0716	1.0715
0.6	1.1774	1.1650	1.1154	1.1154	1.1533	1.1532
0.8	1.2973	1.2786	1.1979	1.1957	1.2565	1.2565
1	1.4363	1.4114	1.2967	1.2897	1.3752	1.3756

[+] – Shi Y., Mei C. A finite element time domain modal formulation for large amplitude free vibrations of beams and plates // J. of Sound and Vibration – 1996. – vol. 193, № 2. – p.453-464; [++] – Mei C., Decha-Umphai K. A finite element method for nonlinear forced vibrations of rectangular plates // J. AIAA. - 1984. - Vol.23, № 7. – p.1104-1110.

У таблиці 2 наведено одержані результати для оболонок з прямокутним планом та класичним типом граничних умов.

Таблиця 2

Амплітудно-частотні залежності для основної частоти пологих оболонок різної кривини з закріпленням контуру – класичний шарнір, підхід II

Тип оболонки	Методи розв'язку	W/h				
		0.2	0.4	0.6	0.8	1
$k_x/k_y=1$	RFM	1.004	1.014	1.032	1.055	1.084
	[*]	0.999	0.980	0.950	0.900	0.850
$k_x/k_y=0$	RFM	1.008	1.032	1.070	1.119	1.180
	[*]	1.001	0.985	0.972	0.965	0.98
$k_x/k_y=-1$	RFM	1.014	1.053	1.102	1.139	1.191
	[*]	1.015	1.03	1.065	1.115	1.16

Порівняльний аналіз скелетних кривих, одержаних за допомогою підходу II, побудованого на апріорній лінеаризації співвідношень між деформаціями та переміщеннями, дозволяє зробити висновок, що цей підхід може бути застосовано лише для досить обмеженої кількості задач нелінійних коливань пологих оболонок. Так, було встановлено, що відносна розбіжність результатів для оболонки від'ємної гаусової кривини не перебільшує 5 % на малих амплітудах й 8 % на амплітудах, близьких до товщини оболонки. Однак результати, одержані для оболонок циліндричного та сферичного типів кривини, мають зовсім інший тип поведінки порівняно з відомими результатами, а також з одержаними попереднім методом, рис.1, *а*.

В дисертаційній роботі підхід II було застосовано для досліджень впливу різних факторів на скелетні криві гнучких пластин, а саме, граничних умов, форми плана тощо.

В останньому параграфі третього розділу розглянуто декілька практичних задач. Так, було досліджено динамічну поведінку бандажної полки робочої лопатки турбіни, розрахунковою схемою для якої було обрано закріплену з двох протилежних сторін панель зі скошеною межею, рис. 6: a = 0,04 м, b = (0,02; 0,04) м, h = 0,00145 м, R = 0,0525 м, E = 112000 МПа, $\rho = 4500$ кг/м^3, $\mu = 0{,}3$. Було розглянуто залежності частотних відношень ω_{nl}/ω_L до амплітуди від зміни довжини панелі b і кута скосу α. В ході досліджень було встановлено, що обидва параметри мають суттєвий вплив на скелетні криві панелі.

Рис.6. Схема полки

Практичний інтерес становлять дослідження впливу різних геометри-них факторів, а саме, форми та глибини вирізів на динамічну поведінку панелей з технологічними надрізами – складових елементів обшивки резервуару з отвором в місці сполучення з трубопроводом, рис. 7, *а, б*.

Рис. 7. Схема обшивки з панелей з технологічними надрізами:
а – схема обшивки, *б* – план панелі

Геометричні і пружні параметри панелі прийнято такими: a = 0,1 м, b = 0,1 м, h = 0,001 м, R = 1 м, E = 206000 МПа. Було встановлено, що глибина вирізів a_1/b_1 має істотний вплив на амплітудно-частотні залежності панелі. Проте тип кривих залишається жорстким, що було встановлено для умов закріплення типу класичний шарнір в процесі досліджень впливу граничних умов на скелетні криві оболонок з планом канонічної форми.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена вирішенню науково-практичної проблеми, пов'язаної з розробкою методів розв'язання задач вільних геометрично нелінійних коливань елементів тонкостінних конструкцій, які моделюються пластинами і пологими оболонками складної форми в плані з різними умовами закріплення.

Найбільш важливі наукові і практичні результати роботи:

1. Вперше розроблено метод дослідження динамічної поведінки ізотропних пологих оболонок довільної форми плана. Новизна методу полягає в тому, що система базисних функцій, яка використовується для розкладу шуканого розв'язку в ряд, побудована в аналітичному вигляді за допомогою теорії R-функцій. Це дозволяє звести початкову задачу до задачі Коші у разі складних областей і типів крайових умов. При цьому в аналітичному вигляді одержано вирази для коефіцієнтів звичайного нелінійного диференціального рівняння, до якого зведено розв'язання задачі про вільні нелінійні коливання оболонки.
2. Узагальнено метод дослідження нелінійних коливань пластин, який базується на апріорній лінеаризації співвідношень між деформаціями і переміщеннями та подальшому застосуванні ітераційного процесу для побудови скелетних кривих. Узагальнення такого підходу для гнучких пластин складної геометрії та різних видів граничних умов досягнуто завдяки сумісному використанню теорії R-функцій та варіаційних методів.
3. Створена база знань та розроблено програмне забезпечення для автоматизованої системи POLE-RL, яке містить варіаційні постановки вказаного класу задач, аналітичні вирази для обчислення елементів матриць Рітца, структури розв'язку, що задовольняють заданим крайовим умовам, аналітичні вирази для коефіцієнтів диференціального рівняння типу Дуффінга та ін.
4. Розв'язано низку нових задач про вільні нелінійні коливання оболонок з планом складної форми та різної кривини (циліндричних, сферичних та двоякої кривини). Досліджено вплив фізичних та геометричних параметрів на амплітудно-частотні залежності пологих оболонок. Обґрунтовано вірогідність запропонованих підходів методами обчислювального експерименту за допомогою широкого тестування та порівняння одержаних результатів з відомими та результатами фізичного експерименту.
5. Розглянуто застосування розробленого методу до розрахунку конкретних елементів тонкостінних конструкцій, у тому числі бандажної полки робочої лопатки турбіни; обшивок резервуарів з технологічними отворами у місцях скріплення з трубопроводом. Встановлено ефекти впливу розмірів та форми технологічних вирізів на скелетні криві.
6. Результати роботи було впроваджено в навчальний процес на кафедрі прикладної математики НТУ "ХПІ" при викладанні курсу "Рівняння математичної фізики" для спеціальності "Динаміка і міцність", та при виконанні держбюджетних тем, про що свідчить відповідний акт із застосування.

СПИСОК ПРАЦЬ, ОПУБЛІКОВАНИХ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Курпа Л. В., Пильгун Г. В. Применение теории R–функций к решению задач о нелинейных

колебаниях пластин сложной формы // Доповіді НАН України. – 2003. – №10. – С. 52–56.

Здобувачем запропоновано алгоритм розв'язання задач про вільні нелінійні коливання пластин складної форми в плані; виконано тестування розробленого алгоритму.

2. Пильгун Г. В. Применение RFM к исследованию геометрически нелинейных колебаний пластин произвольной формы // Вісник Національного технічного університету “Харківський політехнічний інститут”. – Харків: НТУ “ХПІ”, 2003. – Т. 3, №8. – С. 47–52.

3. Курпа Л. В., Пільгун Г. В., Онуфрієнко О. Г. Застосування методу R-функцій для дослідження нелінійних коливань пластин складної форми // Машинознавство. – 2003. – №9 (75). – С. 3–7.

Здобувачем виконано тестування запропонованого підходу з використанням теорії R-функцій на задачах про вільні нелінійні коливання пластин. Одержано амплітудно-частотні залежності для вищих форм коливань гнучких пластин.

4. Курпа Л. В., Пильгун Г. В. Нелинейные свободные колебания пластин и пологих оболочек // Вісник Національного технічного університету “Харківський політехнічний інститут”. – Харків: НТУ “ХПІ”, 2004. – №19. – С. 127–133.

Здобувачем запропоновано підхід до розв'язання задач про вільні нелінійні коливання пологих оболонок та пластин з планом складної форми. Виконано порівняння чисельних результатів з відомими.

5. Курпа Л. В., Пильгун Г. В. Об одном подходе к решению задач о нелинейных колебаниях пластин и пологих оболочек сложной формы в плане // Вісник Національного технічного університету “Харківський політехнічний інститут”. – Харків: НТУ “ХПІ”, 2005. – №21. – С. 73–79.

Здобувачем виконано тестування запропонованого підходу, що дозволяє звести початково-крайову задачу нелінійних коливань пологих оболонок до задачі Коші, та проведено аналіз впливу різних геометричних та фізичних факторів на скелетні криві основної форми коливань пологих оболонок довільної форми плану.

6. Курпа Л. В., Онуфриенко О. Г., Пильгун Г. В. Исследование геометрически нелинейных колебаний тонких пластин с помощью теории R-функций // Теоретическая и прикладная механика. – Харьков: Основа, 2003. – Вып. 37. – С. 151–156.

Здобувачем розроблено програмне забезпечення для розв'язання задач про вільні нелінійні коливання ізотропних пластин складної форми з мішаними умовами закріплення, а також досліджено вплив геометричних параметрів на скелетні криві.

7. Kurpa L., Pilgun G., Ventsel E. Applications of the R-function method to nonlinear vibrations of thin plates of arbitrary shape // Journal of Sound and Vibration. – 2005. – Vol. 284. – P. 379–392.

Здобувачем одержано чисельні результати дослідження вільних нелінійних коливань пластин складної форми плану з різними умовами закріплення.

8. Курпа Л. В., Онуфриенко О. Г., Пильгун Г. В. Собственные колебания пологих оболочек сложной формы в плане // Труды 5-й Международной научно-технической конференции "Физические и компьютерные технологии в природном хозяйстве". – Харьков: ХНПК "ФЕД", 2002. – С.673–676.

Здобувачем одержано чисельні результати у дослідженні впливу форми плану, кривини та типів граничних умов на спектр власних частот пологих оболонок, що спираються на план складної форми.

9. Пильгун Г. В. Свободные колебания пластин сложной формы в геометрически нелинейной постановке // Труды 6-й Международной научно-технической конференции "Физические и компьютерные технологии в народном хозяйстве". – Харьков. ХНПК "ФЕД", 2002. – С. 331–333.

10. Курпа Л. В., Пильгун Г. В. Исследование свободных колебаний тонких пластин при больших амплитудах // Анотації доповідей XI Міжнародної науково-практичної конференції "Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я". – Харків: НТУ "ХПІ", 2003. – С. 95.

Здобувачем розроблено програмне забезпечення для розв'язання задач про вільні нелінійні коливання пластин складної планформи.

11. Пильгун Г. В. Решение задач о геометрически нелинейных колебаниях пологих оболочек методом R-функций // Анотації доповідей XII Міжнародної науково-практичної конференції "Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я". – Харків: НТУ "ХПІ", 2004. – С. 82.

12. Kurpa L, Pilgun G. Nonlinear vibrations of shallow shells and thin plates of arbitrary shape // Abstr. and CD-ROM Proc. International Congress Of Theoretical and Applied Mechanics XXI (ICTAM). – Warsaw (Poland), 2004. – P. 334.

Здобувачем розроблено програмне забезпечення для розв'язання задач про вільні нелінійні коливання ізотропних пологих оболонок і пластин.

13. Kurpa L, Pilgun G. Large amplitude vibrations of shallow shells of arbitrary shape // Proc. The International Conf. on Nonlinear Dynamics. – Kharkov (Ukraine), 2004. – P. 113–118.

Здобувачем виконано чисельні дослідження впливу геометричних факторів на скелетні криві пологих оболонок з планом довільної геометрії.

14. Пильгун Г. В., Курпа Л. В. К вопросу о применении RFM к задачам динамики пластин и пологих оболочек в геометрически нелинейной постановке // Thesis of reports of International Conf. Dynamical System Modelling and Stability Investigation. – Kiev (Ukraine), 2005. – P. 319.

Здобувачем одержані чисельні результати у вигляді амплітудно-частотних залежностей для вільних нелінійних коливань пологих оболонок різних типів кривини та різних видів умов закріплення.

15. Пильгун Г. В. Метод R–функций в исследованиях пологих оболочек при больших амплитудах

прогиба // Тезисы докладов конференции молодых ученых и специалистов “Современные проблемы машиностроения”. – Харьков: ИПМаш им. Подгорного НАН Украины, 2005. – С. 14.
16. Pilgun G. Nonlinear free vibration of shallow shells of arbitrary shape // Book of abstracts 77th Annual Meeting of the Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik. – Berlin (Germany), 2006. – P. 165–166.

АНОТАЦІЇ

Пільгун Г. В. Методи аналізу геометрично нелінійних коливань пологих оболонок і пластин складної форми. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 05.02.09 – "Динаміка та міцність машин". – Національний технічний університет "Харківський політехнічний інститут", Харків, 2006.

Дисертаційна робота присвячена розробці нових ефективних підходів дослідження вільних нелінійних коливань елементів тонкостінних конструкцій, які можуть бути представлені пологими оболонками та пластинами довільної форми. Один із запропонованих методів базується на спільному застосуванні теорії R-функцій, варіаційних методів, методів Бубнова–Гальоркіна і Рунге-Кутта. Цей метод дозволяє звести початково-нелінійну систему рівнянь руху пологої оболонки до задачі Коші для рівняння типу Дуффінга та її подальшого розв'язку. Для гнучких пластин зі складною геометрією запропоновано ще один підхід, який базується на апріорній лінеаризації співвідношень між деформаціями і переміщеннями та подальшому застосуванні ітераційного процесу. Побудовано та чисельно реалізовано алгоритм і відповідне програмне забезпечення у рамках системи POLE–RL, що містить постановки вказаного класу задач, аналітичні вирази для обчислення елементів матриць Рітца, структури розв'язку, які задовольняють задані крайові умови, одержані аналітичні вирази для визначення коефіцієнтів звичайного нелінійного рівняння тощо. Розв'язано низку нових задач про нелінійні вільні коливання оболонок складної форми у плані різної кривини (циліндричних, сферичних та двоякої кривини), з різними типами граничних умов. Досліджено вплив фізичних та геометричних параметрів на скелетні криві пологих оболонок та пластин. Розроблені методи застосовано до розрахунку конкретних елементів тонкостінних конструкцій.

Ключові слова: нелінійні коливання, геометрична нелінійність, пологі оболонки, гнучкі пластини, теорія R-функцій.

Пильгун Г. В. Методы анализа геометрически нелинейных колебаний пологих оболочек и пластин сложной формы. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности

05.02.09 – "Динамика и прочность машин". – Национальный технический университет "Харьковский политехнический институт", Харьков, 2006.

В диссертационной работе предложены новые методы исследования свободных геометрически нелинейных колебаний элементов тонкостенных конструкций, которые моделируются пологими изотропными оболочками и пластинами произвольной формы. Один из методов основан на комплексном применении теории R-функций, вариационных методов, методов Бубнова–Галёркина и Рунге-Кутта и позволяет свести исходную нелинейную систему уравнений движения с частными производными к задаче Коши для уравнения типа Дуффинга и ее дальнейшему исследованию.

Отличительной особенностью данной работы является применение теории R-функций, благодаря чему удается построить базисные функции для практически произвольных областей и видов граничных условий в аналитическом виде, что позволило в общем случае выполнить переход от начально-краевой задачи к задаче исследования обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения – задаче Коши. В качестве базисных функций были взяты собственные функции соответствующей линейной задачи свободных колебаниях пологой оболочки.

Для сведения исходной системы к задаче Коши и определения коэффициентов обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения были численно решены следующие краевые задачи: задача линейных колебаний оболочки и задача теории упругости.

Решение обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения типа Дуффинга было выполнено с помощью методов Рунге-Кутта, Галеркина, а также сведения уравнения к вычислению эллиптического интеграла I рода.

Для определения амплитудно-частотных зависимостей гибких пластин в работе предложен еще один подход, в основу которого положены априорная линеаризация соотношений между деформациями и перемещениями, вариационные методы, теория R-функций. Решение поставленной задачи осуществляется с помощью итерационного процесса для последовательности задач на собственные значения.

Разработанные алгоритмы реализованы в виде программного обеспечения на входном языке системы POLE-RL, в рамках которого реализованы постановки указанного класса задач; аналитические выражения для вычисления элементов матриц Ритца; структуры решения, удовлетворяющие заданным граничным условиям; полученные аналитические выражения для вычисления коэффициентов обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения в первом методе, а также завязан итерационный процесс – во втором, и т.д.

С помощью предложенных подходов решены новые задачи о нелинейных свободных колебаниях пологих оболочек сложной формы в плане, разных типов кривизны (цилиндрических,

сферических и двоякой кривизны), с разными способами их закрепления. Исследовано влияние физических и геометрических параметров на скелетные кривые пологих оболочек и гибких пластин. В частности, с помощью предложенных методов были решены некоторые практические задачи. Так, было исследовано динамическое поведение бандажной полки рабочей лопатки турбины, расчетными схемами для которой были приняты цилиндрические панели со скошенным краем, закрепленные с двух противоположных сторон. Установлено влияние длины и угла скоса на амплитудно-частотные зависимости панелей. Исследовано влияние глубины и формы технологических надрезов на скелетные кривые панелей – составных элементов обшивок тонкостенных конструкций, в том числе обшивок резервуаров с технологическими отверстиями в местах соединения с трубопроводом. Исследованы эффекты влияния размеров и формы технологичных вырезов на скелетные кривые рассмотренных конструкционных элементов.

Ключевые слова: нелинейные колебания, геометрическая нелинейность, пологие оболочки, гибкие пластины, теория R-функций.

Pilgun G. V. Methods of analysis of the geometrically nonlinear vibrations of shallow shells and plates with complex form. – Manuscript.

Thesis for the scientific degree of Candidate of Technical Science by speciality 05.02.09 – dynamics and strengths of machines. – National Technical University "Kharkov Polytechnic Institute", Kharkov, 2006.

The work is devoted to the development of new effective research methods of nonlinear free vibrations of thin-walled constructions elements that can be simulated by shallow shells and plates with arbitrary shape. The method based on joint use of the R–function theory, variational methods, Bubnov–Galerkin method and Runge-Kutta method is proposed. It allows to reduce initially nonlinear system of the shallow shell governing equations to the Cauchy problem and its further research. To determine backbone curves of flexible plates with complex form an effective approach based on a priori linearized strain–displacements relationships and iterative process is developed. The algorithm and appropriate software is created in POLE–RL program system. The software includes the specified problems formulations; analytical formulas to calculate Ritz matrixes; structures of solutions that satisfy the given boundary conditions; obtained analytical formulas to compute coefficients of the ordinary nonlinear differential equation, etc. New problems of nonlinear free vibrations of shallow shells with complex base, different curvature types (cylindrical, spherical, double curvature) and various kinds of boundary conditions have been solved. Physical and geometrical factors effects on amplitude-frequency response curves for thin shallow shells and plates have been studied.

Key words: nonlinear vibrations, geometrical non-linearity, shallow shells, flexible plates, the R-functions theory.

Автореферат

Пільгун Галина Володимирівна

МЕТОДИ АНАЛІЗУ ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК І ПЛАСТИН СКЛАДНОЇ ФОРМИ

Відповідальний за випуск к.т.н. С. П. Іглін