МІНІСТЕРСТВО АГРАРНОЇ ПОЛІТИКИ УКРАЇНИ
ТАВРІЙСЬКА ДЕРЖАВНА АГРОТЕХНІЧНА АКАДЕМІЯ

ГРІНЧЕНКО Євген Миколайович

УДК 514.18

ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯННЯ ДУФФІНГА ПРИ РОЗРОБЦІ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ ІЗ ПРОКЛАЦУВАННЯМ

Спеціальність 05.01.01 –
Прикладна геометрія, інженерна графіка

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

Мелітополь – 2007

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Національному технічному університеті „Харківський політехнічний інститут" Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: кандидат технічних наук, доцент
Ткаченко Володимир Пилипович,
завідувач кафедри інженерної
і комп'ютерної графіки,
Харківський національний університет
радіоелектроніки (м. Харків);

Офіційні опоненти: доктор технічних наук, професор
Корчинський Володимир Михайлович,
завідувач кафедри електронних
засобів телекомунікацій,
Дніпропетровський національний університет
(м. Дніпропетровськ);
кандидат технічних наук, доцент
Караєв Олександр Гнатович,
старший науковий співробітник
завідувач відділом зрошення і механізації,
інститут зрошувального садівництва
ім. М.Ф. Сидоренка УААН (м. Мелітополь);

Захист відбудеться "19" вересня 2007 р. о 10^{00} годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 18.819.02 у Таврійській державній агротехнічній академії за адресою:

72312, Запорізька обл., м. Мелітополь, просп. Б.Хмельницького, 18.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Таврійської державної агротехнічної академії за адресою:

72312, Запорізька обл., м. Мелітополь, просп. Б.Хмельницького, 18.

Автореферат розісланий " 17 " серпня 2007 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради,
кандидат технічних наук, доцент О.М.Мацулевич

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Однією з важливих проблем сучасної науки й техніки, яка впливає на становлення виробничого потенціалу України, є дослідження способів захисту від вібрацій і ударів. Адже знехтування вібраціями може викликати непередбачувані навантаження в елементах конструкцій, ініціювати розвиток тріщин, що призводить до аварії. Тому суттєве значення набувають методи і засоби зменшення вібрацій шляхом створення систем віброзахисту. Відомі методи розрахунку віброзахисних систем базуються на нелінійних моделях. Світовий досвід показує, що їх подальше удосконалення можливе в результаті використання віброзахисних систем с квазінульовою жорсткістю, запропонованих П.М.Алабужевим. Він досліджував схеми пасивних віброзахисних систем з ділянками квазінульової жорсткості (ферми Мезеса з проклацуванням). Математичною моделлю віброзахисних систем з квазінульовою жорсткістю є нелінійне диференціальне рівняння, належне до класу рівнянь Дуффінга. В галузі теорії нелінійних коливань механічних систем з проклацуванням на основі розв'язання рівнянь типу Дуффінга відомі фундаментальні результати А.А.Андронова, В.С.Анищенка, А.П.Кузнецова, Ю.І Неймарка, П.С.Ланда, А.Н.Зотова, Ю.В.Міхліна, Г.В.Манучарян, Т.В.Шматко, Г.Каудерера, Н.Г.Бондаря X.Sharon, F.S.Moon, M.Cross та інших. При цьому, крім, звісно, аналітичних формул, ключовими поняттями досліджень являлись *графічні образи розв'язків рівнянь* - фазові траєкторії та аттрактори Дуффінга. Згадані геометричні образи можуть визначити предмет досліджень і для прикладної геометрії, оскільки геометричне моделювання складних за формою об'єктів (як результату їх профілювання за певними законами), належать до головних напрямків розвитку прикладної геометрії та інженерної графіки. Однак проведені дослідження не створили інформаційне забезпечення геометричного моделювання фазових траєкторій рівняння Дуффінга. Причини цього явища полягали у відсутності геометричних моделей і процесорів, які б дозволили пояснити формоутворення фазових портретів та їх досліджувати у реальному часі на аналітичному та графічному рівнях. З позицій прикладної геометрії ще не дослідженою виявилася задача унаочнення поведінки у часі сім'ї фазових траєкторій рівняння Дуффінга. Основною проблемою вивчення механічних коливальних систем з проклацуванням є можливість існування хаотичності при її русі. Але завдяки вибору вхідних параметрів хаотичність можна зменшити. Розв'язати цю задачу математичними методами дуже складно. На якісному рівні механічні коливальні системи з проклацуванням можна дослідити завдяки унаочненню фазових траєкторій аттрактора Дуффінга. Проявом відсутності хаотичності коливань може бути наявність циклічних фазових траєкторій розв'язків рівняння Дуффінга. Тому актуальними будуть дослідження алгоритмічного забезпечення програм розв'язання рівнянь типу Дуффінга, що дозволить вивчати певний клас механізмів коливальної дії з проклацуванням шляхом візуалізації та аналізу форми фазових траєкторій рівняння Дуффінга.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Роботу виконано на кафедрі нарисної геометрії і графіки Національного технічного університету “ХПІ” в рамках науково-технічної програми кафедри за замовленням ОАО “ПОЛІГРАФМАШ” та Алчевського коксохімзаводу.

Формулювання наукової задачі, нове вирішення якої отримано в дисертації. Дослідити геометричні властивості розв’язків рівняння Дуффінга як апарату дослідження процесу проклацування механічних конструкцій.

Мета і задачі дослідження. Розробити алгоритмічне забезпечення геометричного моделювання та унаочненню у часі розв’язків рівняння Дуффінга як математичного апарату дослідження процесу проклацування механічних конструкцій типу ферми Мезеса.

Об'єктом дослідження є процес коливань механічних систем з проклацуванням.

Предметом дослідження є забезпечення алгоритмів геометричного моделювання механічних систем з проклацуванням, а також побудови їх фазових траєкторій.

Методи дослідження: елементи теорії інваріантних множин динамічних систем, елементи теорії коливань, диференціальних рівнянь та обчислювальної математики, елементи комп'ютерної графіки у середовищі процесора Maple.

Для досягнення цієї мети у дисертації поставлено такі основні задачі:

♦ *провести* аналіз відомих методів аналізу розв’язків рівняння Дуффінга;

♦ *скласти* алгоритм побудови на площині фазових траєкторій розв’язків рівняння Дуффінга суміщених з полем ізоклін;

♦ *дослідити* розв’язки рівняння Дуффінга в залежності від початкових умов і в околі точки нестійкої рівноваги;

♦ *дослідити* вплив на розв’язок рівняння Дуффінга амплітуди сили зовнішнього збудження;

♦ *розробити* графоаналітичний спосіб пошуку періодичних орбіт аттрактора Дуффінга;

♦ *дослідити* стійкість хаотичних коливань, описаних рівнянням Дуффінга;

♦ *розробити* алгоритми анімації зображень формоутворення розв’язків рівняння Дуффінга в залежності від його параметрів і початкових умов;

♦ результати впровадити у виробництво для розрахунку системи вібрcivзахисту типу ферми Мезеса та у навчальний процес.

Наукові положення, розроблені особисто дисертантом та їх новизна.

1. Розроблено спосіб побудови розв’язків рівняння Дуффінга на полі ізоклін, що дозволило аналізувати розв’язки в залежності від початкових умов.

2. Вперше описано графоаналітичний спосіб визначення періодичних орбіт фазових траєкторій рівняння Дуффінга як критерію відмежування від хаосу.

3. Набув подальшого розвитку графоаналітичний спосіб визначення стійкості хаотичних коливань, описаних рівнянням типу Дуффінга.

4. Розроблено спосіб побудови кадрів анімації зміни фазових траєкторій рівняння Дуффінга, що дозволило виявляти критичні значення параметрів.

Вірогідність та обґрунтованість Вірогідність і обґрунтованість результатів роботи, сформульованих висновків, наукових положень та рекомендацій, підтверджується доведенням тверджень, аналітичними перетвореннями за допомогою процесора Maple, та побудованими за допомогою комп'ютера зображеннями результатів геометричного моделювання для тестових прикладів. Результати роботи доповідались та обговорювались на науково-методичних конференціях і наукових семінарах, опубліковані в тематичних збірниках і фахових виданнях.

Практичне значення одержаних результатів дисертації полягає у спроможності на її теоретичній базі впроваджувати в реальну практику механічні системи з проклацуванням, що дозволить вивчати цілий клас механізмів коливальної дії шляхом візуалізації фазових портретів диференціального рівняння Дуффінга. Реалізація роботи виконана в ОАО "ПОЛІГРАФМАШ" при проектуванні системи захисту від вібрацій в механізмах поліграфічних машин та на Алчевскому коксохімзаводі для віброізоляції кабіни керування, а також в навчальному процесі НТУ „ХПІ", що підтверджується довідками про використання запропонованої методики.

Особистий внесок здобувача. Особисто автор виконав теоретичні дослідження по складанню та розв'язанню диференціальних рівнянь типу Дуффінга, склав алгоритми побудови на площині фазових портретів рівняння Дуффінга суміщених з полем ізоклін; дослідив розв'язки рівняння Дуффінга в залежності від початкових умов і в околі точки нестійкої рівноваги; дослідив вплив на розв'язок рівняння Дуффінга амплітуди сили зовнішнього збудження.

Апробація результатів дисертації. Основні положення дисертаційної роботи доповідалися та обговорювались на: ● науковому семінарі кафедри нарисної геометрії та графіки НТУ "ХПІ" під керівн. к.т.н., проф. А.М.Краснокутського (м. Харків, 2005 - 2007 рр.); ● міській секції графіки під керівн. д.т.н., проф. Л.М.Куценка (м. Харків, 2006 р); ● науковому семінарі кафедри нарисної геометрії та комп'ютерної графіки ДонНТУ під керівн. д.т.н., проф. І.А.Скидана (м. Донецьк, 2006 р.); ● другій науково-практичній конференції „Геометричне і комп'ютерне моделювання: енергозбереження, екологія, дизайн" (м. Сімферополь, 2005 р.); ● україно–російській науково–практичній конференції "Сучасні проблеми геометричного моделювання" (м. Харків, 2005 р., 2007 р.); ● науково–практичній конференції "Сучасні проблеми геометричного моделювання" (м. Дніпропетровськ, 2006 р); ● науковому семінарі кафедри прикладної геометрії і інформаційних технологій проектування ТДАТА під керівн. д.т.н., проф. В.М.Найдиша (м. Мелітополь, 2007 р.); ● науковому семінарі кафедри інженерної і комп'ютерної графіки, ХНУРЕ під керівн. к.т.н., проф. В.П.Ткаченка (м. Харків, 2005 - 2007 р.);

Публікації. За результатами досліджень опубліковано 10 робіт (з них 3 одноосібно, 9 у виданнях, які рекомендовано ВАК України).

Структура і обсяг роботи. Дисертація складається із вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел із 137 найменувань та додатків. Робота містить 164 сторінки машинописного тексту та 48 рисунків.

ЗМІСТ РОБОТИ

Вступ містить загальну характеристику роботи. Обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету та задачі досліджень. Показано наукову новизну і практичну цінність отриманих розв'язків.

У першому розділі наведено приклади схем віброзахисних механічних систем, дія яких заснована на фізичному ефекті проклацування. Засновником використання коректорів жорсткості у віброзахисних пристроях є професор П.М.Алабужев. Розглянуто два різновиди коректора жорсткості (ферм Мізеса). Вважається, що об'єкт віброізоляції маси *m* може здійснювати лише вертикальні коливання, і що він пов'язаний з основою, яка здійснює коливання за законом $\xi(t)$.

У першому коректорі жорсткості (рис. 1а) рух об'єкту віброізоляції відбувається за допомогою двох вертикальних пружин жорсткості C_2, а також бокової пружини-коректора з жорсткістю C_1, яка в горизонтальному стані попередньо відтиснута на величину Δ. При відхиленні зазначеної системи від початку відліку на величину y її потенціальна енергія дорівнюватиме

$$\Pi = C_2 y^2 + \frac{C_1}{2}\left(\sqrt{y^2+L^2} - (L+\Delta)\right)^2 . \qquad (1)$$

Похідна Π по y дає приведену пружну силу $F(y) = C_1 y\left(1-\frac{L+\Delta}{\sqrt{L^2+y^2}}\right)+\frac{C_2 y}{2}$. Звідси маємо наведену жорсткість $C(y) = C_1\left(1-\frac{(L+\Delta)L^2}{\sqrt{(L^2+y^2)^3}}\right)+\frac{C_2}{2}.$ Умова $C(0)=0$ виконується, коли $C_2=0,5C_1\Delta_{cm}/L$. Динамічні процеси, що відбуваються в моделі, описуються нелінійним диференціальним рівнянням

$$m\ddot{y} + 2\beta\,\dot{y} + C_1 y\left(1 - \frac{L + \Delta}{\sqrt{L^2 + y^2}}\right) + \frac{C_2 y}{2} = -m\ddot{\xi}(t),$$

(2)

де β - коефіцієнт в'язкого опору. При цьому, коли значення C_1 і C_2 набагато відмінні, то рівняння відноситься до "жорстких" рівнянь.

До конструкції другого коректора жорсткості (рис. 1б) входить пружина жорсткості C_2, і дві пружини-коректори жорсткості C_1, які в горизонтальному стані при $y=0$ попередньо відтиснуті на величину Δ. Тут через $2L$ позначено габарит конструкції, через β - коефіцієнт в'язкого опору. Зовнішнє збудження $\xi(t)=P_0 sin\omega t$ може діяти як кінематичне збудження через вібраційну основу. Функція $y(t)$ переміщення маси визначається з потенціальної енергії системи (1). Тобто динамічні процеси, що відбуваються в динамічній моделі другого коректора жорсткості, також описуються диференціальним рівнянням (2).

Задана несуча здатність розглянутих системи забезпечується за умови припустимої статичної деформації Δ_{cm} віброізолятора, коли жорсткість C_2 визначити із співвідношення $2C_2\Delta_{cm}=mg$. Параметр L задається габаритними розмірами пристрою, а Δ вибирається з конструктивних і технологічних обмежень у діапазоні $0 < \Delta \leq L/2$. При такому виборі параметрів існує якийсь інтервал $s = 2\sqrt{\sqrt[3]{(L+\Delta)^2 L^4} - L^2}$, де спостерігається зниження жорсткості системи при забезпеченні заданої несучої здатності.

Динамічні процеси, що відбуваються в таких системах, описуються істотно нелінійними диференціальними рівняннями, і повний аналіз статичних і динамічних властивостей коректорів жорсткості можливий лише на основі розв'язання цих рівнянь. Оскільки одержання розв'язків для систем нелінійних диференціальних рівнянь можливе лише в рідкісних випадках, перспективним представляється спосіб зведення їх розв'язків до розв'язків відомих аналогічних диференціальних рівнянь. Це буде рівняння типу Дуффінга.

Для спрощення досліджень вираз із квадратним коренем у рівнянні (2) звичайно розкладають у біноміальний ряд. Тоді при збереженні двох членів розкладу буде одержано рівняння типу Дуффінга:

$$\ddot{x} - \alpha\,x + \beta\,x^3 = 0,$$

(3)

де $\alpha = \frac{1}{mL}(C_1\Delta - 2C_2L)$, $\beta = \frac{C_1(\Delta + L)}{2mL^3}$.

У системі з від'ємною жорсткістю крім рівноважного стану *x=0* існують два інших $x=\pm x_0$.

Значення x_0 легко знайти з рівняння $F(x_0)=0$. Його коренем є $x_0 = \sqrt{\left(\frac{C_1 \Delta + L}{C_1 + 2C_2}\right)^2 - L^2}$. Для рівняння (3) значення x_0 визначається як $x_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$.

Прийом переходу від "точного" (2) до спрощеного рівняння типу Дуффінга (3) доцільно застосовувати тоді, коли необхідно скористатися численними дослідженнями рівнянь типу Дуффінга на якісному рівні, а також використовувати готові програми для розв'язання рівнянь типу Дуффінга.

Головним способом дослідження рівнянь типу Дуффінга в роботі обрано *унаочнення та аналіз їх фазових портретів*. Можливість унаочнення на фазовій площині областей нестійкості фазових траєкторій при різних значеннях амплітуди зовнішнього впливу f дозволяє аналізувати це рівняння на якісному рівні.

В другому розділі наведено теоретичні основи дослідження розв'язків рівняння Дуффінга на основі геометричного моделювання їх фазових портретів.

Механічні системи з проклацуванням можна описати за допомогою диференціального рівняння Дуффінга

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} - bx + cx^3 = F\cos(\omega\, t), \tag{4}$$

де $x(t)$ – переміщення в часі; ax' - лінійне демпфування; $F\cos(\omega t)$ – зовнішнє збудження системи; $-bx + cx^3$ – кубічна відновлююча сила.

В роботі досліджено розв'язки рівняння (4) в залежності від початкових умов. На рис. 2а на полі ізоклін для параметрів a=0,1; b=1; c=1; F=0 і ω=1зображено фазові траєкторії, які починаються в близьких точках на фазовій площині і прямувати до різних стійких точок системи. Також досліджено поведінки розв'язку в околі початку координат як точки нестійкої рівноваги: адже незначне відхилення від стану рівноваги може спричинити виникнення стабільного (рис. 2б) чи нестабільно-хаотичного (рис. 2в) стану системи.

В роботі розглядався вплив на розв'язок рівняння (4) амплітуди збуджуючої сили. На рис. 3 для параметрів a=0,5; b=1; c=1 і ω=1 зображено фазові траєкторії рівняння (4) в залежності від величини F. Також розглядалися питання впливу на розв'язок рівняння (4) зміни інших його параметрів.

Ознакою слабкої хаотичності може служити наявність циклічних фазових траєкторій розв'язків рівняння Дуффінга. Мета геометричних досліджень полягає у визначенні значень параметрів рівняння Дуффінга, які б дозволили відмежуватися від хаотичності. Розроблено графоаналітичний спосіб визначення коефіцієнтів, які забезпечать циклічний характер розв'язку.

Розглянемо рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} - bx + cx^3 = 0\,. \tag{5}$$

Шукати будемо 2π періодичний розв'язок рівняння (5) при початкових умовах $x(0) = F$; $\dot{x}(0) = 0$, де F - амплітуда коливань.

Умова $\dot{x}(0) = 0$ вказує на парний характер розв'язку рівняння. Виходячи з того, що парні і непарні розв'язки будуть розрізнятися лише фазовим зсувом, то розв'язок рівняння (5) будуємо у вигляді ряду Фур'є за косинусами непарних гармонік:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{N} A_n \cos(2n+1)t\,. \tag{6}$$

Цим задовольняється початкова умова $\dot{x}(0) = 0$ і умова 2π - періодичності розв'язку. Підстановка (5) в рівняння (5) дає систему з N+1 алгебраїчного рівняння відносно N+1 коефіцієнта Фур'є:

$$\sum_{n=0}^{N} (-A_n \cos((2n+1)t)(2n+1)^2) + a\sum_{n=0}^{N}(-A_n \sin((2n+1)t)(2n+1)) + \tag{7}$$

$$+\, b\sum_{n=0}^{N} (A_n \cos((2n+1)t) - c\left(\sum_{n=0}^{N}(A_n \sin((2n+1)t)\right)^3 = 0$$

Врахування початкової умови $x(0) = F$ дозволяє одержати додаткове рівняння для коефіцієнтів Фур'є $A_0 = F - \sum_{n=1}^{N} A_n$. Тоді систему (7) можна доповнити ще і додатковою змінною – одним з коефіцієнтів a, b чи c. Останнє зауваження дозволяє визначати коефіцієнти рівняння Дуффінга, які забезпечать циклічний характер його розв'язку. Пояснимо це на прикладі вибору значення параметра *c*. Для цього в інтерактивному режимі обираються величини *a, b* і *c* так, щоб фазова траєкторія "нагадувала" шукану циклічну. Обираючи за початкове деяке значення *c* = *c0*, розв'язуємо систему рівнянь (7).

<u>Приклад</u>. В інтерактивному режимі обираються параметри *a* = 0,002; *b* = 0,4; *c* = 2,5; *F* = 0,815. На рис. 4а наведено фазову траєкторію, відповідну цим параметрам при $0 \le t \le 2\pi$. Систему рівнянь (7) розв'язано з початковими значеннями *c0*=2,5 і A_k=0 (*k*=0..36). Після розв'язання одержано *c* = 3 (рис. 4б).

В роботі також розглянуто рівняння Дуффінга (4), де враховується амплітуда F і частота ω зовнішньої дії

Приклад. На рис. 5а при $0 \le t \le 2\pi$ наведено фазову траєкторію для параметрів a = 0,002; b = 0,4; c = 7; w = 1; F = 0,815. Згідно цьому випадку систему рівнянь (7) розв’язано з початковими значеннями $c0$ = 7 і $A_k = 0$ (k = 0..36). В результаті розв’язання одержано с = 5,87 (рис. 5б).

В роботі також розглянуті питання стійкості хаотичних коливань, описаних рівнянням типу Дуффінга. За Ляпуновим розв’язок $y = 0$ є стійким, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ можна знайти таку постійну $\delta > 0$, що для всіх $y_0 \in N_\delta^{(0)}$ і $t \ge 0$ буде виконана умова $y(t) \in N_\varepsilon^{(0)}$. Тут $N_\delta^{(0)}$ і $N_\varepsilon^{(0)}$ означають δ і ε - околи розв’язку $y = 0$. Такий окіл може бути обраний по-різному. Наприклад, $N_\sigma = \{y \in R^n: \|y\| \le \sigma\}$, де $\| . \|$ - норма в просторі розв’язків. Зв'язок між величиною ε і початковим значенням змінної y задамо у вигляді

$$\varepsilon = \rho \| y_0 \| \le \rho\, \delta \ (\rho = \text{const}). \tag{8}$$

Умова (8) означає, що величина δ не може бути довільно малою, тому що $\delta \ge \varepsilon\rho$. Звідси $\rho \ge \varepsilon/\delta$; таким чином, постійна ρ – це верхня межа відношення ε/δ . З умови стійкості за Ляпуновим, беручи до уваги нерівність (8), знаходимо, що $\|y(t)\| \le \rho \|y(0)\|$. Отже, розв’язок $y = 0$ при $0 \le t \le T$ стає нестійким, якщо

$$\sup \|y(t)\| \le \rho \|y(0)\|. \tag{9}$$

Критерій стійкості (9) отриманий за умови, що величина ρ не може бути як завгодно малою. Є деяка свобода у виборі величини ρ, і це не випадково, тому що в області нестійкості із часом варіації вийдуть за межі околу вихідного розв’язку при будь-якому виборі ρ (наприклад, $\rho = 10$). Величини ρ і T зв'язані між собою. Для того, щоб установити це, необхідно критерій (9) зв’язати з визначенням так званих постійних Ляпунова. За Г.В.Манучарян постійну Ляпунова можна визначити як $\lambda = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|y(t)\|}{\|y(0)\|}$, звідки слідує

$$\frac{\|y(t)\|}{\|y(0)\|} = \ell^{(\lambda+\Delta)t}. \tag{10}$$

Порівнюючи (9) і (10), можна одержати нерівності $\rho = \ell^{(\lambda+\Delta)T}$,

$$T \geq \ln \rho / (\lambda + \Delta) \text{ (при } \lambda > 0), \quad (11)$$

де T – максимальний час розрахунку. Отже, постійні ρ і T, які вводяться в критерії (9), виявляються зв'язаними нерівностями (11).

Розглянутий спосіб дослідження взаємної нестійкості фазових траєкторій дозволяє визначити, чи перебуває система в хаотичному стані чи ні. Хаос у детермінованих системах спричиняє чутливу залежність від початкових умов. Це означає, що дві траєкторії, близькі одна одній у фазовому просторі в деякий початковий момент часу, розходяться за експоненціальним законом в межах відносно малих проміжках часу. Саме цю взаємну нестійкість фазових траєкторій Г.В.Манучарян використала як критерій початку хаотичного поводження в динамічній системі.

Далі розглянемо графоаналітичний метод унаочнення на фазовій площині областей нестійкості фазових траєкторій рівняння Дуффінга

$$x'' + a\,x' - x + x^3 = f\cos\omega\, t \,. \quad (12)$$

при різних значеннях амплітуди зовнішнього впливу f.

На фазовій площині рівняння (12) виділимо область $0 \leq x \leq 1{,}6$; $0 \leq x' \leq 0{,}8$. Оберемо в цій області сітку з кроками $\Delta x = 1{,}6/M$, $\Delta x' = 0{,}8/M$, де M - дискретність растра. Нехай $\rho=10$, а $\Delta y_0=0{,}002$, $\Delta y'_0= 0$.

Вузли сітки обираються як початкові точки P_{ij} і Q_{ij} для деяких розв'язків $x^{(1)}(t)$ рівняння (12). Візьмемо також інші початкові точки, близькі до виділених точок, а саме, точки, де значення норми $\|\Delta x^{(0)}\|$ є досить малим. Розглянемо, відповідно, й інші розв'язки $x^{(2)}(t)$ (рис. 6). Порівнювати траєкторії, що виходять із близьких початкових точок, будемо користуючись критерієм (9).

Вважатимемо, що при $0 \leq t \leq T$ ці траєкторії взаємно нестійкі, якщо

$$\sup \|x^{(1)}(t) - x^{(2)}(t)\| \leq \rho \|\Delta x^{(0)}\|. \quad (13)$$

Для побудови на фазовій площині зображень областей стійкості чи нестійкості було складено Maple-програми.

На рис. 7 (ліворуч) темним кольором виділені початкові точки, які відповідають взаємно нестійким траєкторіям з використанням умови (13).

Було показано, що для обраної сітки в розглянутій області фазової площини для більших значень амплітуди f області нестійкості починають дуже швидко розширюватися. Це і є перехід до хаотичного поводження в системі (час обчислень *T*=75).

На кожному з рисунків рис. 7 в залежності від амплітуди зовнішнього впливу *f*, крім зображень областей нестійкості розв’язків, також показано і одержані в роботі фазові портрети розв’язку рівняння Дуффінга (праворуч).

В третьому розділі представлено можливе впровадження одержаних результатів дисертації для розрахунку коректорів жорсткості з проклацуванням. При цьому наголошується, що дисертація присвячена не технологічним питанням конструювання коректорів жорсткості, а лише *геометричним питанням* обґрунтуванню вибору їх раціональних параметрів.

В роботі показано, що у випадку малих початкових відхилень (коли $0<a<x_0$, $a\le x\le b$), для знаходження періоду *T* потрібно обчислити інтеграл

$$T = B\int_0^{\pi/2} \frac{\varphi(t)\,dt}{\sqrt{1-\lambda \sin^2 t}}; \tag{14}$$

де

$$\varphi(t) = \left[\left(\sqrt{L^2+a^2} + \sqrt{L^2+b^2+(a^2-b^2)\sin^2 t}\right)\left(\sqrt{L^2+b^2} + \sqrt{L^2+b^2+(a^2-b^2)\sin^2 t}\right)\right]^{1/2}; \; \lambda = \frac{b^2-a^2}{b^2}; \; B = \frac{\sqrt{2m\left(\sqrt{L^2+a^2}+\sqrt{L^2+b^2}\right)}}{b\sqrt{C_1(1+L)}}.$$

Період коливань (14) при $\lambda<1$ обчислюється на комп'ютері.

Використовуючи отримане рішення, в роботі було проаналізовано поводження системи в граничних випадках: $a\to 0$ і $a\to x_0$.

Так, при $a\to 0$ треба, щоб $b\to a_0$, $\lambda\to 1$. Для знаходження періоду можна рекомендувати асимптотичну формулу

$$T = A\ln\frac{4a_0}{a} + O\left(\frac{a^2}{a_0^2}\right), \tag{15}$$

де $A = \dfrac{2\left(1+\sqrt{L^2+a_0^2}\right)}{a_0}\sqrt{\dfrac{mL}{C_1(1+L)}}$.

З формули (15) видно, що при $a = 0$ рух втрачає періодичність, тобто $T = \infty$. Система залишається в положенні хиткої рівноваги $x=0$.

Якщо $a\to x_0$, то $b\to x_0$, $\lambda\to 0$ і вираз (15) має асимптотику

$$T = T_0 + O(\lambda^2) = \frac{2\pi\sqrt{m}}{x_0}\frac{\left(L^2+x_0^2\right)^{3/4}}{\left(C_1(1+L)\right)^{1/2}} + O(\lambda^2). \tag{16}$$

Характерно, що в цьому випадку $\lim\limits_{\lambda\to 0}(1/T)\neq 0,$ тобто частота коливань не прямує до нуля, а залишається скінченною величиною.

Для рівняння (3) при малих відхиленнях обчислення T зводиться до

$$T=\frac{2\sqrt{2}}{b\sqrt{\beta}}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{1-\xi^2\sin^2 t}}=\frac{2\sqrt{2}}{b\sqrt{\beta}}K(\xi), \tag{17}$$

де $K(\xi)$ — повний еліптичний інтеграл першого роду; $\xi^2=(b^2-a^2)/b^2;$ b — визначається знайденою формулою.

Перехід до спрощеного рівняння руху (3) дозволив виразити період коливань через еліптичний інтеграл.

У граничному випадку $a\to 0,\ \xi\to 1$ замість (17) можна використовувати асимптотичний вираз

$$T=\frac{2}{\sqrt{\alpha}}\ln\frac{4\sqrt{2\alpha/\beta}}{a}+O(a^2). \tag{18}$$

Так що при $a=0,\ T=\infty$ тобто рух осцилятора не відбувається. Він залишається в нестійкому рівноважному положенні $x=0$.

Якщо $a\to x_0$, то $\xi\to 0$ і для обчислення періоду з (17) одержуємо:

$$T=\frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha}}+O(\xi^2). \tag{19}$$

Як бачимо в граничних випадках перехід від рівняння (2) до рівняння (3) не змінює характеру руху. Вносяться лише кількісні похибки в опис процесу руху.

Результати розрахунків продемонструємо на приkладі коректора жорсткості, зображеного на рис. 1б, з параметрами: $C_1/C_2=6,\ L/\Delta=2,\ C_2/m=10$ $сек^{-2}$, $L=0{,}1$ *м.* Тоді обчислення для "точного" рівняння (2) дають наступні величини: $x_0/L=0{,}5154$; $a_0/L=0{,}75$; $\omega_0=4{,}0975$ $сек^{-1}$. Для рівняння типу Дуффінга (3) ці величини мають значення: $x_0/L=0{,}4714$; $a_0/L=2/3$; $\omega_0=4{,}4723$ $сек^{-1}$.

З метою одержання інформації про точність асимптотичних формул було проведено розрахунок частот коливань у околі нульових точок на множині кривих.

У таблиці наведено результати обчислення частот при малих початкових відхиленнях ($a\to 0$). У другий і третин колонках наведено значення відношень ω/ω_0, обчислених за формулами (14) і (15). Це точні й асимптотичні результати для рівняння (2). У четвертій й п'ятій колонках наведено точні й асимптотичні результати для рівняння (3). Вони отримані за формулами (17) і (18) .

Таблиця.

Значення ω/ω_0, отримані для малих a/l за формулами (14), (15), (17), (18)

a/l	По формулі (14)	По формулі (15)	По формулі (17)	По формулі (18)
0,005	0,372	0,379	0,386	0,368
0,01	0,416	0,425	0,434	0,434
0,02	0,472	0,484	0,495	0,495
0,03	0,515	0,526	0,54	0,54
0,04	0,545	0,562	0,576	0,577
0,05	0,573	0,592	0,608	0,61
0,07	0,621	0,645	0,662	0,666
0,1	0,68	0,713	0,73	0,738

Аналіз числових даних показує, що асимптотичні формули із прийнятною точністю описують залежність частот коливань від початкових відхилень і можуть бути використані в інженерних розрахунках.

Одержані результати були використані в ОАО "ПОЛІГРАФМАШ" при проектуванні системи захисту від вібрацій в механізмах поліграфічних машин, а також на Алчевському коксохімічному заводі при проектуванні системи віброізоляції кабіни керування коксовою батареєю.

ВИСНОВКИ

Дисертацію присвячено новому розв'язанню задачі геометричного моделювання та унаочненню у часі фазових траєкторій рівнянь типу Дуффінга в залежності від вхідних параметрів і початкових умов як математичного апарату дослідження процесу проклацування механічних конструкцій типу ферми Мезеса і орієнтованих на розробку конструкцій коректорів жорсткості.

Значення роботи для науки полягає у подальшому розвитку способів дослідження коливань в конструкціях механічних систем з проклацуванням за допомогою опису та аналізу розв'язку рівняння типу Дуффінга в залежності від вхідних параметрів і початкових умов.

Значення досліджень для практики полягає в скороченні термінів та підвищенні точності моделювання коливань, одержання адекватних моделей, що задовольняють заданим вимогам і прискорюють проектування виробів.

При цьому отримані результати, що мають науково-практичну цінність.

1. Виконано огляд механічних систем з ефектом проклацування, проаналізовано методи розв'язання рівнянь типу Дуффінга, з чого випливає необхідність унаочнення фазових траєкторій рівняння Дуффінга в залежності від вхідних параметрів в початкових умов.

2. Знайдено розв’язки рівняння Дуффінга та побудовано фазові траєкторії цього рівняння, суміщених з полем ізоклін, що дозволило прогнозувати форму та перебіг фазових траєкторій в залежності від початкових умов.

3. На основі знайдених розв’язків рівняння Дуффінга було досліджено їхню поведінку в залежності від початкових умов та в околі точки нестійкої рівноваги, що дозволило на графічному рівні пояснити причину проклацування механічних систем.

4. Досліджено вплив на розв’язок рівняння Дуффінга амплітуди сили зовнішнього збудження; що дозволило формалізувати аналіз процесу коливань систем з проклацуванням.

5. Розроблено графоаналітичний спосіб пошуку періодичних орбіт рівняння Дуффінга, що дозволило визначати параметри цього рівняння, які унеможливлять хаотичність їх розв’язків.

6. Розроблено спосіб визначення на фазовій площині областей стійкості хаотичних коливань, описаних рівнянням Дуффінга.

7. Розроблено спосіб побудови анімації зображень формоутворення фазових траєкторій рівняння Дуффінга в залежності від його параметрів, що дозволило унаочнити виявлення критичних значень параметрів.

8. Реалізація роботи виконана в ОАО “ПОЛІГРАФМАШ” при проектуванні системи захисту від вібрацій в механізмах поліграфічних машин, та на Алчевському коксохімічному заводі при проектуванні системи віброізоляції кабіни керування коксовою батареєю, а також в навчальному процесі НТУ „ХПІ”.

Основні положення дисертації опубліковано у таких роботах:

1. *Ольшанский В.П., Гринченко Е.Н.* Анализ параметров элемента вибро-защитной системы с квазинулевой жёсткотью. Информационные технологии: наука, техника, технология, образование, здоровье: Сборник научных трудов ХГПУ. Харьков: ХГПУ, 1998. - Вып. 6. Ч.1. - С. 111–114.

Особисто автором виконано аналіз конструктивних особливостей вібрузахисної системи з квазінульовою жорсткістю.

2. *Ольшанський В.П., Гринченко Е.Н.* О возможности применения системы с прощелкиванием для виброизоляции объектов пожарной техники // Проблемы пожарной безопасности. Харьков: ХИПБ, 1998.-Вып. 4-С.136–142.

Особисто автором виконано аналіз можливостей застосування систем з проклацуванням.

3. *Ольшанський В.П., Гринченко Е.Н.* О линеаризации при расчетах виброзащитных систем с квазинулевой жесткостью // Динамика и прочность машин. Харьков, ХГПУ, 1998. - Вып. 56 - С. 111–118.

Особисто автором виконано аналіз систем з квазінульовою жорсткістю.

4. *Драгун С.В. Гринченко Е.Н., Чернобай Г.А.* К вопросу оценки эффективности

виброзащитной системы с квазинулевой жесткостью // Проблемы пожарной безопасности. Харьков: ХИПБ, 1999. -Вып. 5 - С. 83–86.

Особисто автором виконано аналіз ефективності застосування систем з проклацуванням.

5. *Гринченко Е.Н.* К вопросу построения эффективной виброизоляции приборов системами с квазинулевой жесткостью. Информационные технологии: наука, техника, технология, образование, здоровье: Сборник научных трудов ХГПУ. Харьков: ХГПУ, 1999. - Вып. 7, Ч.1.— С. 274–276,

6. *Драгун С.В. Гринченко Е.Н., Чернобай Г.А.* О применении виброзащитной системы с квазинулевой жесткостью при действии на основание серии периодических воздействий ступенчатого характера // Проблемы пожарной безопасности.— Харьков: ХИПБ, 1999.-Вып.6.–С.42–45

Особисто автором виконано аналіз особливостей застосування систем з проклацуванням.

7. *Грінченко Є.М.* Геометричне моделювання динаміки системи рівнянь Лоренца // Геометричне та комп’ютерне моделювання – Харків: ХДУХТ, 2006. – Вип.14. – С. 139-149.

8. *Грінченко Є.М., Піксасов М.М.* Геометричне моделювання розв’язків диференціальних рівнянь типу Дуффінга // Геометричне та комп’ютерне моделювання – Харків: ХДУХТ, 2007. – Вип.16. – С. 146-153.

Особисто автором розроблено програму побудови фазових портретів диференціальних рівнянь типу Дуффінга.

9. *Гринченко Е.Н., Пиксасов М.М.* Использование уравнения Дуффинга для исследования виброзащитной системы с квазинулевой жесткостью // Геометричне та комп’ютерне моделювання – Харків: ХДУХТ, 2007. – Вип.17.–С. 268-277.

Особисто автором виконано аналіз особливостей застосування систем з проклацуванням на базі побудови фазових портретів диференціальних рівнянь типу Дуффінга.

10. *Грінченко Є.М., Ткаченко В.П.* Геометричне моделювання взаємної нестійкості фазових траєкторій неавтономного рівняння Дуффінга // Геометричне та комп’ютерне моделювання – Харків: ХДУХТ, 2007. – Вип.18. – С. 221-228.

Особисто автором розроблено програму побудови фазових портретів диференціальних рівнянь типу Дуффінга.

Грінченко Є. М. Геометричне моделювання розв’язків рівняння Дуффінга при розробці механічних систем із проклацуванням. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 05.01.01 – Прикладна геометрія, інженерна графіка. – Таврійська державна агротехнічна академія, Мелітополь, Україна, 2007.

Дисертацію присвячено новому розв’язанню задачі геометричного моделювання та унаочненню у часі розв’язків рівняння Дуффінга як математичного апарату дослідження процесу проклацування конструкцій типу ферми Мезеса. До головних результатів слід віднести метод розрахунку механічних систем з перескоками на прикладі конструкцій типу ферми Мезеса, складовими частинами якого є: подальший розвиток способу побудови на площині розв’язків рівняння Дуффінга суміщених з полем ізоклін; подальший розвиток способу дослідження розв’язків рівняння Дуффінга в залежності від початкових умов і в околі точки нестійкої рівноваги; подальший розвиток способу визначення періодичних орбіт аттрактора Дуффінга; розроблено різновиди анімації зображень формоутворення аттрактора Дуффінга.

Практична цінність дисертації полягає у можливості на її теоретичній базі впроваджувати в реальну практику моделювання механічних системи з проклацуванням, що дозволить вивчати цілий клас механізмів коливальної дії шляхом візуалізації фазових портретів диференціального рівняння Дуффінга. Ця інформація допоможе приймати рішення при конструюванні систем з проклацуванням. Реалізація роботи виконана у виробництві при проектуванні системи захисту від вібрацій в механізмах поліграфічних машин, та для віброізоляції кабіни керування, а також в навчальному процесі НТУ „ХПІ”, що підтверджується довідками про використання запропонованої методики.

Ключові слова: рівняння Дуффінга, ферма Мезеса, механізми з проклацуванням, фазовий портрет.

Гринченко Е. М. Геометрическое моделирование решений уравнения Дуффинга при разработке механических систем с прощелкиванием. - Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 05.01.01 - Прикладная геометрия, инженерная графика. – Таврийская государственная агротехническая академия, Мелитополь, Украина, 2007.

Диссертация посвящена новому решению задачи геометрического моделирования и визуализации во времени решений уравнения Дуффинга как математического аппарата исследования процесса прощелкивания конструкций типа фермы Мезеса. К главным результатам можно отнести метод расчета механических систем с перескоками на примере конструкций типа фермы Мезеса, составными частями которого есть: дальнейшее развитие способа построения на плоскости решений уравнения Дуффинга, совмещенных с полем изоклин; дальнейшее развитие способа исследования решений уравнения Дуффинга в зависимости от начальных условий и в окрестности точки неустойчивого равновесия; дальнейшее развитие способа определения периодических орбит аттрактора Дуффинга; впервые разработаны разновидности анимации изображений формообразования аттрактора Дуффинга.

На актуальность темы исследований указывает следующее. Для защиты объектов от динамических воздействий широко применяются виброзащитные системы, устанавливаемые между источником вибрации и изолируемым объектом. Наиболее распространенными из них являются упругие амортизаторы. В настоящее время существует большое число конструктивных разновидностей амортизаторов, предназначенных как для защиты приборов и оборудования, устанавливаемых на колеблющихся основаниях, так и для защиты оснований и фундаментов от динамических воздействий на них со стороны работающего оборудования. Создание амортизирующих устройств, способных защитить объекты от вибраций и ударов и, вместе с тем, обладающих ограниченными размерами, является сложной технической проблемой, правильное решение которой возможно только при всестороннем учете характера возмущений и конструктивных свойств амортизаторов.

В противоположность линейной виброизоляции, способной лишь смещать запретную область частот свободных колебаний и освобождать от нее сравнительно небольшой интервал частот рабочего режима, нелинейная виброизоляция дает возможность устранить данную запретную область, перекрывающую, возможно, несколько близко расположенных друг к другу рабочих режимов. При этом статическое смещение объекта и при нелинейной виброизоляции остается практически таким же, как и при линейной.

Отмеченное противоречие устранено в нелинейных виброзащитных системах с квазинулевой жесткостью. Их применение для виброизоляции объектов позволяет сохранить заданную несущую способность конструкции, а, следовательно, и ее габариты. При этом соответствующим выбором параметров система с квазинулевой жесткостью, ее приведенная жесткость остается близкой к нулю в границах допустимых деформаций, что позволяет сдвигать резонансные зоны объекта виброизоляции в область частот порядка единиц герц. Динамическое поведение изучаемых конструкций описывается амплитудно–частотными характеристиками.

Практическая ценность диссертации состоит в возможности на ее теоретической базе внедрять в реальную практику моделирования механических систем с прощелкиванием, что позволит изучать целый класс механизмов колебательного действия путем визуализации фазовых портретов дифференциального уравнения Дуффинга. Эта информация поможет принимать решение при конструировании систем с прощелкиванием.

Ключевые слова: уравнение Дуффинга, ферма Мезеса, механизмы с прощелкиванием, фазовый портрет.

Grinchenko E. M. Geometrical design of decisions of Duffing equalization at development of the mechanical systems with span-through. - the Manuscript.

Thesis on competition of a scientific degree of the candidate of engineering science on a specialty 05.01.01 - applied geometry, engineering graph. – The Tavria State Agrotechnical Academy, Melitopol, Ukraine, 2007.

Dissertation is devoted the new decision of task of geometrical design and visualization in time of decisions of Duffing equalization as a mathematical vehicle of research of process of span-through of constructions of type of Mezes farm. To the main results it is possible to deliver the method of calculation of the mechanical systems with span-through on the example of constructions of type of Mezes farm, component parts of which it is been: further development of method of construction on the plane of decisions of Duffing equalization, combined with the field of isoclines; further development of method of research of decisions of Duffing equalization a depending on initial conditions and in neighbouring of point of unsteady equilibrium; further development of method of determination of periodic orbits of Duffing attractor; the varieties of animation of representing form of Duffing attractor are first developed.

The practical value of dissertation consists of possibility on its theoretical base to inculcate in the real practice the designs of the mechanical systems with span-through, that will allow to study the whole class of mechanisms of swaying action by visualization of portraits of phases of Duffing differential equalization. This information will help to make decision at constructing of the systems with span-through.

Keywords: Duffing equalization, Mezes farm, mechanisms with span-through, phase portrait.

Підписано до друку 14.08.2007 р. Формат 60х80 1\16 Друк. ризограф.

Ум. друк. арк. 1,25 Наклад 100 Вид. № Зам. №

УЦЗ України, 61023, м. Харків, вул. Чернишевського, 94.