

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»**

**ДАРІА ЗАДЕ САЇД**



УДК 539.3

**ДВОРІВНЕВИЙ ПІДХІД ДО ДОСЛІДЖЕННЯ КОНЦЕНТРАЦІЇ  
НАПРУЖЕНЬ В КОМПОЗИТНИХ ПЛАСТИНАХ З ОТВОРАМИ**

Спеціальність 05.02.09 – динаміка та міцність машин

Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня  
кандидата технічних наук

Харків–2016

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано на кафедрі динаміки та міцності машин Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут» Міністерства освіти і науки України.

**Науковий керівник:** доктор технічних наук, професор  
**Львов Геннадій Іванович,**  
Національний технічний університет  
«Харківський політехнічний інститут»,  
завідувач кафедри динаміки та міцності машин

**Офіційні опоненти:** доктор технічних наук, професор  
**Верещака Сергій Михайлович,**  
Сумський державний університет,  
професор кафедри опору матеріалів і машинознавства

доктор технічних наук, професор  
**Шупіков Олександр Миколайович,**  
Інститут проблем машинобудування  
ім. А.М. Підгорного, головний науковий  
співробітник відділу формоутворення  
в машинобудуванні

Захист відбудеться «15» червня 2016 р. о 14<sup>30</sup> годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 64.050.10 у Національному технічному університеті «Харківський політехнічний інститут» за адресою: 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут» за адресою: 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21.

Автореферат розісланий 12 травня 2016 р.

Вчений секретар  
спеціалізованої вченої ради



Сукіасов В.Г.

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** Сучасне виробництво конструкцій різного призначення нерозривно пов'язане з розробкою різноманітних композиційних матеріалів, що дозволяє розширити можливості створюваних машин та механізмів і отримати значне покращання цілого ряду важливих параметрів: зниження маси, збільшення міцності, зносостійкості, підвищення опору різним діям та ін. Це досягається завдяки тому, що властивості композиційного матеріалу можуть кардинально відрізнитися від властивостей його складових. Тому сфера застосування композиційних матеріалів практично не обмежена. Вони використовуються в машинобудуванні, суднобудуванні, виробництві літальних апаратів, військовій та побутовій техніці, легкій промисловості. Все це свідчить про доцільність досліджень композитів, а також про удосконалення розробки спеціалізованих методів оцінки їх міцності при експлуатації. Одним із суттєвих факторів, що впливають на міцність, є концентрація напружень.

Концентрація напружень в елементах конструкцій викликається неоднорідністю геометричної форми та структури матеріалу. Для виробів із композиційних матеріалів ці два види концентрації найчастіше суттєво відрізняються характерними розмірами зон, на які поширюється концентрація напружень.

Окрему область в проблемі міцності машин складають методи оцінки різних характеристик конструкційних елементів з композитів, серед яких поширені конструкції з отворами. До таких задач можна віднести оцінку міцності отворів і вирізів в тонкостінних панелях. Таким чином розробка нових ефективних спеціалізованих теоретичних методів визначення напружено-деформованого стану виробів з композитних матеріалів є актуальною науково-практичною задачею динаміки та міцності машин, що визначило напрямок досліджень.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертаційна робота виконувалася на кафедрі динаміки і міцності машин НТУ «ХП» згідно плану фундаментальних і прикладних науково-дослідних робіт МОН України: «Розробка теоретичних основ і методів рішення задач забезпечення міцності та надійності високонавантажених елементів машинобудівних конструкцій» (ДР № 0112U000403), «Розробка математичних моделей і методів рішення нелінійних задач динаміка та міцності елементів конструкцій при дії квазістатичних, динамічних та ударних навантажень» (ДР № 0115U000509), де здобувач був виконавцем окремих завдань, та згідно європейського гранту «Innovative nondestructive testing and advanced composite repair of pipelines with volumetric surface defects» № PIRSES-GA-2012-318874 в рамках 7-ої рамкової програми Європейського союзу в НТУ «ХП».

**Мета і задачі дослідження.** Метою дослідження є вдосконалення методів та моделей для аналізу пружних властивостей композиційних матеріалів, а також у визначенні концентрації макро- і мікронапружень для армованих пластинок, послаблених отворами. Для досягнення вказаної мети поставлені наступні задачі:

– обґрунтувати розміри мінімально необхідних представницьких осередків та крайові умови, для моделювання поведінки композиту в умовах проведення базових експериментів;

– розробити методику обчислення ефективних пружних сталей для ортогонально армованих композитів та отримати результати з точністю, достатньою для практичного застосування;

– провести дослідження макроконцентрації напружень в ортотропних пластинках, послаблених отворами, для різних видів композиційних матеріалів в широкому діапазоні зміни коефіцієнтів заповнення; перевірити достовірність результатів, отриманих методом функцій комплексної змінної і методом скінченних елементів шляхом їх порівняння;

– побудувати моделі представницького осередку односпрямовано й ортогонально армованого волокнистого композиту для визначення коефіцієнтів мікроконцентрації напружень і провести аналіз міцності композитних пластин, послаблених отворами;

– провести дослідження мікроконцентрації напружень в композитних пластинах з отворами для ортогональної та гексагональної схем армування в широкому діапазоні зміни коефіцієнтів заповнення і проаналізувати міцність таких пластин;

– провести експериментальне дослідження концентрації напружень поблизу контуру отворів композитної пластинки і виконати порівняння отриманих результатів з теоретичними.

*Об'єктом дослідження* є міцність композиційних пластинок з отворами в умовах концентрації макро- і мікронапружень.

*Предметом дослідження* є моделі представницького осередку періодичної структури композиційного матеріалу для розв'язання задачі визначення пружних сталей матеріалу, що забезпечують оцінку міцності композитної пластинки з отворами при різних видах навантаження.

**Методи дослідження.** Достовірність результатів і висновків дисертації забезпечена використанням наступних методів дослідження:

– аналіз розподілу макронапружень в анізотропній пластинці з отворами ґрунтувався на застосуванні методу функції комплексної змінної для плоскої задачі теорії пружності;

– метод скінченних елементів використовувався для аналізу структури композиційних матеріалів при визначенні пружних ефективних властивостей, для визначення напруженого стану в анізотропній пластинці з отворами, а також для дослідження концентрації мікронапружень з урахуванням концентрації макронапружень біля отворів з метою оцінки міцності конструкції;

– концентрація макронапружень оцінювалася шляхом експериментальних випробувань зразків на розтягування і вимірювання деформації засобами тензометрії.

Комп'ютерні обчислення проводилися в програмному комплексі ANSYS і пакеті символічних обчислень Maple ver. 16.

**Наукова новизна одержаних результатів** полягає в тому, що в роботі запропонований перспективний дворівневий підхід для оцінки пружних властивостей композиту і концентрації мікронапружень в армованій пластинці, а саме:

– розроблена методика числового розв'язання задачі напруженого стану в представницькому осередку композиту, що дає можливість визначити ефектив-

ні пружні характеристики композиційних матеріалів та міцність пластин, послаблених отворами;

- вдосконалені моделі для визначення розподілу напружень в ортотропній пластинці з однаковими отворами при різних видах навантаження;

- побудовані моделі представницького осередку структури композиту для дослідження напружено-деформованого стану з урахуванням умов симетрії;

- отримані числові результати за допомогою методу скінченних елементів для визначення концентрації макронапружень при різних видах навантаження на пластинку, а також значення коефіцієнтів концентрації мікронапружень, що дозволило визначити закономірності концентрації макро- і мікронапружень в пластинках зі схемами тетрагонального та гексагонального армування при різних значеннях коефіцієнтів об'ємного вмісту волокон, що є суттєвим для оцінки міцності;

- отримані нові експериментальні дані о концентрації макронапружень в пластинці з одним, двома та трьома отворами, що дозволило обґрунтувати достовірність результатів, одержаних теоретичними і числовими методами.

**Практичне значення одержаних результатів** для машинобудування полягає в розробці методики визначення пружних постійних характеристик міцності армованих волокнистих композитів, які мають важливе значення для машинобудівної галузі. Вирішені практичні задачі визначення властивостей та міцності композиційних матеріалів, що дозволяє зменшити обсяг трудомістких експериментальних досліджень.

Розв'язаний ряд важливих науково-технічних задач міцності з визначення мікроконцентрації напружень з урахуванням макронапружень біля отворів для анізотропних пластин. Результати можна застосувати при проектуванні та виробництві деталей авіаційних і інших сучасних конструкцій з композиційних матеріалів.

Результати досліджень упроваджені в практику науково-дослідних і проектних робіт в ході виконання європейського гранту «Innovative nondestructive testing and advanced composite repair of pipelines with volumetric surface defects» № PIRSES-GA-2012-318874 в рамках 7-ої рамкової програми Європейського союзу в НТУ «ХП».

**Особистий внесок здобувача.** Всі наукові положення, методи та результати досліджень, які виносяться на захист, отримані здобувачем особисто. Виконано аналіз міцності представницького осередку для визначення пружних властивостей композиційних матеріалів; проведено розрахунки в програмному комплексі ANSYS для відпрацювання методики числового аналізу задачі плоского напруженого стану для пластинки з отвором; виконано розрахунки концентрації макро- і мікронапружень поблизу отвору армованої пластинки при різних видах навантажень. Проведено експерименти з визначення макроконцентрації напружень в композиційній пластинці з отворами.

**Апробація результатів дисертації.** Основні положення дисертаційної роботи доповідалися й обговорювалися на Міжнародних науково-практичних конференціях «Інформаційні технології: наука, техніка, технології, освіта, здоров'я» (Мікро CAD, м. Харків, 2010, 2012, 2013, 2015 pp.).

**Публікації.** Основні наукові положення і матеріали за темою дисертаційної роботи викладені в 18 наукових роботах, включаючи 8 наукових статей у фахових виданнях України, 6 публікацій – в зарубіжних періодичних фахових виданнях, 4 – в матеріалах конференцій.

**Структура й обсяг дисертації.** Дисертаційна робота складається зі вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел, додатків. Загальний обсяг дисертації становить 200 сторінок, з них 30 рисунків по тексту, 37 рисунки на 26 окремих сторінках, 20 таблиць по тексту, 3 таблиці на 1 окремій сторінці, список використаних джерел з 184 найменувань на 19 сторінках, 4 додатки на 13 сторінках.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтована актуальність і доцільність дисертації, сформульована її мета і задачі, визначений об'єкт, предмет та дослідницькі методи, наукова новизна і практична значущість роботи.

**Перший розділ** присвячений опису методів визначення й дослідження пружних властивостей композиційних матеріалів, а також критеріїв міцності. Опис методів базується на традиційному розділенні на теоретичний, експериментальний і комбінований напрями. Вагомий внесок в розробку методів визначення пружних властивостей композиційних матеріалів внесли такі вчені, як Дж. Ешелбі, З. Хашин, Г. А. Ванін. Особлива увага приділена енергетичним і числовим методам. Серед числових методів найбільш перспективним для досліджуваної проблеми є метод скінченних елементів. Перераховані типові моделі, проаналізована адекватність і ефективність їх використання для оцінки міцності односпрямованих композитів з різними типами неоднорідних включень.

Розв'язання задачі про розподіл напружень в анізотропних гомогенних пластинах з отворами базується на використанні теорії функцій комплексного змінного.

Для випадку анізотропного матеріалу функція напружень плоскої задачі  $F$  уперше була отримана С. Г. Лехніцким. Функція  $F$  повинна задовольняти диференційному рівнянню відносно декартових координат

$$a_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - 2a_{26} \frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial y} + (2a_{12} + a_{66}) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} - 2a_{16} \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y^3} + a_{11} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0. \quad (1)$$

де  $a_{ij}$  – коефіцієнти податливості.

Вказано на покращення відомих моделей композитів і підходів до дослідження їх пружних характеристик у напрямі числового моделювання. На основі цього аналізу проведено обґрунтування й уточнення цілей роботи.

**Другий розділ** присвячений опису методики числового визначення ефективних пружних констант композиційних матеріалів, поширених схем армування, підходів до визначення пружних властивостей односпрямовано армованих композитів. Фізичні залежності для анізотропного матеріалу в загальному випадку анізотропії мають вигляд:

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = A_{ijkl} \langle \sigma_{kl} \rangle, \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3), \quad (2)$$

де  $A_{ijkl}$  – пружні постійні еквівалентного гомогенного матеріалу;  $\langle \sigma_{ij} \rangle$ ,  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$  – середні значення напружень і деформацій.

Досліджено чотири схеми армування: тетрагональна (рис. 1, б), гексагональна (рис. 1, в), ортогональна (рис. 2, а), 3D-ортогональна (рис. 2, б) і тканинна (рис. 2, в).

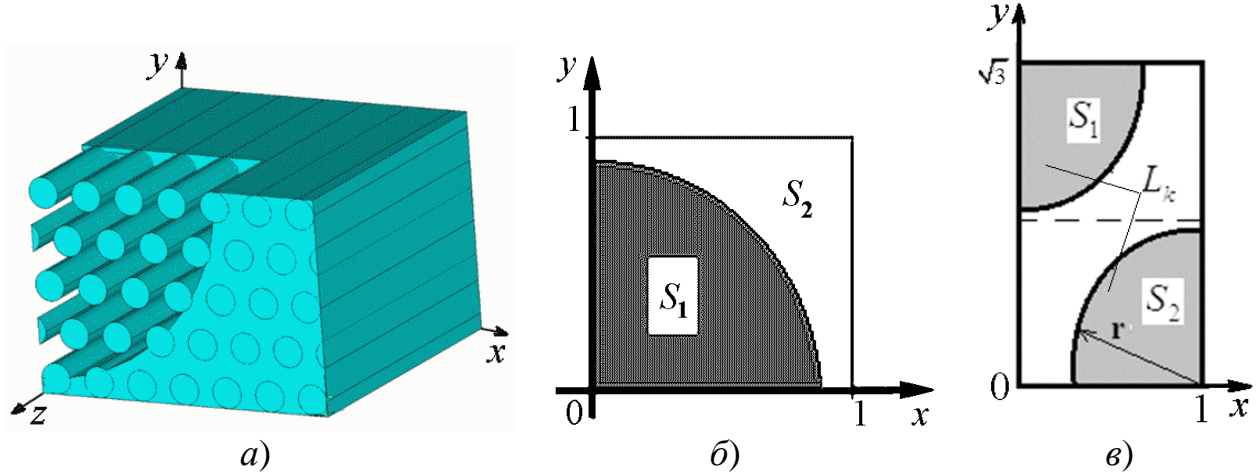


Рисунок 1 – Схема односпрямованого армування композиту (а); представницький осередок тетрагона (б); гексагональний представницький осередок (в)

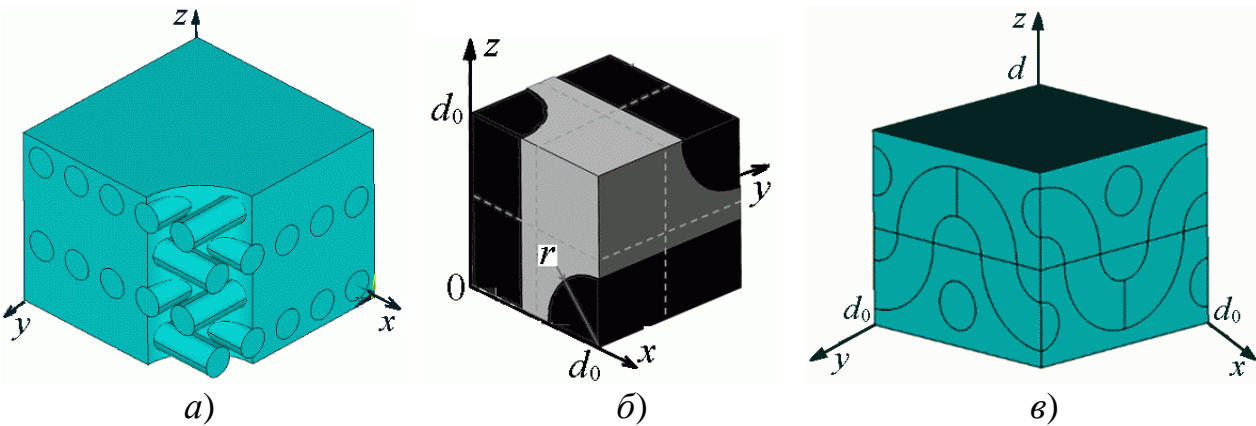


Рисунок 2 – Схема армування композиту ортогональна (а); 3D-ортогональна (б); тканинна (в)

Для знаходження еквівалентних пружних сталей односпрямовано армованих композитів виконується аналіз узагальненого плоского деформованого стану. Числовими експериментами моделюються чотири випадки деформації одноосного розтягування в напрямках  $x$ ,  $z$  і зсуву в площинах  $xy$ ,  $yz$ .

У системі ортогональних декартових координат, яка співпадає з площинною симетрією гомогенного ортотропного матеріалу, закон Гука має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_x \rangle &= b_{11} \langle \varepsilon_x \rangle + b_{12} \langle \varepsilon_y \rangle + b_{13} \langle \varepsilon_z \rangle; & \langle \sigma_y \rangle &= b_{21} \langle \varepsilon_x \rangle + b_{22} \langle \varepsilon_y \rangle + b_{23} \langle \varepsilon_z \rangle; \\ \langle \sigma_z \rangle &= b_{31} \langle \varepsilon_x \rangle + b_{32} \langle \varepsilon_y \rangle + b_{33} \langle \varepsilon_z \rangle; \\ \langle \tau_{xy} \rangle &= b_{44} \langle \gamma_{xy} \rangle; & \langle \tau_{yz} \rangle &= b_{55} \langle \gamma_{yz} \rangle; & \langle \tau_{zx} \rangle &= b_{66} \langle \gamma_{zx} \rangle. \end{aligned} \quad (3)$$

Тут  $b_{ij}$  – пружні сталі еквівалентного гомогенного матеріалу.

Наведено розроблені методики числового визначення ефективних пружних сталих  $b_{ij}$  односпрямовано армованих волокнистих композитів. Для різних типів армування виділені мінімально необхідні представницькі осередки і сформульовані крайові умови для них. Визначення пружних постійних  $b_{ij}$  при схемі тетрагона і гексагонального армування виконано на основі двовірних моделей поперечних перетинів представницьких об'ємів. Дослідження ортогональних, 3D-ортогональних і тканинних схем армування виконано на основі тривимірних моделей. Проведена оцінка достовірності отриманих результатів. Перевагою розробленого підходу є можливість досліджувати локальну концентрацію напружень в області представницького осередку.

Досліджено чотири різні ортотропні матеріали при наступних механічних властивостях компонентів (табл. 1). Надалі величини, що належать до матриці, позначаються індексом  $m$ , до волокна – індексом  $a$ . У табл. 2 подані пружні властивості односпрямованих композитів структури тетрагона при коефіцієнті заповнення  $\zeta = 0,488$ .

Таблиця 1 – Механічні властивості матриці і волокон композиційних матеріалів

Номер матеріалу	$G_a / G_m$	$E_m$ , ГПа	$G_m$ , ГПа	$\nu_m$	$E_a$ , ГПа	$G_a$ , ГПа	$\nu_a$
I	2,49	100	38,1	0,31	250	94,76	0,32
II	20,6	4,2	1,5	0,4	74,8	31	0,2
III	28,4	2,5	0,947	0,32	70	26,9	0,3
IV	68,48	3,5	1,32	0,32	235	90,4	0,3

Таблиця 2 – Ефективні пружні сталі композитів

Номер матеріалу	Модуль пружності, ГПа			Модуль зсуву, ГПа			Коефіцієнт Пуассона		
	$E_x$	$E_y$	$E_z$	$G_{xy}$	$G_{xz}$	$G_{yz}$	$\nu_{xy}$	$\nu_{yz}$	$\nu_{xz}$
I	156,9	156,9	173,5	53,80	58,13	58,13	0,269	0,28	0,28
II	18,05	18,05	43,84	4,1	4,9	4,9	0,32	0,29	0,29
III	6,35	6,35	35,42	1,78	2,52	2,52	1,55	0,308	0,308
IV	9,22	9,22	116,4	2,54	3,67	3,67	1,68	0,308	0,308

За даною методикою проведений розрахунок ефективності пружних характеристик склопластика при варіюванні коефіцієнта об'ємного вмісту. Викладений в роботі підхід дозволяє полегшити проведення розрахунків конструкцій із застосуванням нових матеріалів на стадії проектування.

У **третьому розділі** наведено дослідження макроконцентрації напружень в пластинках з композиційних матеріалів, яке базується на використанні функцій комплексного змінного. Як окремі випадки досліджені випадки напруженого стану пластинки з одним, двома та нескінченним рядом отворів. Для аналізу макроконцентрації напружень в пластинці з отворами композиційний матеріал розглянутий як гомогенний, еквівалентний ортотропному матеріалу.

У випадку, якщо анізотропний матеріал має три площини пружної симетрії, рівняння плоскої задачі теорії пружності ортотропного тіла має вигляд



$$a_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + (2a_{12} + a_{66}) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + a_{11} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad (4)$$

при врахуванні відповідних граничних умов.

Загальний інтеграл (4) залежить від коренів характеристичного рівняння

$$a_{11}\mu^4 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 + a_{22} = 0 \quad (5)$$

і у разі нерівних коренів має вигляд

$$F = F_1(x + \mu_1 y) + F_2(x + \mu_2 y) + F_3(x + \bar{\mu}_1 y) + F_4(x + \bar{\mu}_2 y). \quad (6)$$

При використанні технічних постійних пружності  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $F_{xy}$ ,  $\nu_{xy}$ , рівняння (5) для ортотропної пластинки виглядає як

$$\mu^4 + \left( \frac{E_x}{G_{xy}} - 2\nu_{xy} \right) \mu^2 + \frac{E_x}{E_y} = 0. \quad (7)$$

Корені характеристичного рівняння (7) залежать від пружних сталей:

$$\mu_k (k=1, \dots, 4) = \begin{cases} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{\frac{E_x}{E_y} - \left( \frac{E_x}{2G_{xy}} - \nu_{xy} \right)} + \frac{i}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{\frac{E_x}{E_y} - \left( \frac{E_x}{2G_{xy}} - \nu_{xy} \right)}, \\ \text{якщо } \sqrt{\frac{E_x}{E_y}} > \frac{E_x}{2G_{xy}} - \nu_{xy}, \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \left( (-1)^{k-1} \sqrt{\left( \frac{E_x}{2G_{xy}} - \nu_{xy} \right)} - \sqrt{\frac{E_x}{E_y}} + \sqrt[4]{\frac{E_x}{E_y} - \left( \frac{E_x}{2G_{xy}} - \nu_{xy} \right)} \right), \\ \text{якщо } \sqrt{\frac{E_x}{E_y}} < \frac{E_x}{2G_{xy}} - \nu_{xy}. \end{cases} \quad (8)$$

Якщо позначити корені рівняння (5)  $\mu_k$  ( $k=1 \dots 4$ ), тоді:

$$\mu_1 = \alpha_1 + i\beta_1; \quad \mu_2 = \alpha_2 + i\beta_2; \quad \mu_3 = \alpha_1 - i\beta_1; \quad \mu_4 = \alpha_2 - i\beta_2,$$

де  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  – дійсні сталі, причому можна включити додаткові умови, які передбачають нерівності  $\beta_1 > 0$  і  $\beta_2 > 0$ .

Оскільки  $F(x, y)$  є дійсна функція від  $x$  і  $y$ , то, позначивши

$$z_1 = x + \mu_1 y = x + \alpha_1 y + i\beta_1 y; \quad z_2 = x + \mu_2 y = x + \alpha_2 y + i\beta_2 y, \quad (9)$$

розв'язок (6) представляється як

$$F(x, y) = F_1(z_1) + F_2(z_2) + \overline{F_1(z_1)} + \overline{F_2(z_2)}, \quad (10)$$

де  $F_1(z_1)$  і  $F_2(z_2)$  – дві аналітичні функції своїх аргументів.

Похідні від функції комплексних змінних позначені так:

$$\frac{dF_1}{dz_1} = \varphi_1(z_1); \quad \frac{dF_2}{dz_2} = \varphi_2(z_2). \quad (11)$$

При підстановці в (4) функцію напруження  $F(x, y)$  із (11), виходять спільні вирази для компонентів напруження через похідні двох аналітичних функцій  $\varphi_1(z_1)$  і  $\varphi_2(z_2)$ :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2\operatorname{Re}[\mu_1^2 \varphi_1'(z_1) + \mu_2^2 \varphi_2'(z_2)]; & \sigma_y &= 2\operatorname{Re}[\varphi_1'(z_1) + \varphi_2'(z_2)]; \\ \tau_{xy} &= -2\operatorname{Re}[\mu_1 \varphi_1'(z_1) + \mu_2 \varphi_2'(z_2)]. \end{aligned} \quad (12)$$

Розроблена програма в системі комп'ютерної алгебри Maple для виконання всіх обчислювальних процедур і аналітичних перетворень, необхідних для отримання числових результатів: знаходження комплексного кореня характеристичних рівнянь, представлення голоморфних функцій  $F_1(z_1)$  і  $F_2(z_2)$  для пластин з різною кількістю отворів, розв'язання систем алгебраїчних рівнянь і представлення результатів в різних системах координат.

Виконані дослідження макроконцентрації напружень для різних видів композиційних матеріалів в широкому діапазоні зміни коефіцієнтів заповнення. На основі (12) отримані вирази для визначення концентрації напружень в ортотропній пластинці, яка навантажена розтягуючим зусиллям і має один, два або нескінченний ряд кругових отворів. Як інтегральна характеристика значення навантаження вводиться коефіцієнт макроконцентрації напружень на контурі отвору

$$K_1 = \sigma_{\theta\max}/p, \quad (13)$$

де  $\sigma_{\theta\max}$  – найбільше окружне напруження на контурі отвору пластинки,  $p$  – розтягуюче напруження по краю пластинки, прикладене під кутом  $\varphi$  до головного напрямку.

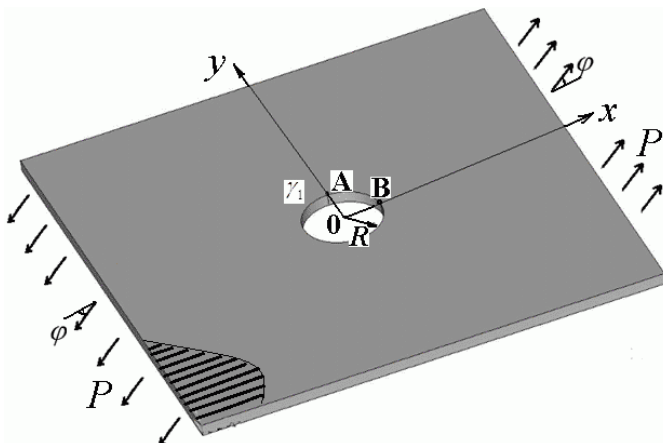


Рисунок 3 – Ортотропна армована пластинка з одним отвором

У випадках досліджень пластинки з одним отвором армовані волокна знаходяться уздовж осі  $x$  (рис. 3). На рис. 4, *a* показані залежності коефіцієнтів макроконцентрації напружень  $K_1$  від безрозмірного радіусу волокон  $a$  в односпрямовано армованій пластинці при одновісному розтягуванні уздовж осей  $x$  і  $y$ . Отримані результати приведені для чотирьох пластинок з композитів з тетрагональної і гексагональної структурах, при різних схемах навантаження (рис. 4). На рис 4, *в*

показані графіки макронапружень при різних значеннях  $a$  для чотирьох армованих пластинок тетрагональної і гексагональної структур при дії рівномірного нормального тиску на контурі отвору.

З аналізу представлених на рис. 4 графічних залежностей зроблено висновок про те, що значення коефіцієнта концентрації макронапружень при розтягуванні пластинки збільшуються зі збільшенням радіусу волокна (або збільшенні коефіцієнта об'ємного змісту  $\xi$ ). Визначено також, що значення макронапружень в тетрагональній структурі є меншими, ніж в гексагональній структурі.

Аналогічні дослідження виконані для інших видів композиційних матеріалів в широкому діапазоні зміни коефіцієнтів заповнення. Шляхом числових експериментів досліджена збіжність методу редукції для нескінченних систем алгебраїчних рівнянь для пластин з одним отвором і вплив зближення отворів на збіжність для пластин з декількома отворами. Для перевірки достовірності розв'язань виконано порівняння результатів, отриманих методом функцій ком-

плексного змінного і методом скінченних елементів та отримане розходження не більше 3-4 %.

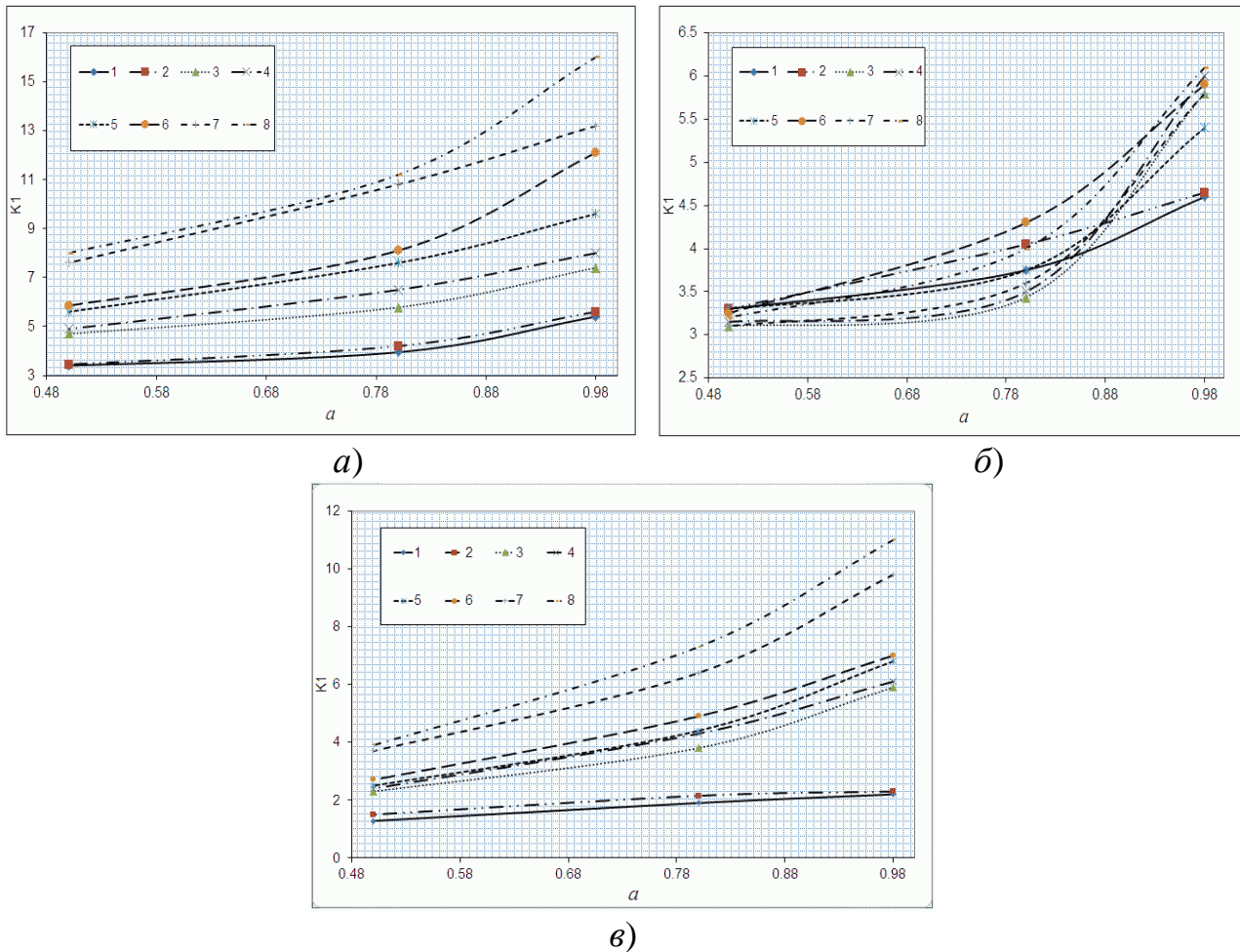


Рисунок 4 – Концентрація напружень при розтягуванні уздовж осі  $x$  (а); розтягуванні уздовж осі  $y$  (б); нормальному тиску на контурі отвору (в).  
Номери ліній 1, 3, 5 і 7 відповідають матеріалам I, II, III і IV тетрагональної структури; 2, 4, 6 і 8 – номери ліній для матеріалів I, II, III і IV гексагональної структури

У четвертому розділі наведені результати досліджень мікроконцентрації напружень в ортотропних пластинках з композиційних матеріалів. Для оцінки міцності проаналізовано випадки для пластинки з одним круглим отвором з розтягуючим навантаженням впродовж і перпендикулярно напрямку армування. Для аналізу мікроконцентрацій розглядаються призматичні об'єми з поперечними перетинами, які показані на рис. 5.

Як перший випадок дослідження мікроконцентрації вибрано розтягування пластини уздовж лінії армування рівномірним розтягуючим навантаженням  $p = 1$ . Визначено, що в цьому випадку максимальним макронапруженням є окружне напруження  $\sigma_{\theta_{\max}}$  в точці А (рис. 5), такий представницький осередок перебуває в умовах узагальненого плоского деформованого стану (опція ANSYS – Generalization plane strain).

Розтягуюче зусилля визначається окружним макронапруженням і площею поперечного перетину призматичного елемента

$$N = \sigma_{\theta_{\max}} \cdot S. \quad (14)$$

Для тетрагонального армування представницький осередок має площу  $S = 1$ , для гексагонального армування  $S = \sqrt{3}$ . Величини постійних переміщень  $v_0, w_0, v_1$  і  $w_1$  мають бути такими, щоб забезпечувати відсутність нормальних макронапружень, тобто  $\langle \sigma_z \rangle = \langle \sigma_y \rangle = 0$  (див. рис. 5).

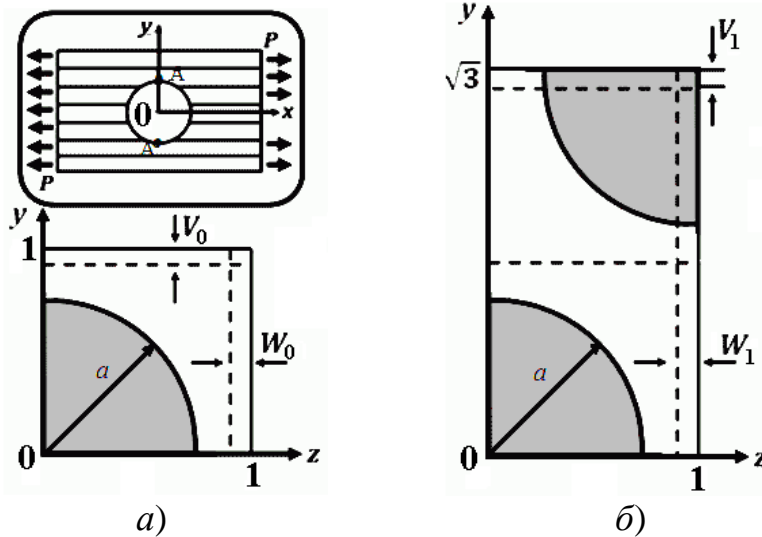


Рисунок 5 – Представницькі осередки для тетрагональної та гексагональної структур композиту

Коефіцієнт концентрації мікронапружень обчислювався як відношення максимального еквівалентного напруження до середнього розтягуючого напруження  $\sigma_{\theta_{\max}}$ , що задавалося за наслідками розв'язання задачі про концентрацію макронапружень,

$$K_2 = \sigma_{\max}^{\text{Mises}} / \sigma_{\theta_{\max}}. \quad (15)$$

Запропоновані обчислювальні методики оцінки мікроконцентрації напруження і концентрації повного напруження в композиті реалізовані за допомогою пакета ANSYS.. Повне напруження в пластинці з композиту визначається за формулою

$$K = K_1 \cdot K_2, \quad (16)$$

де  $K_1, K_2$  – коефіцієнти макро- і мікроконцентрації напружень.

У разі одноосного розтягування одспрямовано армованої пластинки тетрагональної і гексагональної структури уздовж лінії армування, результати розрахунків коефіцієнтів мікроконцентрації напруження  $K_2$  для різних значень радіусу волокна  $a$  показані на рис. 6, а. На рис. 6, б показані коефіцієнти мікроконцентрації при одноосному розтягуванні пластини рівномірним навантаженням перпендикулярно до лінії армування. На рис. 6, б приведений коефіцієнт концентрації при рівномірному тиску на контурі круглого отвору ортотропної нескінченної пластинки.

На рис. 7 приведені криві залежностей концентрації повного напруження від радіусу волокна  $a$  для трьох видів навантажень на пластинці.

Як видно з рис. 6, 7, мікронапруження і повне напруження при розтягуванні пластинки з отворами зменшуються зі збільшенням  $a$ . Ці результати пока-

зують, що криві залежностей напруження для тетрагональної структури відрізняються від аналогічних для гексагональної структури композиту. Визначено, що значення мікронапружень в гексагональній структурі є меншими, ніж в тетрагональній. Результати обчислення макронапружень можуть бути безпосередньо використані для знаходження руйнівних навантажень шляхом застосування відомих критеріїв міцності композиційних матеріалів. Крім того, у роботі виконано дослідження граничного навантаження  $p_{пр}$  за результатами аналізу розподілу напружень у межах представницького осередку. Критерієм міцності волокна є умова досягнення інтенсивністю напружень за фон Мізесом  $\sigma_i$  межі міцності, а в композитах з полімерною матрицею умовою руйнування є досягнення еквівалентним напруженням  $\sigma_{02}$  межі пружності: для волокна  $\sigma_{02} = 560$  МПа, для матриці –  $\sigma_{02} = 41$  МПа.

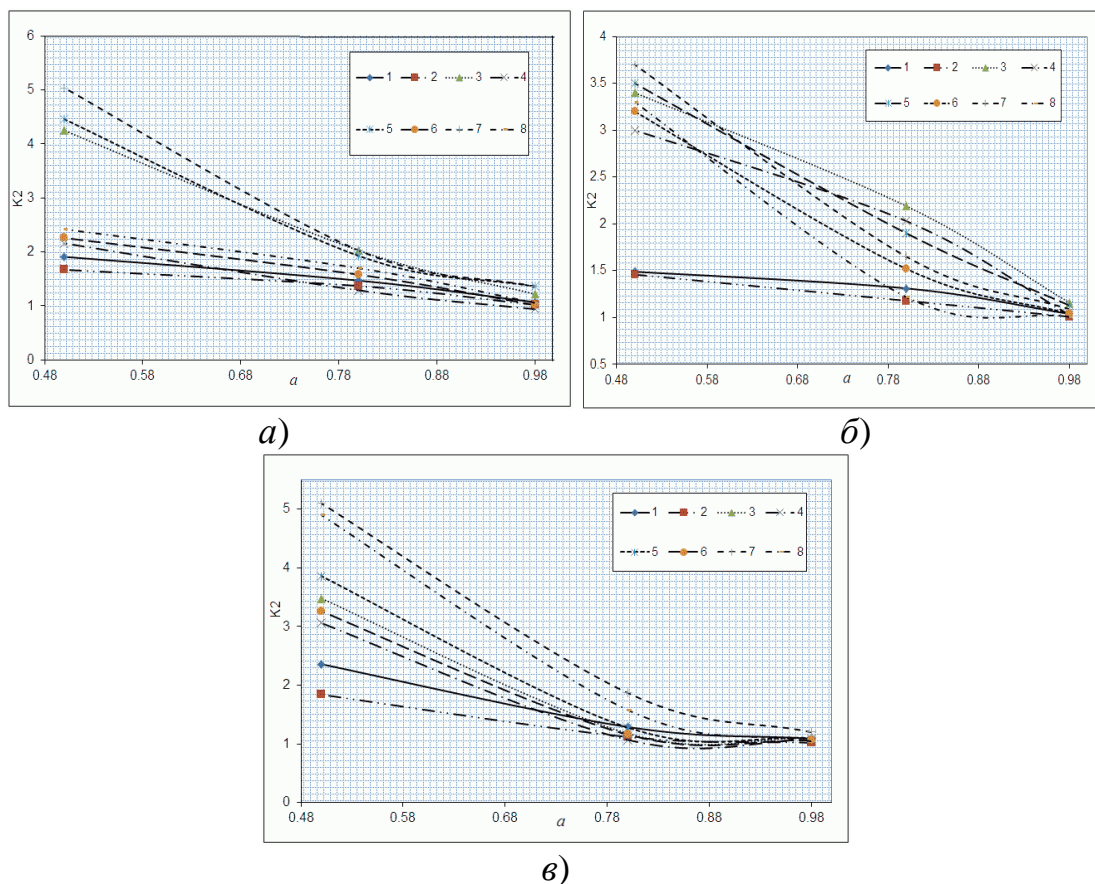


Рисунок 6 – Залежність концентрації мікронапружень від радіуса волокна

Результати обчислень представлені в табл. 3, де 1 – пластинка тетрагональної структури; 2 – гексагональної при поперечному розтягуванні; 3 – тетрагональної; 4 – гексагональної; 5 – ортогональної структури.

**П'ятий розділ** містить викладення результатів експериментальних досліджень напружено-деформованого стану пластинки зі склопластика з круговими отворами, які проводилися у Технічному університеті Малеке-Аштар (м. Тегеран, Іран). Для дослідження застосовуються засоби тензометрії. Розділ містить опис експериментальної установки, методики виконання вимірювань, порівняння теоретичних і експериментальних результатів (рис. 8), описані зразки склопластикових пластин СТЕФ-1, з одним, двома і трьома отворами. Спеціа-



льна система затискачів дозволяє створювати однорідний напружений стан поза зоною концентрації напруги, обумовленої наявністю отворів.

Розрахункові та експериментальні величини коефіцієнтів макроконцентрації напруження  $K$  у точці поблизу отворів для ортогонально-армованих пластинок зі склопластика з одним, двома і трьома круговими однаковими отворами приведені в табл. 4.

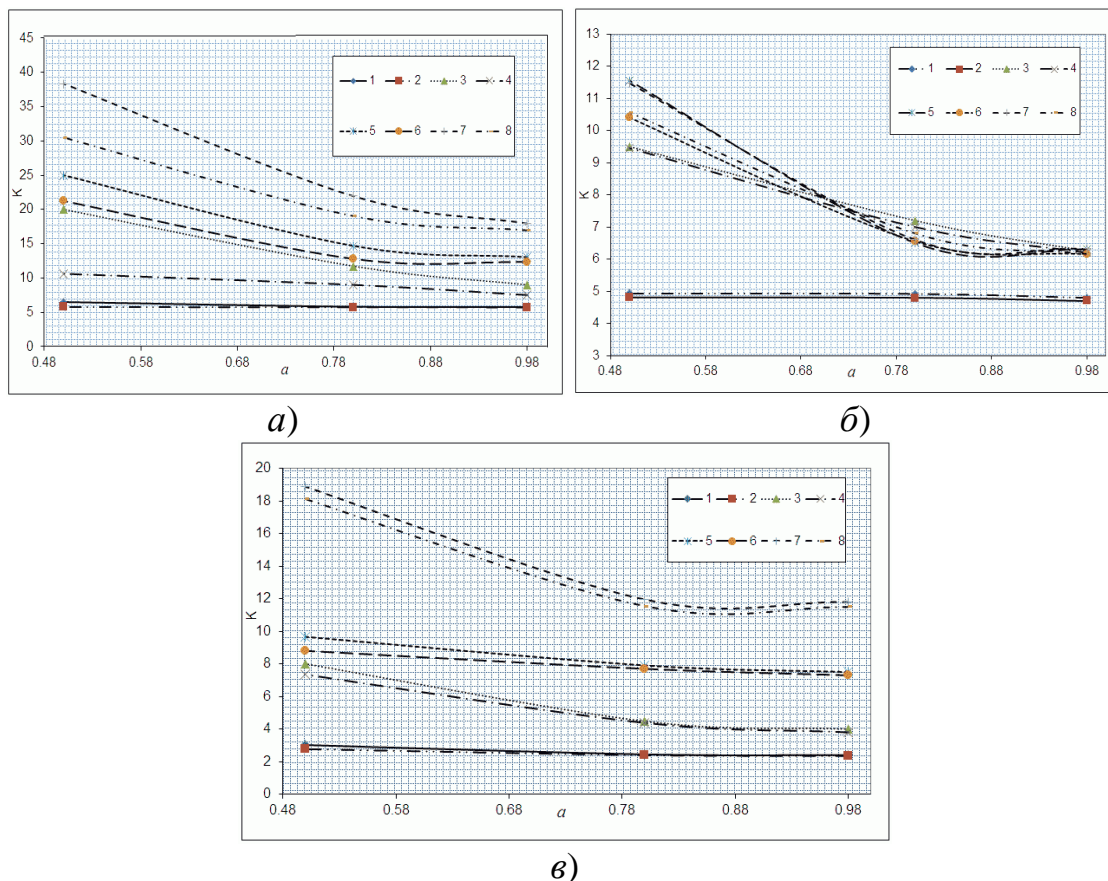


Рисунок 7 – Коефіцієнти концентрації повного напруження при розтягуванні уздовж лінії армування (*a*); розтягуванні перпендикулярно лінії армування (*б*); рівномірному тиску на контурі круглого отвору (*в*)

Таблиця 3 – Результати обчислень граничного навантаження для ортогональної пластинки зі склопластику

Номер пластинки	$\zeta$	$\sigma_i$ , МПа ( $p=1$ МПа)		$p_{пр}$ , МПа
		Волокна	Матриця	
I	0,488	10,350	0,565	54,106
II	0,591	6,589	0,339	84,990
III	0,488	8,009	4,537	9,036
IV	0,591	6,955	4,068	10,786
V	0,488	31,185	10,483	3,911

Порівняння експериментальних результатів з теоретичними даними, отриманими методом функцій комплексного змінного і методом скінченних елементів показало добрий збіг при узгодженні результатів.

Таблиця 4 – Коефіцієнти макроконцентрації напружень в пластинці з одним, двома і трьома отворами при  $L = 3R$

Тип пластинки	Метод скінченних елементів	Теоретичний аналіз	Експериментальне дослідження
Один отвір	5,05	5,045	4,401
Два отвори	5,55	5,5	5,1
Три отвори	6,1	6,0	5,6

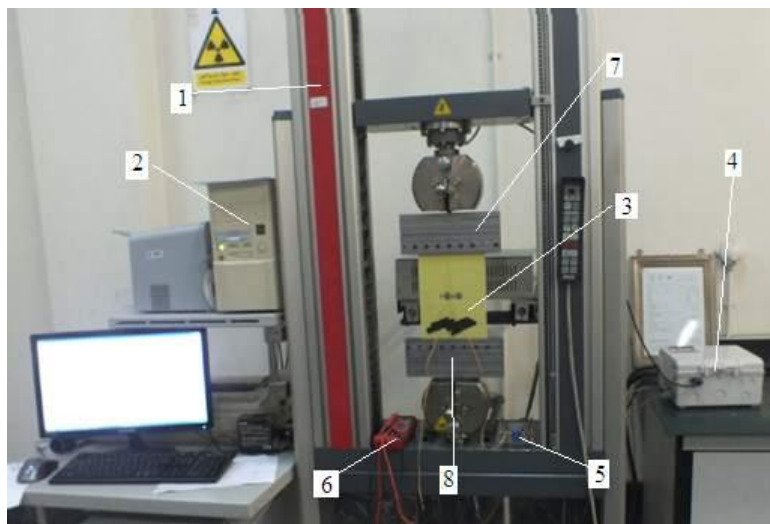


Рисунок 8 – Загальний вид експериментального стану для дослідження напружено-деформованого стану пластин: 1 – розтягуюча установка ZWICK, Z050/TH3A; 2 – комп’ютер; 3 – досліджуваний зразок; 4 – вимірювальний блок; 5 – тензоміст; 6 – вольтметр; 7 – рухомий затискач; 8 – нерухомий затискач

## ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі вирішена науково-практична задача визначення пружних характеристик армованих композиційних матеріалів та макро і мікро напружень в композитних пластинках з отворами для оцінки їх міцності.

В роботі реалізовано дворівневий підхід до дослідження концентрації напружень в композитних пластинах з отворами. Основні науково-практичні результати роботи полягають у наступному.

1. Для різних типів армування визначені мінімально необхідні представницькі осередки й сформульовані такі крайові умови, які забезпечують можливість моделювання поведінки композиту в умовах проведення базових експериментів.

2. Методика визначення ефективних пружних сталих для ортогонально армованих композитів дозволяє визначити їх з точністю, достатньою для практичного застосування. Проведення контрольних розрахунків із різною кількістю скінченних елементів і порівняння числових результатів із наближеними аналітичними дозволяють судити про достовірність отриманих в роботі результатів.

3. Виконано дослідження макроконцентрації напружень в ортотропних пластинках, послаблених отворами. Розроблена програма в системі комп’ютерної алгебри Maple для виконання всіх обчислювальних процедур і аналітичних перетворень. Шляхом числових експериментів досліджена збіжність методу ре-

дукції для нескінченних систем рівнянь алгебри і вплив зближення отворів на збіжність для пластин з декількома отворами.

Виконані дослідження макроконцентрації напружень для різних видів композиційних матеріалів в широкому діапазоні зміни коефіцієнтів заповнення.

Для перевірки достовірності розв'язку виконано порівняння результатів, отриманих методом функцій комплексної змінної і методом скінченних елементів.

4. Розроблена методика аналізу розподілу напружень в масштабі представницького осередку односпрямовано й ортогонально армованого волокнистого композиту, що дозволяє знаходити коефіцієнти мікроконцентрації напружень і проводити аналіз міцності з використанням програмного комплексу ANSYS.

5. Розроблена методика числового дослідження результуючої концентрації напружень в композитних пластинках, послаблених отворами. Виконані дослідження мікроконцентрації та результуючої концентрації напружень для ортогональної та гексагональної схем армування в широкому діапазоні зміни коефіцієнтів заповнення. На основі виконаних досліджень напруженого стану представницьких осередків проведений аналіз міцності композитних пластин, послаблених отворами.

6. Скомпонована установка для експериментального дослідження деформацій в пластинах з композиційного матеріалу. Створені зразки склопластикових пластин з одним, двома і трьома отворами. Були проведені експериментальні дослідження деформованого стану на контурах отворів і розраховані коефіцієнти макроконцентрації напружень. Виконано порівняння експериментальних результатів з теоретичними даними, отриманими методом функцій комплексної змінної і методом скінченних елементів.

7. Результати роботи знайшли практичне застосування при виконанні Європейського проекту «Innоріpes» (7-а рамкова програма ЄС) для визначення ефективних пружних констант композитних бандажів.

## СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Дарія заде С. Исследование концентрации напряжений вокруг отверстия в пластинах из однонаправленных композитов / С. Дарія заде // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». – Харків: НТУ «ХПІ». – 2010. – № 37. – С. 68-79.

2. Дарія заде С. Микро- и макро- концентрация напряжений вокруг отверстия в композиционных пластинах / С. Дарія заде, Г. И. Львов // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». – Харків: НТУ «ХПІ». – 2012. – № 55. – С. 54-64.

*Здобувачем виконані числові розрахунки макронапружень з урахуванням мікронапружень в композиційних пластинках, послаблених отворами.*

3. Дарія заде С. Численная методика определения эффективных характеристик однонаправленно армированных композитов / С. Дарія заде // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». – Харків: НТУ «ХПІ». – 2013. – № 58. – С. 71-77.

4. Дарія заде С. Экспериментальное исследование напряженно-дефор-



мированного состояния стеклопластика с одним и двумя одинаковыми круговыми отверстиями / С. Дария заде // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». – Харків: НТУ «ХПІ». – 2013. – № 63. – С. 35-44.

5. Darya zadeh S. A new numerical method for determination of effective elastic constants in a composite with cross-ply fibers / S. Darya zadeh, G. I. Lvov, S. R. Kiahosseini // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». – Харків: НТУ «ХПІ». – 2014. – № 58. – Р. 169-180.

*Здобувачем виконаний числовий розрахунковий аналіз напруженого стану для представницького осередку при визначенні пружних характеристик ортогонального армованого композиту.*

6. Дария заде С. Численная методика определения эффективных характеристик однонаправленно армированных композитов гексагональной структуры / С. Дария заде, Г. И. Львов // Авиационно-космическая техника и технология. – Харків: НАКУ ім. М. Є. Жуковського «ХАІ». – 2014. – № 2 (109). – С. 59-66.

*Здобувачем проведений числовий розрахунковий аналіз напруженого стану для осередку гексагональної структури при визначенні пружних характеристик однонаправлених армованих композитів.*

7. Darya zadeh S. A new numerical method for calculation of micro- stress on unidirectionally reinforced plates with circular hole in case of extension to a principal direction / S. Darya zadeh, G. I. Lvov, P. Daryazadeh // Journal of science and engineering. – USA: ORIS publication. – 2014. – Vol. 5, № 1. – Р. 24-33.

*Здобувач провів числовий розрахунковий аналіз напруженого стану для осередку з композиту для визначення мікроконцентрації напружень у композиційних пластинах з одним отвором при різних значеннях коефіцієнту об'ємного вмісту.*

8. Darya zadeh S. The calculation of effective elastic constants in a composite with 3D orthogonal nonwoven fibers / S. Darya zadeh, G. I. Lvov // Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics. – Tomsk, Russia: Tomsk State University. – 2015. – Vol. 35, № 3. – Р. 60-68.

*Здобувачем проведений числовий розрахунковий аналіз напруженого стану для осередку при визначенні пружних характеристик 3D ортогонального нетканого армованого композиту.*

9. Darya zadeh S. Numerical procedure of determining the effective mechanical characteristics of an aligned fiber composite / S. Darya zadeh, G. I. Lvov // Strength of materials. – New York, USA: Springer. – 2015. – Vol. 47, № 4. – Р. 636–643.

*Здобувач застосував числові методи для визначення пружних властивостей матеріалу з композиту для тетрагональної структури армованого матеріалу при аналізі напруженого стану двомірного осередку.*

10. Дария заде С. Численная методика определения эффективных механических характеристик однонаправленно армированного композита / С. Дария заде, Г. И. Львов // Проблемы прочности. – Київ: ІПМ НАН України. – 2015. – № 4. – С. 31-40.

*Здобувач за допомогою числового методу визначив пружні властивості матеріалу з композиту для тетрагональної структури осередку армованого матеріалу при аналізі напруженого стану двомірного осередку.*

11. Darya zadeh S. A two-level method for calculation of micro- stress on reinforced plates with circular hole in case of extension normal to principal direction / S. Darya zadeh, G. I. Lvov // PNRPU Mechanics Bulletin. – Perm, Russian Federation: Perm National Research Polytechnic University. – 2015. – № 1. – P. 148-157.

*Здобувачем проведені числові розрахунки аналізу напруженого стану для визначення мікронапружень у осередку армованої пластинки.*

12. Darya zadeh S. Stress analysis in an infinite hydroxyapatite/ titanium plate with pressurized circular hole / S. Darya zadeh, G. I. Lvov // Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika, Mekhanika, Komp`yuternye nauki. – Izhevsk, Russia: Institute of Computer Science, UdsU. – 2015. – Vol. 25, №. 2. – P. 267-279.

*Здобувачем проведені числові розрахунки для визначення мікронапружень для армованих пластинок при аналізі напруженого стану осередку з композиту.*

13. Darya zadeh S. A numerical method of calculation of total stress in reinforced plates with pressurized hole / S. Darya zadeh, G. I. Lvov, S. R. Kiahosseini // International Journal of Modelling and Simulation. – London, England: Tylor & Francis. – 2015. – Vol. 1, № 35. – P. 7-12.

*Здобувачем використані числові методи для визначення мікро- та повної концентрації напружень армованих волокнистих композиційних пластинок з отворами при різних значення коефіцієнтів об'ємного вмісту.*

14. Дарія заде С. Исследование напряженного состояния в упругой пластинке из композиционных материалов с бесконечным рядом одинаковых круговых отверстий / С. Дарія заде // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». – Харків: НТУ «ХПІ». – 2015. – № 57. – С. 41-44.

15. Дарія заде С. Дослідження концентрації напружень навколо безкінечних рядів однакових отворів в пластинках з однонаправлених композитів / С. Дарія заде // Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я; тези доповідей XVIII Міжнародної науково-практичної конференції, 12-14 травня 2010 р. – Харків: НТУ «ХПІ», 2010. – С. 56.

16. Дарія заде С. Исследование макро концентрация напряжений вокруг отверстия в пластинах из однонаправленных композитов / С. Дарія заде, Г. И. Львов // Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я; тези доповідей XX Міжнародної науково-практичної конференції, 15-17 травня 2012 р. – Харків: НТУ «ХПІ», 2012. – С. 50.

*Здобувачем виконані числові розрахунки та аналіз напруженого стану композиційних пластинок, послаблених отворами.*

17. Дарія заде С. Методы определения эффективных упругих свойств однонаправленных армированных пластинок / С. Дарія заде // Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я; тези доповідей XXI Міжнародної науково-практичної конференції, 29-31 травня 2013 р. – Харків: НТУ: «ХПІ», 2013. – С. 37.

18. Darya zadeh S. A new method for determination of effective elastic constants in a composite with 3D orthogonal nonwoven fibers / S. Darya zadeh, G. I. Lvov // Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я; тези доповідей XXIII Міжнародної науково-практичної конференції, 20-

22 травня 2015 р. – Харків: НТУ «ХП», 2015. – С. 44.

*Здобувачем проведений числовий розрахунковий аналіз напруженого стану для осередку при визначенні пружних характеристик 3D ортогонального нетканого армованого композиту.*

## АНОТАЦІЇ

**Дарія заде С. Дворівневий підхід до дослідження концентрації напружень в композитних пластинах з отворами.** На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 05.02.09 – динаміка та міцність машин. Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», Міністерство освіти і науки України, Харків, 2016.

Дисертація присвячена дослідженню концентрації напружень в композитних пластинах з отворами на двох рівнях. В ході числового дослідження напруженого стану представницького осередку були визначені ефективні пружні властивості різних типів армованого композиту. Концентрація макронапружень навколо отворів в еквівалентних ортотропних пластинках досліджена з використанням функцій комплексної змінної. У роботі розроблені підходи, методи та моделі для дослідження нерівномірності напружень, які поширені в межах періодичного повторюваного представницького осередку армованого композиту. Викладений новий підхід до аналізу мікроконцентрації напружень з урахуванням значень макроконцентрації напружень для різних типів армованих волокнистих пластин, послаблених отворами. У роботі пластинки зі склопластика марки СТЕФ-1 з отворами досліджені засобами тензометрії при рівномірному розтягуванні пластин. Результати, отримані експериментально, зіставлені з аналітичними і МСЕ.

*Ключові слова:* міцність, композит, армована пластинка, граничні умови, концентрація напруження, представницький осередок.

**Дарія заде С. Двухуровневый подход к исследованию концентрации напряжений в композитных пластинах с отверстиями.** На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 05.02.09 – динамика и прочность машин. – Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», Министерство образования и науки Украины, Харьков, 2016.

Диссертация посвящена исследованию концентрации напряжений в композитных пластинах с отверстиями на двух уровнях. В ходе численного исследования напряженного состояния представительской ячейки были определены эффективные упругие свойства разных типов армированного композита. В работе разработаны подходы, методы и модели для исследования неравномерности напряжений, распространяющихся в пределах периодически повторяющейся представительской ячейки армированного композита. Изложен новый подход к определению микроконцентрации напряжений с учетом значений макроконцентрации напряжений для разных типов армированных волокнистых пластин, ослабленных отверстиями. Альтернативой аналитическим решениям яв-

ляется использование численных методов, которые с помощью современной вычислительной техники позволяют обеспечить приемлемую точность определения напряженного состояния на микро- и макроуровне. Проведены исследования макроконцентрации напряжений в ортотропных пластинках, ослабленных отверстиями, на основе аналитических и численных методов. Аналитическое решение базируется на использовании функции комплексного переменного при анализе макроконцентрации напряжений вблизи отверстий. Для получения численных результатов разработано программное обеспечение в компьютерной среде Maple. Оно позволяет создавать модели пластин разной композитной структуры с различным числом отверстий, проводить аналитические преобразования, находить комплексные корни характеристических уравнений, получать решение системы алгебраических уравнений. В работе создана специальная численная методика определения напряженного состояния композита с однонаправленным армированием на микроуровне. Предложенная методика базируется на использовании метода конечных элементов и программного комплекса ANSYS. На основе этой методики проведены серии исследований:

Проведены экспериментальные исследования деформированного состояния пластин с одним и несколькими круговыми отверстиями, на основе которых рассчитаны коэффициенты макроконцентрации напряжений. В работе пластинки из стеклопластика марки СТЭФ-1 исследованы с помощью метода тензометрии при равномерном растяжении пластин. Результаты, полученные экспериментально, сопоставлены с аналитическими и МКЭ.


*Ключевые слова:* прочность, композит, армированная пластинка, граничные условия, концентрация напряжений, представительная ячейка.

**Darya zadeh S. The two-level method of the research of stress concentration in composite plates with holes.** With manuscript right.

Thesis for granting the Degree of Candidate of Technical sciences in speciality 05.02.09 – Dynamics and strength of machines. – National Technical University “Kharkiv Polytechnic Institute”, 2016.

The thesis deals with the research of the effective characteristics of composites by means of ANSYS software package. As a part of the numeric study of the stressed condition of a representative cell, the effective elastic properties of different types of reinforced composite were defined. The approaches, methods and models for the investigation of stress distribution non-uniformity within the boundaries of a periodically recurring representative cell of reinforced composite were developed. The new approach to the value of stress micro concentration is given with the consideration of the values of stress micro concentration for different types of hole-weakened fiber-reinforced plates. Holed STEF-1 glass-fiber plastic plates were investigated in this research by means of strain gage method under uniform extension. The obtained experimentally results were compared with analytical results and finite element method.

*Keywords:* strength, composite, reinforced plate, boundary conditions, stress concentration, representative cell.



Відповідальний за випуск  
к.т.н., доц. кафедри динаміки та міцності машин НТУ «ХП»  
Федоров В.О.

Підписано до друку 06.04.2016 р. Формат 60x84/16.  
Папір офсетн. Друк – різнографічний. Умовн. друк. арк. 0,9  
Гарнітура Times New Roman. Наклад 100 прим. Замовлення №

---

Надруковано у СПДФО Ізрайлев Є.М.  
Свідоцтво № 04058841 Ф0050331 від 21.03.2001 р.  
61024, м. Харків, вул. Фрунзе, 16

---