

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Национальный технический университет «ХПИ»

Ст.: Т. Храпунова, К. Третьяков

Рук.: ст. пр. А.Н. Андреев, асс. О.Н. Андреева

Несмотря на разнообразие колебательных процессов встречающихся в природе существует общность закономерностей этих явлений и математических методов их исследования. Одной из наиболее удобных для изучения моделей колебательных систем является математический маятник: материальная точка массы m , подвешенная на нерастяжимой и невесомой нити длиной ℓ и совершающая колебания строго в вертикальной плоскости. Детально разобравшись с поведением такой механической системы и используя аналогию между колебательными системами различной физической природы, можно значительно продвинуться в понимании разнообразных электромагнитных и оптических нелинейных явлений, которые описываются такими же дифференциальными уравнениями.

Дифференциальное уравнение описывающее колебания математического (и физического) маятника можно получить, используя основное уравнение динамики вращательного движения тела вокруг неподвижной оси. Если на колебательную систему действует гармонический внешний момент и тормозящий момент сил вязкого трения, то дифференциальное уравнение, описывающее колебания маятника можно записать в следующем виде:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\beta\frac{d\varphi}{dt} + \omega_0^2 \sin\varphi = \omega^2\theta_0 \sin\omega t \quad (1)$$

где φ – угол отклонения маятника от положения равновесия; t – время β – коэффициент затухания, характеризующий диссипацию энергии в колебательной системе; ω_0 – собственная частота незатухающих колебаний маятника; ω, θ_0 – частота и угловая амплитуда внешнего момента силы действующей на маятник, соответственно. Величина $\theta = \theta_0 \sin\omega t$ стоящая в правой части уравнения (1) пропорциональна внешнему моменту сил. Если момент сил постоянный, то $\theta = 1$ соответствует внешнему моменту, который отклоняет маятник в горизонтальное положение ($\varphi = 90^\circ$). В пределе очень низкой частоты внешне-

го момента, маятник квазистатически следует за изменениями внешнего момента. То есть, при малой частоте и амплитуде вынуждающей силы колебания маятника происходят с амплитудой θ_0 внешнего момента, измеренной в радианах.

В силу нелинейности дифференциального уравнения (1) аналитические методы его исследования сопряжены с большими математическими трудностями. Поэтому в данной работе был реализован численный алгоритм решения уравнения (1) по методу Рунге-Кутты с помощью пакета Matlab. В разработанной программе можно варьировать: амплитуду и частоту внешнего момента силы, коэффициент затухания и начальные условия (смещение и скорость в начальный момент времени), длину нити и массу груза. Это позволяет исследовать большое число необычных видов движения маятника многие, из которых ещё до конца не изучены.

В начале, рассмотрим свободные колебания математического маятника. Если диссипация энергии отсутствует и амплитуда колебаний не велика, то маятник будет совершать гармонические колебания с частотой, зависящей от параметров колебательной системы (частота линейного осциллятора). При увеличении амплитуды колебания становятся нелинейными но по форме они близки к гармоническим (рис.1, а). В этом случае фазовая траектория гармонического осциллятора как и в случае линейных его колебаний представляет собой эллипс в фазовой плоскости (рис.1, а).

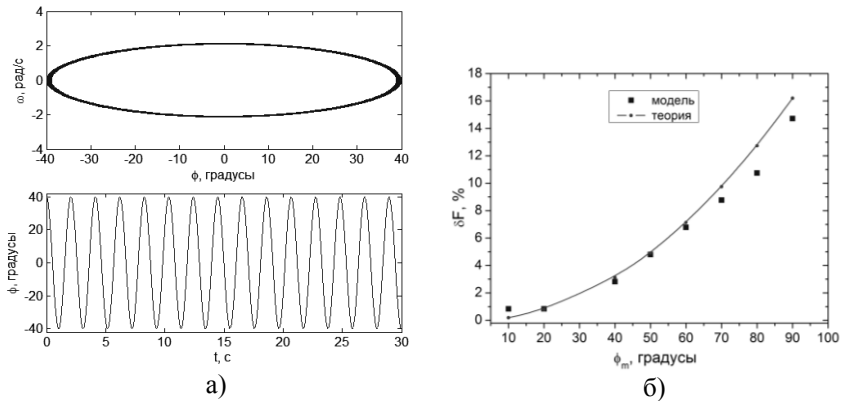


Рис. 1. а) свободные колебания математического маятника ($\ell = 1$ м, $m = 1$ кг, $\beta = 0$, $\varphi_0 = 40^\circ$); б) зависимость $\delta F = \left(\frac{F_0 - F}{F_0} \right) 100\%$ от ампли-

туды колебаний φ_m , где F_0 , F – частоты колебаний линейного и нелинейного осцилляторов соответственно.

Отличительной особенностью нелинейных колебаний маятника является их неизохронность – зависимость частоты от амплитуды колебаний (рис.1, б).

Потери энергии в системе приводят к затуханию колебаний, при этом фазовая траектория осциллятора имеет вид спирали, которая стягивается в особую точку типа «фокус» (рис.2, а).

Когда момент внешних сил не велик, а трение в системе значительно, то амплитуда установившихся вынужденных колебаний на частотах далёких от резонанса мала, тогда маятник ведёт себя как линейный осциллятор. Совершая гармоническое колебание с частотой вынужденной силы и амплитудой зависящей от резонансных характеристик линейного осциллятора (рис.2, б). При неизменной амплитуде внешней силы отклик осциллятора максимален, если частота совпадает с собственной частотой осциллятора

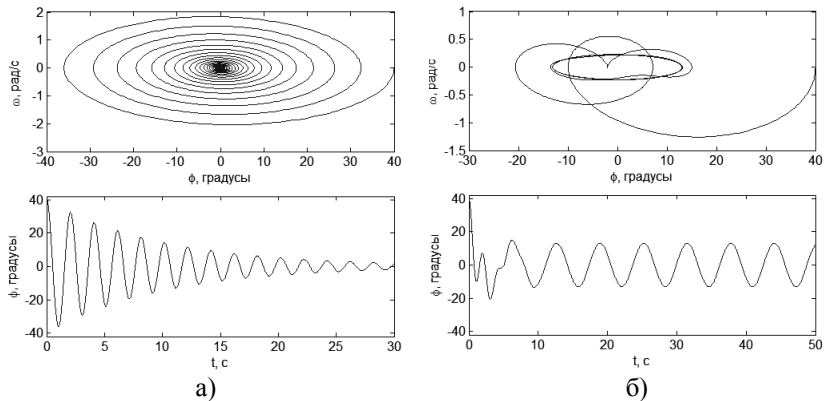
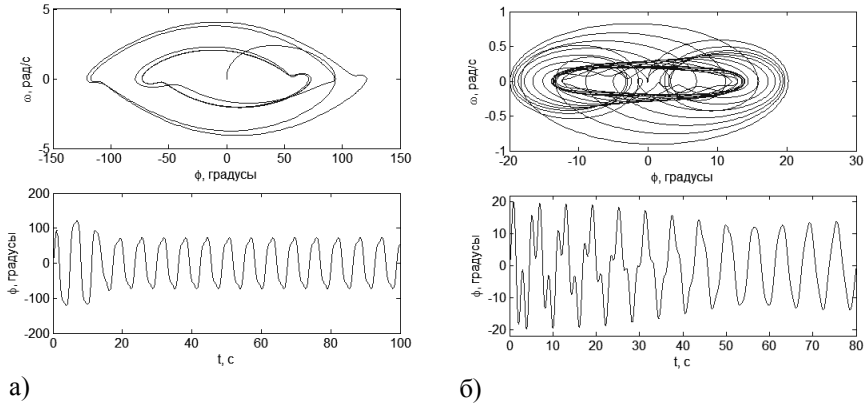


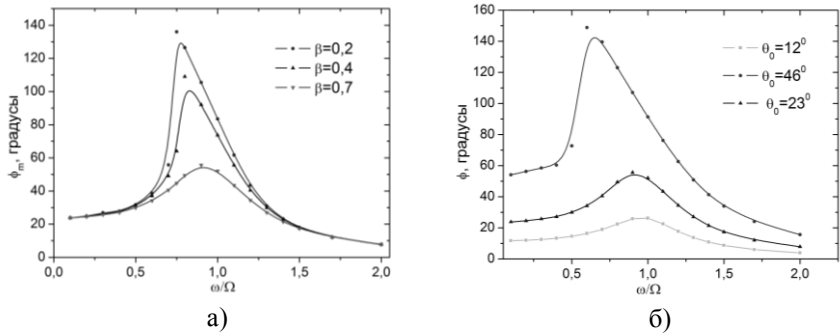
Рис. 2 а) затухающие колебания б) вынужденные гармонические колебания $\omega = 1$ рад/с, $\theta_0 = 12^\circ$, $\beta = 0,4$, $\varphi_0 = 40^\circ$

Если же амплитуда внешнего воздействия не мала и/или трение достаточно слабое, то колебания маятника перестают быть гармоническими (рис.3, а, б). При этом амплитудная резонансная кривая маятника изгибается в сторону меньших частот (рис. 4, а, б). Пик резонансной кривой смещается в сторону низких частот и принимает вид, характерный для нелинейных систем. Когда амплитуда внешнего момента превышает некоторое критическое значение, левый склон резо-

нансного пика становится «нависающим». Это значит, что в определённом интервале частот имеется три решения для амплитуды установившихся колебаний.



а) б)
 Рис. 3 Вынужденные колебания: а) $\omega = 1$ рад/с, $\theta_0 = 54^\circ$, $\beta = 0,4$, $\varphi_0 = 0^\circ$; б) $\omega = 1$ рад/с, $\theta_0 = 12^\circ$, $\beta = 0,04$, $\varphi_0 = 0^\circ$.



а) б)
 Рис.4. Амплитудные резонансные характеристики нелинейного осциллятора: а) при различных коэффициентах затухания ($\theta_0 = 23^\circ$); б) при различных угловых амплитудах внешнего воздействия ($\beta = 0,7$) (Ω – собственная частота затухающих колебаний маятника).

Разработанная математическая модель, позволяет так же исследовать возникновение хаотических колебаний, бифуркации нарушения симметрии и удвоение периода.

1. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. М.: Наука, 1991, 256 с.;
2. Бутиков Е.И. Необычное поведение маятника при синусоидальном внешнем воздействии // Компьютерные инструменты в образовании. – 2008. – № 1. – С.30 – 42;

3. Фейгин М.И. Проявление эффектов бифуркационной памяти в поведении динамической системы // Соросовский образовательный журнал. – 2001. – Т. 7, № 3. – С.121 – 127.