УДК 629.78

АЛЕКСЕЕНКО Н.В., ***ПЛАКСИЙ Ю.А.,*** канд. техн. наук

РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ВРАЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ И ОСНОВАННЫЕ НА ЭТОМ АЛГОРИТМЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИИ

Существующие алгоритмы определения ориентации твердого тела в бесплатформенных инерциальных навигационных системах (БИНС) основаны как правило на формальных разложениях частного решения кинематического уравнения в ряд без учета того факта, что полная модель вращения содержит и динамические уравнения.

В настоящей работе для решения задачи определения ориентации в случае свободного вращения твердого тела с помощью пакета аналитических вичислений Mathematica 5.12 получены разложения 5-го порядка частного решения совокупности динамических и кинематических уравнений в ряд по степеням кажущихся поворотов $\Theta_i^* = \int_{t_n-\Delta t}^{t_n} \omega_i(\tau)d\tau, i=1,2,3$ и построены алгоритмы определения кватернионов ориентации для частного случая регулярной прецессии. Для модели свободного вращения, описываемой системой уравнений $\dot{\omega}_1 = \alpha_1\omega_2\omega_3, \omega_1(0) = \omega_{10}, (1,2,3), \dot{\Lambda} = 0.5\Lambda \circ \omega, \Lambda(0) = (1,0,0,0),$ где $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ - вектор абсолютной угловой скорости твердого тела в проекциях на связанные оси, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ -коэффициенты, зависящие от отношений главных моментов инерции I_1, I_2, I_3, $\Lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ - кватернион ориентации, $(1,2,3)$ - символ круговой перестановки индексов; на основе метода обращения степенных рядов получено аналитическое разложение частного решения кинематического уравнения на интервале $[0, \Delta t]$:

$$\Delta\lambda_0(\Theta^*) = 1 - \frac{1}{8}\Theta^{*2} + \frac{1}{384}\Theta^{*4},$$
$$\Delta\lambda_1(\Theta^*) = \frac{1}{2}\Theta_1^* + \frac{1}{24}\Theta_1^*(\alpha_3\Theta_2^{*2} - \alpha_2\Theta_3^{*2}) - \frac{1}{48}\Theta_1^*\Theta^{*2} + \frac{1}{1440}\Theta_1^*(\alpha_2\Theta_3^{*2}(\alpha_3\Theta_1^{*2} - \alpha_1\Theta_3^{*2}) +$$
$$\alpha_3\Theta_2^{*2}(\alpha_2\Theta_1^{*2} - \alpha_1\Theta_2^{*2}) + \alpha_1(\alpha_2^2\Theta_3^{*4} - \alpha_3^2\Theta_2^{*2})) + \frac{1}{720}\alpha_2\alpha_3\Theta_1^{*3}(\alpha_2\Theta_3^{*2} - \alpha_3\Theta_2^{*2}) + \frac{1}{480}\Theta_1^{*2}(\alpha_2\Theta_3^{*2}(\alpha_1\Theta_2^{*2} - \alpha_2\Theta_1^{*2}) +$$
$$\alpha_3\Theta_2^{*2}(\alpha_1\Theta_3^{*2} - \alpha_3\Theta_1^{*2})) + \frac{1}{960}\Theta_1^*\Theta^{*2}(\alpha_2\Theta_3^{*2} - \alpha_3\Theta_2^{*2}) + \frac{1}{3840}\Theta_1^*\Theta^{*4}, (1.2.3) \qquad (1)$$

имеющее 5-й порядок точности по кажущимся поворотам. Заметим, что в выражения (1) входят коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, характеризующие динамические характеристики твердого тела.

Для регулярной прецессии в случае, когда $I_1 = I_2$, имеем $\alpha_1 = 1 - \xi_2, \alpha_2 = \xi_2 - 1, \alpha_3 = 0, \xi_2 = I_3 / I_1$ и кватернион поворота $\Delta\Lambda = (\Delta\lambda_0, \Delta\lambda_1, \Delta\lambda_2, \Delta\lambda_3)$ приобретает вид

$$\begin{aligned}
&\Delta\lambda_0(\Theta^*) = 1 - \frac{1}{8}\Theta^{*2} + \frac{1}{384}\Theta^{*4},\\
&\Delta\lambda_1(\Theta^*) = \frac{1}{2}\Theta_1^*(1 - \frac{\Theta^{*2}}{24} + \frac{\nu_i}{4}), i = 1.2.3, \nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3),\\
&\nu = (3\alpha_1\Theta_3^{*2} - \frac{1}{2}\alpha_1^3\Theta_1^{*3}\Theta_3^*(\Theta_2^* - \Theta_3^*) + \frac{2}{3}\alpha_1^3\Theta_1^8\Theta_2^*\Theta_3^{*2}(\Theta_3^* - \frac{11}{4}\Theta_4^*),\\
&3\alpha_1\Theta_3^{*2} - \frac{1}{7}\alpha_1^3\Theta_2^*\Theta_3^{*3}(\Theta_2^* - \Theta_1^*) - \frac{1}{96}\alpha_1\Theta_1^{*2}\Theta_3^*\Theta^{*2},\\
&-3\alpha_1(\Theta_1^{*2} + \Theta_2^{*2}) + \frac{1}{2}\alpha_1^3(1 - \Theta_2^*)(\frac{1}{\Theta_3^*} - \Theta_1^{*4}) - \alpha_1^3\Theta_1^{*4}\Theta_2^* + \frac{1}{96}\alpha_1\Theta_1^*\Theta_2^{*2}\Theta^{*2}).
\end{aligned} \qquad (2)$$

На основе алгоритма определения поворота (2) можно получить значения кватернионов ориентации твердого тела в любой момент времени t, используя формулу сложения поворотов. Из (2) сразу получаются более простые формулы 4-го порядка точности для вычисления кватерниона поворота.

$$\begin{aligned}
&\Delta\lambda_0(\Theta^*) = 1 - \frac{1}{8}\Theta^{*2} + \frac{1}{384}\Theta^{*4},\\
&\Delta\lambda_1(\Theta^*) = \frac{1}{2}\Theta_1^*(1 - \frac{\Theta^{*2}}{24} + \frac{\nu_i}{4}), i = 1.2.3,\\
&\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3), \nu = (\alpha_1\Theta_3^{*2}, \alpha_1\Theta_3^{*2}, -\alpha_1(\Theta_1^{*2} + \Theta_2^{*2}).
\end{aligned} \qquad (3)$$

Чтобы получить оценки точности формул (2) и (3), воспользуемся точным решением кинематических уравнений для случая регулярной прецессии. Так, для алгоритма (2) получено, что оценка погрешности модуля

$$\delta\Lambda^* = \frac{1}{1052}\alpha_1^2\Theta_3^{*2}(\Theta_1^{*2} + \Theta_2^{*2})\Theta^{*2} - \frac{1}{9216}\Theta^{*6},$$

на шаге равна а дрейф характеризуется

$$\delta\theta = 2\Theta^*(\frac{1}{1440}\alpha_1^2\Theta_3^{*4}(\alpha_1 + 4) - \frac{1}{960}\alpha_1(2\alpha_1 + 1)\Theta_3^{*2}\Theta^{*2} + \frac{1}{3840}\Theta^{*4}).$$

величиной