УДК 665.9

<u>О.В. ПОБЕДИНСКИЙ</u>, В.Д. ДМИТРИЕНКО, докт. техн. наук, профессор

Реализация функции XNOR (равносильность) на квантовом нейроне

Искусственные нейронные сети являются универсальным инструментом для решения различных задач распознавания, классификации, управления и оптимизации. Разработано большое число разнообразных нейронных сетей для решения конкретных задач. Однако известные нейронные сети имеют и определенные недостатки, что стимулирует разработку новых направлений в теории нейронных сетей. В последние 10 – 15 лет в теории нейронных сетей появилось новое направление – квантовые нейронные сети, существенные характеристики которых определяются квантовыми эффектами [1 – 3]. В настоящее время известен целый ряд квантовых нейронных сетей и десятки квантовых алгоритмов решения известных задач. Однако практическое применение квантовых нейронных сетей на обычных компьютерах весьма ограничено в связи с тем, что обучение квантовых нейронных сетей заметно сложнее, чем обычных нейронных сетей. Это связано с особенностями математических моделей квантовых нейронов. Рассмотрим модель квантового нейрона с m входами $|x_1\rangle$, $|x_2\rangle, \dots, |x_m\rangle$ и одним выходом $|y(t)\rangle$, которая имеет следующий вид

$$|y(t)\rangle = F \sum_{k=1}^{m} w_k(t) |x_k\rangle, \quad (1)$$

где $|x_k\rangle$ – кубит (квантовый бит), квантовая ячейка, которая может находиться в суперпозиции двух взаимно ортогональных квантовых состояний, обозначаемых как $|0\rangle, |1\rangle$; $|x_k\rangle = a_k|0\rangle + b_k|1\rangle$; a_k, b_k – комплексные амплитуды, удовлетворяющие условию нормировки $|a_k|^2 + |b_k|^2 = 1, k = \overline{1,m}$; t – дискретное время; F – неизвестный квантовый оператор; $w_k(t)$ – матрицы весов связей, размерностью 2×2.

Обучение квантового нейрона и более сложных квантовых нейронных сетей может выполняться с помощью метода обратного распространения ошибки, модифицированного для квантового случая. Однако наличие неизвестного оператора F затрудняет обучение и требует применения эвристических подходов даже при решении простых задач.

В работе [1] авторами в выражении (1) определены функции F и матрицы весов связей для логических функций НЕ и XOR (неравносильность).

Нейрон, реализующий функцию НЕ, имеет один вход |x› и один выход |y›. В соответствии с выражением (1) для этого случая имеем:

$$|y(t)\rangle = Fw(t)|x\rangle, \quad (2)$$

где $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Если $|x\rangle = |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, то из формулы (2) получим

$$|y(t)\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle.$$

Если $|x\rangle = |1\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, то из формулы (2) мы получим $|y(t)\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = |0\rangle$.

Для функции XNOR (равносильность) выражение (1) принимает вид

$$|y\rangle = F(w_1|x_1\rangle + w_2|x_2\rangle),$$

где $F = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{sgn}(.) & 0\\0 & \mathrm{sgn}(.)\end{pmatrix}$; $sgn(x) = +1$, если $x > 0$, $sgn(x) = -1$, если $x < 0$, а матрицы весов связей имеют вид: $w_1 = w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}$.

Если $|x_1\rangle = |0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = |x_2\rangle$, то выходом $|y\rangle$ станет:

$$|y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{sgn}(.) & 0\\0 & \mathrm{sgn}(.)\end{pmatrix}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{sgn}(.) & 0\\0 & \mathrm{sgn}(.)\end{pmatrix}\sqrt{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} =$$
$$= |1\rangle.$$

Если $|x_1\rangle = |1\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = |x_2\rangle$, то имеем:

$$|y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{sgn}(.) & 0\\0 & \mathrm{sgn}(.)\end{pmatrix}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{sgn}(.) & 0\\0 & \mathrm{sgn}(.)\end{pmatrix}\sqrt{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} =$$
$$= |1\rangle.$$

Если $|x_1\rangle = |0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ и $|x_2\rangle = |1\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, то результатом станет :

$$|y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{sgn}(.) & 0\\0 & \mathrm{sgn}(.)\end{pmatrix}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{sgn}(.) & 0\\0 & \mathrm{sgn}(.)\end{pmatrix}\sqrt{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} =$$
$$= |0\rangle.$$

Таким образом для обучения квантовых нейронных сетей предложены работоспособные эволюционные алгоритмы обучения. Эффективность алгоритмов подтверждена получением модели функции алгебры логики на квантовом нейроне.

Список литературы:

1. Sitakanta Nayak, Shaktikanta Nayak, Singh J.P., Computional Power Quantum Artifical Neural Network // International Journal of Computer Science and Technology, – 2011. – Vol. 2. – P. 35–37.

2. Grover L. A Fast Quantum Mechanical Algorithm for Database Search / Proceedings of the 28th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing, ACM, New York, 1996. – P. 212–219.

3. Simon D., On the Power of Quantum Computation // SIAM Journal of Computing. – 1997. – 26(5), – P. 1474–1483.