

В.Д. ДМИТРИЕНКО, д-р техн. наук, НТУ "ХПИ",
А.Ю. ЗАКОВОРОТНЫЙ, НТУ "ХПИ"

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРИВОДА МЕТОДАМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Розглянуто геометричний метод лінеаризації зворотним зв'язком математичної моделі тягового асинхронного електропривода. Отримано математичну модель електропривода у формі Бруновського.

The geometrical method of linearization is considered by a feedback of mathematical model of the traction asynchronous electric drive. The mathematical model of the electric drive in the form of Brunovsky.

Постановка проблемы и анализ литературы. Трудности анализа и синтеза нелинейных систем управления общеизвестны. Поэтому в течении десятилетий ведется поиск более мощных теоретических средств, чем существующие, для решения фундаментальных проблем теории управления. Одним их таких средств является современная геометрия, в частности, геометрический подход к теории управления на основе теории групп и дифференциальной геометрии. Успехи этого подхода привели к интенсивной разработке нового научного направления – единой геометрической теории управления [1, 2]. Существенное преимущество нового научного направления состоит не только в создании математического аппарата, позволяющего описывать системы управления в пространствах состояний более общих, чем линейные пространства, что необходимо при решении целого ряда задач управления [1, 2], но и в реальной осуществимости эквивалентных преобразований нелинейных систем к линейным. Такие преобразования открывают возможности для использования при решении задач разработки нелинейных систем управления методов и средств теории линейных систем [1–3]. При этом линеаризация нелинейной системы выполняется не с помощью классического разложения в ряд Тейлора, а на основе использования линейной обратной связи в пространстве "вход – выход" или "вход – состояние". Теоретически линеаризация с помощью обратной связи позволяет преобразовать к линейному виду широкий класс нелинейных систем управления [1–7]. Однако практическое использование нового геометрического метода линеаризации для сколько-нибудь общих нелинейных систем выше третьего – четвертого порядка существенно затруднено из-за отсутствия конструктивных методов выполнения такой линеаризации.

В работах [2, 8] предпринимались попытки получить линейную модель асинхронного привода. В статье [8] два тяговых асинхронных двигателя дизель-поезда были заменены одним эквивалентным, математическая модель

которого описывается с помощью системы дифференциальных уравнений через потокосцепления статора и ротора:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Psi_1}{dt} &= a_{11}\Psi_1 + a_{13}\Psi_3 + u_1; \\
 \frac{d\Psi_2}{dt} &= a_{22}\Psi_2 + a_{24}\Psi_4 + u_2; \\
 \frac{d\Psi_3}{dt} &= a_{31}\Psi_1 + a_{33}\Psi_3 + a_{345}\Psi_4\Omega; \\
 \frac{d\Psi_4}{dt} &= a_{42}\Psi_2 + a_{44}\Psi_4 + a_{435}\Psi_3\Omega; \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= a_{514}\Psi_1\Psi_4 + a_{523}\Psi_2\Psi_3 - a_{51}\Omega - a_{52}\Omega^2,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$ – потокосцепления эквивалентного двигателя; $a_{11}, a_{13}, \dots, a_{514}, a_{523}$ – постоянные коэффициенты, определяемые параметрами эквивалентного асинхронного двигателя; u_1, u_2 – статорные напряжения; a_{51}, a_{52} – постоянные коэффициенты, определяемые нагрузкой двигателя; Ω – угловая скорость вращения эквивалентного двигателя.

Рассматриваемая модель (1) использовалась для получения линейного эквивалента нелинейной системы. Однако относительно большое число одночленов в правой части системы уравнений (1) привело к громоздким и трудно используемым промежуточным выражениям и конечному результату.

В работе [2] использовалась аналогичная модель асинхронного двигателя, в которой статорные потокосцепления с помощью известных выражений [9] были заменены на статорные токи. Эта модель содержит такое же число одночленов в правой части системы уравнений, что и модель (1), поэтому ее использование для получения линейного эквивалента также проблематично. В связи с этим была предпринята попытка [2] уменьшить общее число одночленов в правой части системы уравнений за счет перехода с помощью нелинейного преобразования из статической системы координат во вращающуюся d - q -систему координат. Однако допущенные ошибки преобразования привели к появлению некорректной модели, в которой одна из полученных фазовых координат не входила ни в одно из четырех других уравнений ([2], пятое уравнение модели (1.476)).

В связи с этим **целью настоящей работы** является получение приемлемого для целей оптимизации асинхронного привода решения задачи линеаризации математической модели асинхронного двигателя с помощью обратной связи.

Математическую модель (1) в осях u и v с помощью известных выражений для токов статора [9]:

$$i_{us} = \frac{1}{\sigma L_s} (\Psi_{us} - k_r \Psi_{ur}); \quad i_{vs} = \frac{1}{\sigma L_s} (\Psi_{vs} - k_r \Psi_{vr}),$$

где i_{us}, i_{vs} – статорные токи по осям u и v ; $\sigma = 1 - k_r k_s = 1 - \frac{L_m^2}{L_s L_r}$ – полный коэффициент рассеяния; L_m – индуктивность контура намагничивания (взаимная индуктивность); L_s, L_r – полная индуктивность соответственно статора и ротора; Ψ_{us}, Ψ_{vs} – потокоцепления по осям u и v статора; $k_s = \frac{L_m}{L_s}, k_r = \frac{L_m}{L_r}$ – коэффициенты электромагнитной связи соответственно статора и ротора; Ψ_{ur}, Ψ_{vr} – потокоцепления ротора по осям u и v , преобразуем к виду

$$\begin{aligned} \frac{di_{us}}{dt} &= \alpha \beta \Psi_{ur} - \gamma i_{us} + p \beta \Omega \Psi_{vr} + \frac{1}{\sigma L_s} u_{us}; \\ \frac{di_{vs}}{dt} &= \alpha \beta \Psi_{vr} - \gamma i_{vs} - p \beta \Omega \Psi_{ur} + \frac{1}{\sigma L_s} u_{vs}; \\ \frac{d\Psi_{ur}}{dt} &= -\alpha \Psi_{ur} - p \Omega \Psi_{vr} + \alpha L_m i_{us}; \\ \frac{d\Psi_{vr}}{dt} &= -\alpha \Psi_{vr} + p \Omega \Psi_{ur} + \alpha L_m i_{vs}; \\ \frac{d\Omega}{dt} &= k_1 \mu (\Psi_{ur} i_{vs} - \Psi_{vr} i_{us}) - a_{51} \Omega - a_{52} \Omega^2, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\alpha = \frac{1}{T_r}$; T_r – постоянная времени ротора двигателя; $\beta = \frac{L_m}{\sigma L_s L_r}$; $\gamma = \frac{R_r L_m^2}{\sigma L_s L_r^2} + \frac{R_s}{\sigma L_s}$; R_r, R_s – активные сопротивления роторной и статорной обмоток двигателя; p – число пар полюсов статора; u_{us}, u_{vs} – статорные напряжения по осям u и v ; k_1 – постоянный коэффициент; $\mu = \frac{p L_m}{J L_r}$; J – приведенный момент инерции двигателя (с учетом момента инерции дизель-поезда); $M_n = a_{51} \Omega + a_{52} \Omega^2$ – момент нагрузки двигателя.

Математическая модель асинхронного привода (2) не может быть непосредственно использована для линеаризации объекта с помощью

динамической обратной связи из-за слишком большого числа одночленов, входящих в правую часть системы уравнений (2), что приводит к нетривиальным громоздким преобразованиям и необходимости весьма сложного поиска решений системы уравнений в частных производных. Выполним нелинейное преобразование системы уравнений (2) во вращающуюся систему координат d, q . Получим, что в новой системе координат

$$\Omega = \Omega; \quad (3)$$

$$\Psi_d i_q = \Psi_{ur} i_{vs} - \Psi_{vr} i_{us}, \quad (4)$$

где $\Psi_d = \sqrt{\Psi_{ur}^2 + \Psi_{vr}^2}; \quad (5)$

$$i_q = i_{vs} \cos \rho - i_{us} \sin \rho; \quad (6)$$

$$\rho = \arcsin \frac{\Psi_{vr}}{\sqrt{\Psi_{ur}^2 + \Psi_{vr}^2}} \text{ или } \rho = \arccos \frac{\Psi_{ur}}{\sqrt{\Psi_{ur}^2 + \Psi_{vr}^2}}; \quad (7)$$

i_q – ток статора по оси q в системе координат d, q . При этом ток статора по оси d определяется выражением

$$i_d = i_{us} \cos \rho - i_{vs} \sin \rho. \quad (8)$$

Наиболее просто с помощью соотношений (3) и (4) в новой системе координат получается последнее уравнение из системы уравнений (2), которое в d - q -системе координат приобретает вид

$$\frac{d\Omega}{dt} = k_1 \mu \Psi_d i_q - a_{s1} \Omega - a_{s2} \Omega^2. \quad (9)$$

Второе дифференциальное уравнение получим, продифференцировав левую и правую часть выражения (5) и подставив вместо производных $\frac{d\Psi_{ur}}{dt}$, $\frac{d\Psi_{vr}}{dt}$ соответствующие правые части третьего и четвертого уравнений из системы (2). После несложных алгебраических преобразований с учетом выражений (7) и (8) имеем:

$$\frac{d\Psi_d}{dt} = -\alpha \Psi_d + \alpha L_m i_d. \quad (10)$$

Продифференцировав левую и правую часть одного из выражений (7) и выполнив простые преобразования с учетом выражений (2), (5) и (6) получим

$$\frac{d\rho}{dt} = p\Omega + \alpha L_m \frac{i_q}{\Psi_d}. \quad (11)$$

Последние два дифференциальных уравнения новой математической модели получим, продифференцировав левые и правые части выражений (6), (8) и подставив необходимые соотношения из уравнений (2) и (11), и выполнив необходимые алгебраические преобразования:

$$\frac{di_d}{dt} = -\gamma i_d + p\Omega i_q + \alpha L_m \frac{i_q^2}{\Psi_d} + \alpha\beta\Psi_d + \frac{1}{\sigma L_s}(u_{us} \cos \rho + u_{vs} \sin \rho); \quad (12)$$

$$\frac{di_q}{dt} = -\gamma i_q - p\Omega i_d - \alpha L_m \frac{i_d i_q}{\Psi_d} - p\beta\Omega\Psi_d + \frac{1}{\sigma L_s}(u_{vs} \cos \rho + u_{us} \sin \rho). \quad (13)$$

Введем в полученную модель (9) – (13) асинхронного двигателя новые управления u_1 , u_2 , позволяющие убрать из правых частей уравнений (12), (13) нелинейные члены:

$$u_1 = p\Omega i_q + \alpha L_m \frac{i_q^2}{\Psi_d} + \alpha\beta\Psi_d + \frac{1}{\sigma L_s}(u_{us} \cos \rho + u_{vs} \sin \rho); \quad (14)$$

$$u_2 = -p\Omega i_d - \alpha L_m \frac{i_d i_q}{\Psi_d} - p\beta\Omega\Psi_d + \frac{1}{\sigma L_s}(u_{vs} \cos \rho + u_{us} \sin \rho). \quad (15)$$

Обозначив $x_1 = \Omega$; $x_2 = \Psi_d$; $x_3 = i_d$; $x_4 = i_q$; $x_5 = \rho$; $a_{11} = -a_{51}$; $a_{12} = -a_{52}$; $a_{124} = k_1\mu$; $a_{21} = -\alpha$; $a_{23} = \alpha L_m$; $a_{31} = -\gamma$; $a_{41} = -\gamma$; $a_{51} = p$; $a_{524} = \alpha L_m$ и подставив управления u_1 и u_2 (соотношения (14) и (15)) в уравнения (12), (13), получим модель асинхронного двигателя в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_1^2 + a_{124}x_2x_4; \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_2 + a_{23}x_3; \\ \frac{dx_3}{dt} &= a_{31}x_3 + u_1; \\ \frac{dx_4}{dt} &= a_{41}x_4 + u_2; \\ \frac{dx_5}{dt} &= a_{51}x_1 + a_{524} \frac{x_4}{x_2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Определим возможность преобразования нелинейной системы (16) к линейной форме (к канонической форме Бруновского [1, 2, 8]). Для этого

определим инволютивность последовательности распределений M^0 , M^1 , M^2 [2, 8].

С системой дифференциальных уравнений (16) связаны векторные поля

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_1^2 + a_{124}x_2x_4 \\ a_{21}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_3 \\ a_{41}x_4 \\ a_{51}x_1 + a_{524}\frac{x_4}{x_2} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{Y}_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{Y}_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку векторные поля $\mathbf{Y}_1(\mathbf{x})$ и $\mathbf{Y}_2(\mathbf{x})$ постоянны, то распределение $M^0 = \text{span}\{\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2\}$ – инволютивно и $\dim M^0 = 2$, где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$; span – линейная оболочка векторов \mathbf{Y}_1 и \mathbf{Y}_2 ; $\dim M^0$ – размерность распределения M^0 [2, 8].

Определим распределение $M^1 = \text{span}\{\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, L_x \mathbf{Y}_1, L_x \mathbf{Y}_2\}$, где $L_x \mathbf{Y}_1$ и $L_x \mathbf{Y}_2$ – производные Ли векторных полей \mathbf{Y}_1 и \mathbf{Y}_2 вдоль векторного поля \mathbf{X} :

$$L_x \mathbf{Y}_1 = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}_1] = \frac{\partial \mathbf{Y}_1}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{X} - \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{Y}_1 = -\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{Y}_1 = |0, -a_{23}, -a_{31}, 0, 0|^T;$$

$$L_x \mathbf{Y}_2 = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}_2] = \frac{\partial \mathbf{Y}_2}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{X} - \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{Y}_2 = -\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{Y}_2 = \left| -a_{124}x_2, 0, 0, -a_{41}, -\frac{a_{524}}{x_2} \right|^T,$$

где $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}_k]$ – скобки Ли векторных полей \mathbf{X} , \mathbf{Y}_k .

Для инволютивности распределения M^1 необходимо выполнение условия $\text{rank}(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, L_x \mathbf{Y}_1, L_x \mathbf{Y}_2, [\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j]) = 4$, где $\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j$ – векторные поля из семейства $(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, L_x \mathbf{Y}_1, L_x \mathbf{Y}_2)$. Имеем:

$$[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2] = [\mathbf{Y}_1, L_x \mathbf{Y}_1] = [\mathbf{Y}_1, L_x \mathbf{Y}_2] = [\mathbf{Y}_2, L_x \mathbf{Y}_2] = [\mathbf{Y}_2, L_x \mathbf{Y}_1] = 0. \quad (17)$$

Однако

$$[L_x \mathbf{Y}_1, L_x \mathbf{Y}_2] = \frac{\partial(L_x \mathbf{Y}_2)}{\partial \mathbf{x}} L_x \mathbf{Y}_1 - \frac{\partial(L_x \mathbf{Y}_1)}{\partial \mathbf{x}} L_x \mathbf{Y}_2 = \left| a_{23} a_{124}, 0, 0, 0, \frac{a_{524} a_{23}}{x_2^2} \right|^T.$$

Поэтому ранг матрицы $\mathbf{R} = (\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, L_x \mathbf{Y}_1, L_x \mathbf{Y}_2, [L_x \mathbf{Y}_1, L_x \mathbf{Y}_2])$ равен пяти:

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_{124}x_2 & a_{23}a_{124} \\ 0 & 0 & -a_{23} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -a_{31} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a_{41} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{a_{524}}{x_2} & \frac{a_{524}a_{23}}{x_2^2} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, распределения M^1 не является инволютивным. Подраспределения $M_1^1 = \text{span}\{Y_1, Y_2, L_x Y_1\}$ и $M_2^1 = \text{span}\{Y_1, Y_2, L_x Y_2\}$ распределения M^1 в силу соотношений (17) являются инволютивными и имеют одинаковые размерности, равные 3. Введем дополнительную фазовую координату в канал, связанный с управлением u_2 :

$$x_6 = u_2; \quad \frac{dx_6}{dt} = u_2^*; \quad u_1^* = u_1.$$

С расширенной моделью асинхронного двигателя связаны следующие векторные поля:

$$X^*(x^*) = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_1^2 + a_{124}x_2x_4 \\ a_{21}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_3 \\ a_{41}x_4 + x_6 \\ a_{51}x_1 + a_{524}\frac{x_4}{x_2} \\ 0 \end{vmatrix}; \quad Y_1^*(x^*) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}; \quad Y_2^*(x^*) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix},$$

где $x^* = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$.

Для расширенной модели асинхронного двигателя распределение $M^{0*} = \text{span}\{Y_1^*, Y_2^*\}$ – инволютивно, $\dim M^{0*} = 2$. Распределение $M^{1*} = \text{span}\{Y_1^*, Y_2^*, L_{x^*} Y_1^*, L_{x^*} Y_2^*\}$ также инволютивно, поскольку $[Y_1^*, Y_2^*] = [Y_1^*, L_{x^*} Y_1^*] = [Y_1^*, L_{x^*} Y_2^*] = [Y_2^*, L_{x^*} Y_2^*] = [Y_2^*, L_{x^*} Y_1^*] = [L_{x^*} Y_1^*, L_{x^*} Y_2^*] = 0$,

$$\text{где } L_{x^*} Y_1^* = [X^*, Y_1^*] = \frac{\partial Y_1^*}{\partial x^*} X^* - \frac{\partial X^*}{\partial x^*} Y_1^* = -\frac{\partial X^*}{\partial x^*} Y_1^* = |0, -a_{32}, -a_{31}, 0, 0, 0|^T;$$

$$L_{x^*} Y_2^* = [X^*, Y_2^*] = \frac{\partial Y_2^*}{\partial x^*} X^* - \frac{\partial X^*}{\partial x^*} Y_2^* = -\frac{\partial X^*}{\partial x^*} Y_2^* = |0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0|^T;$$

$$-\frac{\partial \mathbf{X}^*}{\partial \mathbf{x}^*} \mathbf{Y}_1^* = \begin{vmatrix} a_{11} + 2a_{12}x_1 & a_{124}x_4 & 0 & a_{124}x_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{41} & 0 & 1 \\ a_{51} & -a_{524} \frac{x_4}{x_2^2} & 0 & \frac{a_{524}}{x_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -a_{23} \\ -a_{31} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

При этом матрица $R_1 = (\mathbf{Y}_1^*, \mathbf{Y}_2^*, L_x^* \mathbf{Y}_1^*, L_x^* \mathbf{Y}_2^*)$ имеет ранг равный 4, $m_1 = \dim M^{1*} = 4$.

Рассмотрим распределение $M^{2*} = \text{span}\{\mathbf{Y}_1^*, \mathbf{Y}_2^*, L_x^* \mathbf{Y}_1^*, L_x^* \mathbf{Y}_2^*, L_x^2 \mathbf{Y}_1^*, L_x^2 \mathbf{Y}_2^*\}$,

$$\text{где } L_x^2 \mathbf{Y}_1^* = [X^*, L_x^* \mathbf{Y}_1^*] = \frac{\partial(L_x^* \mathbf{Y}_1^*)}{\partial \mathbf{x}^*} X^* - \frac{\partial X^*}{\partial \mathbf{x}^*} L_x^* \mathbf{Y}_1^* = -\frac{\partial X^*}{\partial \mathbf{x}^*} L_x^* \mathbf{Y}_1^* =$$

$$= \left[a_{23}a_{124}x_4, a_{23}(a_{21} + a_{31}), a_{31}^2, 0, -\frac{a_{23}a_{524}x_4}{x_2^2}, 0 \right]^T;$$

$$L_x^2 \mathbf{Y}_2^* = [X^*, L_x^* \mathbf{Y}_2^*] = \frac{\partial(L_x^* \mathbf{Y}_2^*)}{\partial \mathbf{x}^*} X^* - \frac{\partial X^*}{\partial \mathbf{x}^*} L_x^* \mathbf{Y}_2^* = \left[a_{124}x_2, 0, 0, a_{41}, \frac{a_{524}}{x_2}, 0 \right]^T.$$

Распределение M^{2*} имеет следующую размерность:

$$\dim M^{2*} = \text{rank}\{\mathbf{Y}_1^*, \mathbf{Y}_2^*, L_x^* \mathbf{Y}_1^*, L_x^* \mathbf{Y}_2^*, L_x^2 \mathbf{Y}_1^*, L_x^2 \mathbf{Y}_2^*\} = 6.$$

Распределение M^{2*} инволютивно. Используя теорию о линейном эквиваленте для нелинейной аффинной системы с векторным управлением [2, теорема 1.16], получим, что индексы управляемости k_1 и k_2 для рассматриваемой системы управления одинаковы: $k_1 = k_2 = 3$, и имеются две клетки канонической формы Бруновского.

Таким образом, налицо следующий эквивалент исходной математической модели в форме Бруновского:

$$\begin{aligned} \frac{dy_i}{dt} &= y_{i+1}, \quad i = 1, 2, 4, 5; \\ \frac{dy_i}{dt} &= v_k, \quad i = 3, 6; \quad k = i/3. \end{aligned} \quad (18)$$

Следовательно, известно, что существуют некоторые преобразования $y_1 = T_1(\mathbf{x}^*)$ и $y_4 = T_2(\mathbf{x}^*)$, из которых путем последовательного дифференцирования функций $T_1(\mathbf{x}^*)$ и $T_2(\mathbf{x}^*)$ вдоль векторного поля $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}^* + u_1^* \mathbf{Y}_1^* + u_2^* \mathbf{Y}_2^*$ можно определить, соответственно y_2, y_3 и y_5, y_6 . Получим систему дифференциальных уравнений, определяющих функции $T_1(\mathbf{x}^*)$ и $T_2(\mathbf{x}^*)$. Для этого вначале продифференцируем вдоль векторного поля \mathbf{X}_1 эти функции:

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2 = L_{\mathbf{X}_1} T_2(\mathbf{x}^*) = L_{\mathbf{X}^*} T_1(\mathbf{x}^*) + u_1^* L_{\mathbf{Y}_1^*} T_1(\mathbf{x}^*) + u_2^* L_{\mathbf{Y}_2^*} T_1(\mathbf{x}^*); \quad (19)$$

$$\frac{dy_4}{dt} = y_5 = L_{\mathbf{X}_1} T_2(\mathbf{x}^*) = L_{\mathbf{X}^*} T_2(\mathbf{x}^*) + u_1^* L_{\mathbf{Y}_1^*} T_2(\mathbf{x}^*) + u_2^* L_{\mathbf{Y}_2^*} T_2(\mathbf{x}^*), \quad (20)$$

где $L_{\mathbf{X}_1} T_i(\mathbf{x}^*)$, $L_{\mathbf{X}^*} T_i(\mathbf{x}^*)$, $L_{\mathbf{Y}_1^*} T_i(\mathbf{x}^*)$, $L_{\mathbf{Y}_2^*} T_i(\mathbf{x}^*)$ – производные Ли функций $T_i(\mathbf{x}^*)$, $i = 1, 2$, вдоль, соответственно, векторных полей $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}^* + u_1^* \mathbf{Y}_1^* + u_2^* \mathbf{Y}_2^*$, \mathbf{X}^* , \mathbf{Y}_1^* и \mathbf{Y}_2^* .

Поскольку из выражения (18) следует, что y_2 и y_5 в соотношениях (19), (20) не зависят от управлений u_1^* и u_2^* , то имеем:

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{Y}_1^*} T_1(\mathbf{x}^*) &= \left\langle \frac{\partial T_1(\mathbf{x}^*)}{\partial \mathbf{x}^*}, \mathbf{Y}_1^* \right\rangle = \frac{\partial T_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} \cdot 0 + \frac{\partial T_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2} \cdot 0 + \frac{\partial T_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_3} \cdot 1 + \\ &+ \frac{\partial T_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_4} \cdot 0 + \frac{\partial T_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_5} \cdot 0 + \frac{\partial T_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_6} \cdot 0 = 0; \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{Y}_2^*} T_1(\mathbf{x}^*) &= \left\langle \frac{\partial T_1(\mathbf{x}^*)}{\partial \mathbf{x}^*}, \mathbf{Y}_2^* \right\rangle = \frac{\partial T_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} \cdot 0 + \frac{\partial T_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2} \cdot 0 + \frac{\partial T_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_3} \cdot 0 + \\ &+ \frac{\partial T_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_4} \cdot 0 + \frac{\partial T_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_5} \cdot 0 + \frac{\partial T_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_6} \cdot 1 = 0; \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{Y}_1^*} T_2(\mathbf{x}^*) &= \left\langle \frac{\partial T_2(\mathbf{x}^*)}{\partial \mathbf{x}^*}, \mathbf{Y}_1^* \right\rangle = \frac{\partial T_2(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} \cdot 0 + \frac{\partial T_2(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2} \cdot 0 + \frac{\partial T_2(\mathbf{x}^*)}{\partial x_3} \cdot 1 + \\ &+ \frac{\partial T_2(\mathbf{x}^*)}{\partial x_4} \cdot 0 + \frac{\partial T_2(\mathbf{x}^*)}{\partial x_5} \cdot 0 + \frac{\partial T_2(\mathbf{x}^*)}{\partial x_6} \cdot 0 = 0; \end{aligned} \quad (23)$$

$$L_{Y_2^*} T_2(\mathbf{x}^*) = \left\langle \frac{\partial T_2(\mathbf{x}^*)}{\partial \mathbf{x}^*}, \mathbf{Y}_2^* \right\rangle = \frac{\partial T_2(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} \cdot 0 + \frac{\partial T_2(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2} \cdot 0 + \frac{\partial T_2(\mathbf{x}^*)}{\partial x_3} \cdot 0 + \frac{\partial T_2(\mathbf{x}^*)}{\partial x_4} \cdot 0 + \frac{\partial T_2(\mathbf{x}^*)}{\partial x_5} \cdot 0 + \frac{\partial T_2(\mathbf{x}^*)}{\partial x_6} \cdot 0. \quad (24)$$

Из выражений (21) – (24) следует, что функции $T_1(\mathbf{x})$ и $T_2(\mathbf{x})$ не зависят от x_3 и x_6 .

Дифференцируя $y_2 = L_{X^*} T_1(x^*)$ и $y_5 = L_{X^*} T_2(x^*)$ вдоль векторного поля X_1 , получим:

$$\frac{dy_2}{dt} = y_3 = L_{X_1}(L_{X^*} T_1) = L_{X^*}^2 T_1 + u_1^* L_{Y_1^*}(L_{X^*} T_1) + u_2^* L_{Y_2^*}(L_{X^*} T_1); \quad (25)$$

$$\frac{dy_5}{dt} = y_6 = L_{X_1}(L_{X^*} T_2) = L_{X^*}^2 T_2 + u_1^* L_{Y_1^*}(L_{X^*} T_2) + u_2^* L_{Y_2^*}(L_{X^*} T_2(\mathbf{x}^*)). \quad (26)$$

Из выражения (18) следует, что y_3 и y_6 в соотношениях (25), (26) не зависят от управлений u_1^* и u_2^* , поэтому имеем

$$L_{Y_1^*}(L_{X^*} T_1) = L_{Y_2^*}(L_{X^*} T_1) = L_{Y_1^*}(L_{X^*} T_2) = L_{Y_2^*}(L_{X^*} T_2) = 0. \quad (27)$$

Для дальнейших вычислений воспользуемся известной теоремой [3, стр. 180].

Теорема. Пусть имеются $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ – гладкие векторные функции и $T_1(\mathbf{x})$ – скалярная функция векторного аргумента ($\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{x} \in R^n; T_1 \in R$) и выполняются соотношения

$$L_g L_f^i T_1(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-1, \quad L_g L_f^m \alpha(\mathbf{x}) \neq 0, \quad (28)$$

тогда справедливо выражение

$$L_{ad_f^j g} L_f^k T_1(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq j+k \leq m-1, \\ (-1)^j L_g L_f^m T_1(\mathbf{x}) \neq 0, & j+k = m. \end{cases} \quad (29)$$

Рассмотрим случай, когда $k=0$, тогда из соотношений (28) $L_g L_f T_1(\mathbf{x}) = L_g L_f^2 T_1(\mathbf{x}) = \dots = L_g L_f^{m-1} T_1(\mathbf{x}) = 0$, $L_g L_f^m T_1(\mathbf{x}) \neq 0$ следует:

$$L_{ad_f^j g} T_1(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{при } j=0, 1, \dots, m-1, \quad L_{ad_f^m g} T_1(\mathbf{x}) \neq 0. \quad (30)$$

Известно [3], что производная Ли $L_f T_1(\mathbf{x})$ скалярной функции $T_1(\mathbf{x})$ векторного аргумента по векторной функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ($T_1(\mathbf{x}) \in R$; $\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in R^n$) может быть определена несколькими эквивалентными выражениями:

$$L_f T_1(\mathbf{x}) = \frac{dT_1(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla T_1(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial T_1(\mathbf{x})}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x}), \quad (31)$$

где $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ – оператор, равносильный оператору дифференцирования $\frac{d}{d\mathbf{x}}$ по векторному аргументу. Поэтому соотношения (30) можно, используя выражения (31), записать в виде

$$\nabla T_1(\mathbf{x}) ad_f^j \mathbf{g} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1, \quad \nabla T_1(\mathbf{x}) ad_f^m \mathbf{g} \neq 0. \quad (32)$$

Используя выражения (28) – (32), из соотношений (27) получим

$$\begin{aligned} L_{Y_1^*}(L_{X^*} T_1(\mathbf{x}^*)) &= \left\langle \frac{\partial T_1(\mathbf{x}^*)}{\partial \mathbf{x}^*}, L_{X^*} Y_1^* \right\rangle = \frac{\partial T_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} \cdot 0 + \frac{\partial T_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2} \cdot (-a_{23}) + \\ &+ \frac{\partial T_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_3} \cdot (-a_{31}) + \frac{\partial T_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_4} \cdot 0 + \frac{\partial T_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_5} \cdot 0 + \frac{\partial T_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_6} \cdot 0 = 0; \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} L_{Y_2^*}(L_{X^*} T_1(\mathbf{x}^*)) &= \left\langle \frac{\partial T_1(\mathbf{x}^*)}{\partial \mathbf{x}^*}, L_{X^*} Y_2^* \right\rangle = \frac{\partial T_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} \cdot 0 + \frac{\partial T_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2} \cdot 0 + \frac{\partial T_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_3} \cdot 0 + \\ &+ \frac{\partial T_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_4} \cdot (-1) + \frac{\partial T_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_5} \cdot 0 + \frac{\partial T_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_6} \cdot 0 = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Поскольку функция $T_1(\mathbf{x}^*)$ не зависит от x_3 , то из выражения (33) следует, что она не зависит и от x_2 , а из выражения (34) получим и независимость $T_1(\mathbf{x}^*)$ от аргумента x_4 . Таким образом, функция $T_1(\mathbf{x}^*)$ может зависеть только от аргументов x_1 и x_5 .

С помощью соотношений, аналогичных (33), (34), нетрудно получить, что функция $T_2(\mathbf{x}^*)$ не зависит от аргументов x_2 , x_4 и, таким образом, может быть функцией только аргументов x_1 и x_5 .

Дифференцируя $y_3 = L_{X^*}^2 T_1(\mathbf{x}^*)$ и $y_5 = L_{X^*}^2 T_2(\mathbf{x}^*)$ вдоль векторного поля X_1 , получим

$$\frac{dy_3}{dt} = L_{X_1}(L_X^2 T_1(\mathbf{x}^*)) = L_{X^*}^3 T_1 + u_1^* L_{Y_1^*}(L_X^2 T_1) + u_2^* L_{Y_2^*}(L_X^2 T_1); \quad (35)$$

$$\frac{dy_6}{dt} = L_{X_1}(L_X^2 T_2(\mathbf{x}^*)) = L_{X^*}^3 T_2 + u_1^* L_{Y_1^*}(L_X^2 T_2) + u_2^* L_{Y_2^*}(L_X^2 T_2). \quad (36)$$

Из этих выражений следует, что $L_{Y_1^*}(L_X^2 T_1(\mathbf{x}^*)) \neq 0$ и $L_{Y_2^*}(L_X^2 T_2(\mathbf{x}^*)) \neq 0$

или

$$L_{Y_1^*}(L_X^2 T_1(\mathbf{x})) = \left\langle \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{x}}, L_X^2 \mathbf{Y}_1^* \right\rangle = \frac{\partial T_1}{\partial x_1} \cdot (a_{23} a_{124} x_4) + \frac{\partial T_1}{\partial x_5} \cdot \left(-\frac{a_{23} a_{524} x_4}{x_2^2} \right) \neq 0; \quad (37)$$

$$L_{Y_2^*}(L_X^2 T_2(\mathbf{x})) = \left\langle \frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{x}}, L_X^2 \mathbf{Y}_2^* \right\rangle = \frac{\partial T_2}{\partial x_1} \cdot (a_{124} x_4) + \frac{\partial T_2}{\partial x_5} \cdot \left(\frac{a_{524}}{x_2} \right) \neq 0. \quad (38)$$

При $x_2 \neq 0$ и $x_4 \neq 0$ одним из возможных решений системы неравенств (37), (38) может быть $T_1(\mathbf{x}) = x_1$ и $T_2(\mathbf{x}) = x_5$.

Известно [2], что для того чтобы существовало преобразование (19), (20), (25), (26), (35), (36) необходимо и достаточно, чтобы матрица

$$\mathbf{Q} = \begin{vmatrix} L_{Y_1^*}(L_X^2 T_1(\mathbf{x}^*)) & L_{Y_2^*}(L_X^2 T_1(\mathbf{x}^*)) \\ L_{Y_1^*}(L_X^2 T_2(\mathbf{x}^*)) & L_{Y_2^*}(L_X^2 T_2(\mathbf{x}^*)) \end{vmatrix}$$

была невырождена. Проверим это, вычислив элементы матрицы \mathbf{Q} и ее определитель:

$$L_{Y_1^*}(L_X^2 T_1(\mathbf{x}^*)) = \left\langle \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{x}^*}, L_X^2 \mathbf{Y}_1^* \right\rangle = \frac{\partial T_1}{\partial x_1} \cdot a_{124} a_{23} x_4 = a_{124} a_{23} x_4; \quad (39)$$

$$L_{Y_1^*}(L_X^2 T_1(\mathbf{x}^*)) = \left\langle \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{x}^*}, L_X^2 \mathbf{Y}_2^* \right\rangle = \frac{\partial T_1}{\partial x_1} \cdot a_{124} x_2 = a_{124} x_2; \quad (40)$$

$$L_{Y_1^*}(L_X^2 T_2(\mathbf{x}^*)) = \left\langle \frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{x}^*}, L_X^2 \mathbf{Y}_1^* \right\rangle = \frac{\partial T_2}{\partial x_5} \cdot \left(-\frac{a_{23} a_{524} x_4}{x_2^2} \right) = -a_{23} a_{524} \frac{x_4}{x_2^2}; \quad (41)$$

$$L_{Y_2^*}(L_X^2 T_2(\mathbf{x}^*)) = \left\langle \frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{x}^*}, L_X^2 \mathbf{Y}_2^* \right\rangle = \frac{\partial T_2}{\partial x_5} \cdot \frac{a_{524}}{x_2} = \frac{a_{524}}{x_2}; \quad (42)$$

$$\det \mathbf{Q} = \begin{vmatrix} a_{124} a_{23} x_4 & a_{124} x_2 \\ -a_{23} a_{524} \frac{x_4}{x_2^2} & \frac{a_{524}}{x_2} \end{vmatrix} = 2a_{124} a_{23} a_{524} \frac{x_4}{x_2}.$$

Таким образом, при $x_2 \neq 0$ и $x_4 \neq 0$ преобразования (19), (20), (25), (26), (35), (36) существуют.

Зная $T_1(\mathbf{x}^*)$ и $T_2(\mathbf{x}^*)$, определим функции перехода к форме Бруновского (18):

$$\begin{aligned}
 y_1 &= T_1(\mathbf{x}) = x_1; \quad y_4 = T_2(\mathbf{x}) = x_5; \\
 y_2 &= L_{\mathbf{X}^*} T_1(\mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial T_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} \mathbf{X}^* = a_{11}x_1 + a_{21}x_1^2 + a_{124}x_2x_4; \\
 y_5 &= L_{\mathbf{X}^*} T_5(\mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial T_5(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} \mathbf{X}_i^* = a_{51}x_1 + a_{524} \frac{x_4}{x_2}; \\
 y_3 &= L_{\mathbf{X}^*}^2 T_1(\mathbf{x}^*) = L_{\mathbf{X}^*}(L_{\mathbf{X}^*} T_1(\mathbf{x}^*)) = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial(L_{\mathbf{X}^*} T_1(\mathbf{x}^*))}{\partial x_i} \mathbf{X}_i^* = (a_{11} + 2a_{12}x_1) \cdot \\
 &\cdot (a_{11}x_1 + a_{12}x_1^2 + a_{124}x_2x_4) + a_{124}x_4(a_{21}x_2 + a_{23}x_{31}) + a_{124}x_2(a_{41}x_4 + a_6); \\
 y_6 &= L_{\mathbf{X}^*}^2 T_2(\mathbf{x}^*) = L_{\mathbf{X}^*}(L_{\mathbf{X}^*} T_2(\mathbf{x}^*)) = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial(L_{\mathbf{X}^*} T_2(\mathbf{x}^*))}{\partial x_i} \mathbf{X}_i^* = \\
 &= a_{51}(a_{11}x_1 + a_{12}x_1^2 + a_{124}x_2x_4) + \left(-a_{524} \frac{x_4}{x_2}\right) (a_{21}x_2 + a_{23}x_{31}) + \frac{a_{524}}{x_2} (a_{41}x_4 + a_6).
 \end{aligned}$$

Из вида уравнений (19), (20), (25), (26), (35), (36) следует, что управления v_1, v_2 для системы уравнений в форме Бруновского (18) определяются из выражений (35), (36):

$$\begin{aligned}
 v_1 &= L_{\mathbf{X}^*}^3 T_1(\mathbf{x}^*) + u_1^* L_{\mathbf{Y}_1^*} (L_{\mathbf{X}^*}^2 T_1(\mathbf{x}^*)) + u_2^* L_{\mathbf{Y}_2^*} (L_{\mathbf{X}^*}^2 T_1(\mathbf{x}^*)); \\
 v_2 &= L_{\mathbf{X}^*}^3 T_2(\mathbf{x}^*) + u_1^* L_{\mathbf{Y}_1^*} (L_{\mathbf{X}^*}^2 T_2(\mathbf{x}^*)) + u_2^* L_{\mathbf{Y}_2^*} (L_{\mathbf{X}^*}^2 T_2(\mathbf{x}^*)).
 \end{aligned} \tag{43}$$

Систему уравнений (18) можно использовать для определения оптимальных управлений v_1, v_2 . Затем, зная v_1 и v_2 – определить u_2^* и u_1^* из системы уравнений (43), а потом найти u_1 и u_2 :

$$\begin{aligned}
 u_2^* &= \frac{1}{\det \mathbf{Q}} \left[L_{\mathbf{Y}_1^*} (L_{\mathbf{X}^*}^2 T_1(\mathbf{x}^*)) (v_2 - L_{\mathbf{X}^*}^3 T_2(\mathbf{x})) - L_{\mathbf{Y}_1^*} (L_{\mathbf{X}^*}^2 T_2(\mathbf{x}^*)) (v_1 - L_{\mathbf{X}^*}^3 T_1(\mathbf{x})) \right]; \\
 u_1^* &= \frac{1}{L_{\mathbf{Y}_1^*} (L_{\mathbf{X}^*}^2 T_1(\mathbf{x}^*))} \left[v_1 - L_{\mathbf{X}^*}^3 T_1(\mathbf{x}) - u_2^* L_{\mathbf{Y}_2^*} (L_{\mathbf{X}^*}^2 T_1(\mathbf{x}^*)) \right]; \\
 u_1 &= u_1^*; \quad u_2 = \int_0^T u_1^* dt.
 \end{aligned}$$

Сравнение процессов в математических моделях асинхронного привода (1), (2), (16) и (18) в разных режимах работы привода подтвердило правильность линеаризации обратной связью исходной модели (1) и работоспособность модели объекта в форме Бруновского.

Выводы. Таким образом, впервые средствами дифференциальной геометрии получена работоспособная математическая модель асинхронного привода в канонической форме Бруновского, которую можно использовать для синтеза системы управления асинхронным приводом.

Список литературы: 1. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5-и томах. Т. 5: Методы современной теории управления / Под ред. *К.А. Пупкова, Н.Д. Егунова*. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 784 с. 2. *Краснощёнченко В.И., Грищенко А.П.* Нелинейные системы: геометрический метод анализа и синтеза. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2005. – 520 с. 3. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Т.2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы: Учебное пособие. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 464 с. 4. *Kim D.P.* Automatic Control. Theory Nonlinear and Multivariable System. – Seoul: Harnol, 2000. – 558 p. 5. *Marino R., Tomei P.* Nonlinear Control Design. – Prentice Hall Europe, 1995. – 396 p. 6. *Краснощёнченко В.И.* Синтез регуляторов для нелинейных систем, приводимых к канонической форме Бруновского // Труды МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 1997. – № 569. – С. 28 – 33. 7. *Краснощёнченко В.И.* О линейных эквивалентах нелинейных систем // Труды МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 1999. – № 575. – С. 39 – 45. 8. *Дмитриенко В.Д., Заковоротный А.Ю.* Динамическая линеаризация с помощью обратной связи математической модели тягового привода // Вісник НТУ «ХПІ». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Інформатика і моделювання. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2006. – № 40. – С. 49–57. 9. *Сандлер А.С., Сарбатов П.С.* Автоматическое частотное управление асинхронными двигателями. – М.: Энергия, 1974. – 328 с.

Поступила в редакцию 25.04.2007