

М.И. Баранов

## КВАНТОВОФИЗИЧЕСКАЯ ПРИРОДА ПОВЕРХНОСТНОГО ЭФФЕКТА В МЕТАЛЛИЧЕСКОМ ПРОВОДНИКЕ С ПЕРЕМЕННЫМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ТОКОМ ПРОВОДИМОСТИ

*На основі фундаментальних положень квантової фізики в наближеному вигляді дано теоретичне обґрунтування гіпотези про квантовомеханічну природу прояву поверхневого ефекту у круглому металевому провіднику циліндричної форми із змінним електричним струмом провідності. Наведено, що імовірна радіальна зміна щільності подовжняно осцилюючих вільних електронів, що дрейфують в мікроструктурі провідника, може викликати прояв у ній скін-ефекту.*

*На основе фундаментальных положений квантовой физики в приближенном виде дано теоретическое обоснование гипотезе о квантовомеханической природе проявления поверхностного эффекта в круглом металлическом проводнике цилиндрической формы с переменным электрическим током проводимости. Показано, что вероятностное радиальное изменение плотности продольно осциллирующих дрейфующих свободных электронов в микроструктуре проводника может вызывать проявление в нем скин-эффекта.*

**Введение.** В [1] автором было выдвинуто новое научное предположение (гипотеза) для возможного физического объяснения известного в классической электродинамике поверхностного эффекта (ПЭ) в металлическом проводнике с переменным электрическим током проводимости  $i_{\text{пр}}(t)$ , связанного с неравномерным распределением тока по поперечному сечению проводника. Данный электрофизический эффект в настоящее время в макроскопической теории электромагнитного поля, базирующейся на положениях классической физики, описывается фундаментальными уравнениями Максвелла [2], позволяющими с учетом соответствующих краевых условий в установившемся или нестационарном режимах протекания в проводнике тока проводимости  $i_{\text{пр}}(t)$  с различными амплитудно-временными параметрами (АВП) устанавливать по его поперечному сечению распределения плотности тока  $\delta_{\text{пр}}(t)$ , напряженностей электрического  $E(t)$  и магнитного  $H(t)$  полей. О физическом механизме, лежащем в основе ПЭ в металлическом проводнике с переменным во времени  $t$  электрическим током проводимости  $i_{\text{пр}}(t)$ , классическая электродинамика умалчивает. Причиной тому является невозможность научного объяснения с позиций классической физики основополагающих первопричин, приводящих к проявлению ПЭ в проводнике с переменным током  $i_{\text{пр}}(t)$ . В связи с чем автор и попытался в [1] гипотетически дать в общих чертах возможное физическое объяснение явлению ПЭ в круглом металлическом проводнике цилиндрической формы с переменным аксиальным током  $i_{\text{пр}}(t)$  с квантовомеханических позиций, основанных на представлении дрейфующего по кристаллической решетке проводника свободного электрона как квантового объекта в виде линейного гармонического электронного осциллятора, квантовано совершающего под действием внешней квазиупругой электрической силы  $F_{ez}(t)$  продольные колебания с круговой частотой  $\omega_{ez}$ . Указанная продольная сила  $F_{ez}(t) = e_0 \cdot E_z(t)$ , где  $e_0 = 1,602 \cdot 10^{-19}$  Кл – электрический заряд электрона [3], а  $E_z(t) = U_z(t) / l_{\text{пр}}$  – усредненная продольная напряженность электрического поля в металлической структуре проводника, определяется здесь переменным электрическим напряжением  $U_z(t)$  между противоположными краями проводника длиной  $l_{\text{пр}}$ .

Суть выдвинутой в работе [1] гипотезы относительно ПЭ в металлическом проводнике с переменным током  $i_{\text{пр}}(t)$  коротко заключается в следующем. В

связи с возможным заметным увеличением (сверх энергии уровня Ферми  $W_F$  [4]) полной квантованной энергии свободных электронов  $W_e$  из-за их продольных осциллирующих колебаний с круговой частотой  $\omega_{ez}$  во внешнем переменном электрическом поле с продольной напряженностью  $E_z(t)$  и ее приближением к работе выхода  $W_B$  [1, 5] вероятность радиального движения продольно дрейфующих электронов к наружной поверхности проводника возрастает. Это, как указывается в [1], обеспечивает переход свободных электронов на более высокие квантованные энергетические уровни, что способствует более вероятному выходу электронов из потенциальной энергетической ямы металла проводника и изменению по радиусу проводника концентрации  $n_{er}$  дрейфующих носителей элементарного электричества. Это согласно [1], возможно, и может приводить к проявлению ПЭ в металлическом проводнике с переменным током  $i_{\text{пр}}(t)$ . При приложении же к данному проводнику постоянного электрического напряжения и протекания в нем постоянного тока проводимости указанные продольные колебания элементарных носителей электричества в его металле отсутствуют, имеет место односторонний продольный дрейф его квантуемых по энергиям свободных электронов, не приводящий к скольким-нибудь ощутимым изменениям их пренебрежимо малой по сравнению с величиной  $W_F$  энергии электронов  $W_e$ . А раз так, то вероятностная концентрация  $n_{er}$  свободных электронов проводника, находящихся в основном на энергетическом уровне Ферми [3, 4], по его радиусу будет здесь практически неизменной и ПЭ в таком случае в металле проводника наблюдаться не будет. Выдвинутая автором в [1] гипотеза, касающаяся научных основ физического механизма проявления ПЭ в проводнике с переменным электрическим током проводимости  $i_{\text{пр}}(t)$  различных АВП, нуждается в теоретическом обосновании.

**Постановка квантовомеханической задачи двумерного волнового распределения свободных электронов в проводнике.** Примем, что по сплошному круглому однородному металлическому проводнику цилиндрической формы наружным радиусом  $r_{\text{пр}}$  и длиной  $l_{\text{пр}}$  вдоль его продольной оси  $OZ$  протекает переменный во времени  $t$  электрический ток проводимости  $i_{\text{пр}}(t)$  с различными АВП и с круговой частотой  $\omega_{ez}$  (рис. 1). Считаем, что выполняется условие вида  $l_{\text{пр}} \gg r_{\text{пр}}$ , а исследуемый проводник неподвижно

размещен в изоляционной воздушной среде при нормальных атмосферных условиях (при температуре  $\theta_0 = 0^\circ\text{C}$  и давлении  $1,013 \cdot 10^5 \text{ Па}$  [3]).

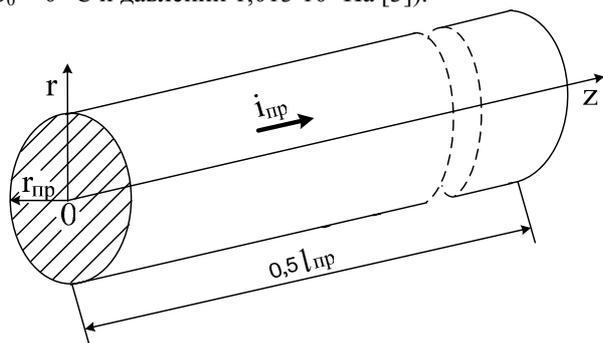


Рис. 1

Полагаем, что в проводнике для фиксированных значений текущего радиуса  $r$  и продольной координаты  $z$  его поперечного сечения  $S_{\text{пр}} = \pi \cdot r_{\text{пр}}^2$  поведение в межатомном пространстве его металла дрейфующих нерелятивистских свободных электронов, характеризующихся корпускулярно-волновым дуализмом, приближенно подчиняется в цилиндрической системе координат временному двумерному волновому уравнению Шредингера и описывается на его основании волновыми  $\psi(r, z, t)$  – функциями, схожими по своей физической сути с электронными волнами де Бройля [1, 6, 7]. Как известно, данные волновые  $\psi(r, z, t)$  функции определяют в металлическом проводнике с переменным током проводимости  $i_{\text{пр}}(t)$  временные закономерности радиально-продольного распределения дрейфующих свободных электронов и формируют в металлической структуре проводника его волновые электронные пакеты (ВЭП) [8]. Пусть ВЭП или квантованные дискретные наборы волновых  $\psi(r, z, t)$ -функций рассматриваемого проводника распределяются вдоль его радиуса  $r$  и продольной координаты  $z$  в виде периодических макроскопических структур, содержащих относительно "горячие" и "холодные" участки проводника [1, 9]. Волновое продольное распределение дрейфующих свободных электронов для данной задачи ограничим лишь узкими аксиальными зонами квантованных продольных колебаний линейных электронных осцилляторов металла проводника, линейные размеры которых значительно меньше как габаритных поперечных, так и продольных размеров рассматриваемого проводника.

Исходя из известных положений квантовой физики, считаем, что свободные электроны в металле исследуемого проводника тождественны, не различимы друг от друга и подчиняются квантовой статистике Ферми-Дирака [3]. Кроме того, при решении данной квантовомеханической задачи принимаем, что полная квантованная дополнительная энергия свободных электронов  $W_e \ll W_F$  определяется как их продольным, так и радиальным движением, а взаимодействия свободных электронов между собой и с ионами кристаллической решетки металла проводника отсутствуют (одноэлектронная модель Хартри-Фока) [1, 10]. Полагаем, что продольное движение свободных электронов в металле рассматриваемого проводника связано с их дрейфом за счет приложенного к его концам переменного электрического напряжения  $U_z(t)$  [3], а их радиальное движение вызвано вероятно-

стным перемещением свободных электронов к наружной поверхности проводника из-за увеличения значений их энергии  $W_e$  [7]. Предполагаем, что последнее вызвано возможным получением электронами за счет их осциллирующих с круговой частотой  $\omega_{ez}$  в соответствии с законом изменения приложенного к проводнику переменного электрического напряжения  $U_z(t)$  продольных колебаний дополнительной квантованной энергии  $W_{ek}$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$  – квантовое число для линейного электронного осциллятора [3, 10]. Считаем, что для свободного электрона потенциальная функция (энергия)  $U(z)$  линейного гармонического квантового электронного осциллятора определяется известным соотношением вида [10]:  $U(z) = m_e \cdot \omega_{ez}^2 \cdot z^2 / 2$ , где  $m_e = 9,108 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$  – масса покоя электрона [3]. Ограничимся приближенным квантовомеханическим решением, справедливым для потенциальной энергетической ямы металлического проводника с идеально отражающими свободные электроны граничными стенками [3, 7]. Используя указанные выше соображения, рассмотрим случай, когда потенциал  $V_{er}$  силового радиального поля, в котором движутся вдоль радиальной координаты  $r$  свободные электроны металла проводника, равен нулю. Требуется с учетом принятых допущений в приближенном виде выполнить квантовомеханическую оценку волнового радиально-продольного распределения дрейфующих свободных электронов в рассматриваемом металлическом проводнике с переменным электрическим током  $i_{\text{пр}}(t)$  и дать найденному двумерному распределению электронов согласно их волновым  $\psi(r, z, t)$ -функциям физическую интерпретацию, объясняющую с позиций квантовой физики возможность проявления ПЭ в металле проводника из-за продольных квантованных осциллирующих колебаний в нем с круговой частотой  $\omega_{ez}$  его продольно дрейфующих свободных электронов.

**Основные волновые уравнения и расчетные соотношения для дрейфующих электронов проводника.** Для рассматриваемой квантовомеханической задачи временное двумерное уравнение Шредингера, определяющее волновые радиально-продольные распределения дрейфующих и осциллирующих с круговой частотой  $\omega_{ez}$  в продольном силовом поле с потенциальной энергией  $U(z)$  нерелятивистских свободных электронов в металле рассматриваемого проводника с переменным аксиальным электрическим током  $i_{\text{пр}}(t)$ , принимает следующий вид [4, 11]:

$$i \frac{\hbar}{2\pi} \cdot \frac{\partial \psi(r, z, t)}{\partial t} = - \frac{\hbar^2}{8\pi^2 m_e} \Delta \psi(r, z, t) + U(z) \cdot \psi(r, z, t), \quad (1)$$

где  $\psi(r, z, t)$  – двумерная волновая пси-функция, описывающая во времени  $t$  радиально-продольные распределения дрейфующих свободных электронов в металлической структуре проводника;  $\Delta$  – оператор Лапласа;  $\hbar = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$  – постоянная Планка;  $i = \sqrt{-1}$  – мнимая единица.

При решении линейного однородного дифференциального уравнения (1) воспользуемся известным методом разделения переменных [12]. Решение уравнения (1) тогда можно представить в таком обобщенном виде:

$$\psi(r, z, t) = \varphi(r) \cdot \eta(z) \cdot q(t), \quad (2)$$

где  $\varphi(r)$ ,  $\eta(z)$ , и  $q(t)$  – соответственно радиальная, про-

дольная и временная волновые функции.

После подстановки (2) в уравнение (1), деления его левой и правой частей на величину  $\varphi(r) \cdot \eta(z) \cdot q(t)$  и раскрытия лапласиана в цилиндрических координатах получаем следующие три обыкновенных дифференциальных уравнения, приближенно описывающих пространственно-временное поведение свободного электрона в металле исследуемого проводника:

$$\frac{dq(t)}{dt} + i \frac{2\pi W_e}{h} q(t) = 0; \quad (3)$$

$$\frac{d^2\varphi(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi(r)}{dr} + \frac{8\pi^2 m_e W_{er}}{h^2} \varphi(r) = 0; \quad (4)$$

$$\frac{d^2\eta(z)}{dz^2} + \frac{8\pi^2 m_e}{h^2} (W_{ez} - \frac{m_e \omega_{ez}^2}{2} z^2) \cdot \eta(z) = 0, \quad (5)$$

где  $W_e = (W_{er} + W_{ez})$  – полная энергия свободного электрона (сверх энергии Ферми  $W_F$ ), состоящая из энергии его радиального  $W_{er}$  и продольного  $W_{ez}$  движений в металлической структуре проводника с переменным током проводимости.

Видно, что уравнение (3) описывает временную  $q(t)$ , уравнение (4) – радиальную  $\varphi(r)$ , а уравнение (5) – продольную  $\eta(z)$  составляющие искомой волновой  $\psi(r, z, t)$ -функции, удовлетворяющей исходному волновому уравнению Шредингера (1). При этом рассматриваемые пси-функции  $\psi(r, z, t)$  как решения волнового уравнения (1) в соответствии с принятой в квантовой физике терминологией будем называть собственными волновыми функциями [3, 11]. Причем, последние функции согласно уравнениям (1), (3) – (5) могут существовать лишь при определенных дискретных значениях величин  $W_e$ ,  $W_{er}$  и  $W_{ez}$ , то есть при некоторых значениях  $W_{en}$ ,  $W_{ern}$  и  $W_{ezn}$ , называемых собственными квантованными значениями энергий свободного электрона, для которых  $n = k + 1 = 1, 2, 3, \dots$  – целое квантовое число. Данным квантованным значениям энергий свободного электрона  $W_{en} = (W_{ern} + W_{ezn})$ ,  $W_{ern}$  и  $W_{ezn}$  в (3) – (5) будут соответствовать собственные квантованные волновые функции  $\psi_n(r, z, t) = \varphi_n(r) \cdot \eta_n(z) \cdot q_n(t)$ , являющиеся частными решениями двумерного волнового уравнения Шредингера (1).

**1. Волновое радиальное распределение свободных электронов в проводнике.** Остановимся вначале на решении уравнения (4) применительно к квантованным волновым функциям  $\varphi_n(r)$ , для которого в соответствии с принятыми допущениями будут справедливы следующие приближенные граничные условия:

$$\varphi_n(0) = 0; \quad (6)$$

$$\varphi_n(r_{np}) = 0. \quad (7)$$

Условия (6) и (7) отражают то ограничение, что потенциальная энергетическая яма рассматриваемого проводника с идеально отражающими носители элементарного электричества стенками характеризуется потенциальным барьером бесконечной величины, преодолеть который свободный электрон не в состоянии. В [7] автором было показано, что решение одномерного стационарного уравнения Шредингера (4), являющегося одновременно и уравнением Бесселя [12], с граничными условиями (6) и (7) для квантованной волновой функции  $\varphi_n(r)$  может быть записано в следующем приближенном виде:

$$\varphi_n(r) = 2A_\varphi [1/(\pi k_n r)]^{0,5} \cdot \sin(k_n r), \quad (8)$$

где  $k_n = 2\pi(2m_e W_{ern})^{0,5}/h$  – квантованное волновое число [1];  $A_\varphi$  – произвольная постоянная интегрирования.

При нахождении в (8) постоянной  $A_\varphi$  с учетом одномерного для уравнения (4) характера движения свободного электрона используем следующее условие нормировки для собственной квантованной волновой функции  $\varphi_n(r)$  [8]:

$$2\pi \int_0^{r_{np}} |\varphi_n(r)|^2 r dr = 1, \quad (9)$$

где  $|\varphi_n(r)|$  – модуль квантованной волновой функции  $\varphi_n(r)$ , равный согласно выражению (8) величине  $2A_\varphi [1/(\pi k_n r)]^{0,5} \cdot \sin(k_n r)$

Из (9) после интегрирования для постоянной  $A_\varphi$  находим:

$$A_\varphi = 0,5 \cdot [k_n / r_{np}]^{0,5}. \quad (10)$$

Тогда с учетом (10) решение стационарного уравнения Шредингера (4) совместно с граничными условиями (6) и (7) в окончательном виде можно представить в виде:

$$\varphi_n(r) = [1/(\pi r_{np} r)]^{0,5} \cdot \sin(k_n r). \quad (11)$$

Используя (7) и (11), запишем расчетное соотношение, имеющее важную значимость для физической трактовки решения стационарного уравнения Шредингера (4), а также отыскания для вырожденного электронного газа металла проводника значений волнового числа  $k_n$  и квантованных значений радиальной составляющей полной энергии свободных электронов  $W_{ern}$ :

$$[1/(\pi r_{np}^2)]^{0,5} \cdot \sin(k_n r_{np}) = 0. \quad (12)$$

Из (12) следует, что квантованное волновое число  $k_n$ , определяемое целым квантовым числом  $n = 1, 2, 3, \dots$  может принимать только ряд дискретных значений, соответствующих следующему условию:

$$k_n = n\pi / r_{np}. \quad (13)$$

Тогда с учетом (13) из (8) для собственных квантованных значений радиальной составляющей полной энергии свободного электрона  $W_{ern}$  в металле проводника, образующих его "радиальный" энергетический спектр, имеем:

$$W_{ern} = n^2 h^2 / (8m_e r_{np}^2). \quad (14)$$

На рис. 2 в безразмерном виде приведены согласно полученным выражениям (11) и (13) графические зависимости для волновой радиальной функции вида:  $\varphi_n^*(r^*) = \varphi_n(r^*) \cdot (\pi r_{np}^2)^{0,5} = (r^*)^{-0,5} \cdot \sin(n\pi r^*)$ , где  $r^* = r / r_{np}$

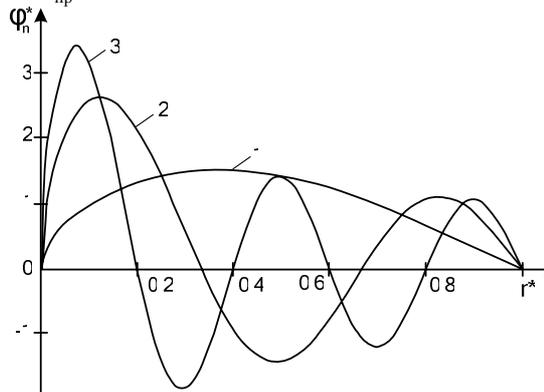


Рис. 2

На рис.3 представлены зависимости, иллюстрирующие в соответствии с данными рис. 2 радиальное распределение безразмерной плотности вероятности  $|\varphi_n^*(r^*)|^2$  для электронов в исследуемом круглом металлическом проводнике. Для кривых 1 на рис. 2 и 3 –  $n = 1$ , кривых 2 –  $n = 3$  и кривых 3 –  $n = 5$ . Из данных рис. 2 и 3 видно, что при характерном для их кривых увеличении квантового числа  $n$  с 1 до 5 происходит заметное возрастание значений волновой функции  $\varphi_n(r^*)$  [7] и определяемой ею плотности вероятности  $\rho_{wm} = |\varphi_n^*(r^*)|^2$  нахождения электронов в радиальных слоях металла проводника, приводящих к вероятностной локализации дрейфующих свободных электронов преимущественно в центральной области поперечного сечения  $S_{np}$  сплошного цилиндрического проводника. При этом значения  $\rho_{wm}$  будут максимальны там, где в соответствии с (11) максимальны квадраты модуля волновой функции  $\varphi_n(r^*)$ .

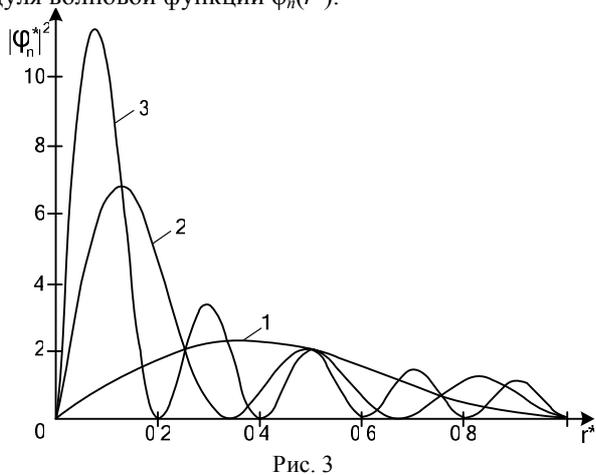


Рис. 3

При этом важно отметить то, что на такую возможность концентрации продольно дрейфующих свободных электронов в проводящей плазменной среде круглого цилиндрического канала сильноточного воздушного искрового разряда с аксиальным аperiодическим импульсом тока указывают расчетно-экспериментальные результаты для изолиний плотности свободных электронов вдоль и поперек такого токового канала, приведенные в [13]. Заметим, что найденные согласно (14) значения энергии  $W_{erm}$  соответствуют квантованию энергетических уровней свободного электрона при его чисто волновом радиальном распределении (без учета влияния частоты его осцилляций  $\omega_{ez}$  в цилиндрическом металлическом проводнике с аксиальным током  $i_{np}(t)$ , ранее описанном автором в [7]. Для решаемой задачи квантованные значения радиальной круговой частоты  $\omega_{ern}$ , радиальной скорости  $v_{ern}$  и длины радиальной электронной волны  $\lambda_{ern}$  для радиально перемещающегося в плоскости поперечного сечения  $S_{np}$  цилиндрического проводника и продольно дрейфующего осциллирующего электрона будут определены ниже после нахождения квантованных значений продольной составляющей полной энергии электрона  $W_{ezn}$ .

**2. Волновое продольное распределение свободных электронов в проводнике.** В исследуемом случае одномерное стационарное уравнение Шредингера (5), описывающее квантовые свойства линейного гармонического электронного осциллятора в металле цилиндрического проводника с переменным аксиальным

током  $i_{np}(t)$  круговой частоты  $\omega_{ez}$ , требуется дополнить следующими граничными условиями:

$$\eta_n(0, 5l_{np}) = 0; \quad (15)$$

$$\eta_n(-0, 5l_{np}) = 0. \quad (16)$$

Решение волнового уравнения Шредингера (5) с граничными условиями (15) и (16) для собственной квантованной волновой функции  $\eta_n(z)$  в отличие от классических решений для линейного гармонического осциллятора из области теоретической физики [14], не учитывающих прикладные электротехнические особенности радиально-продольного распределения переменного электрического тока проводимости  $i_{np}(t)$  круговой частоты  $\omega_{ez}$  в металле цилиндрического проводника, может быть представлено в следующем модифицированном виде [3, 10]:

$$\eta_n(\xi) = \frac{(2\pi m_e \omega_{ez} / h)^{0,25}}{[2^{n-1}(n-1)!(\pi)^{0,5}]^{0,5}} \exp(-0,5\xi^2) \cdot H_{n-1}(\xi), \quad (17)$$

где  $\xi = z \cdot (2\pi m_e \omega_{ez} / h)^{0,5}$  – безразмерная продольная координата для круглого поперечного сечения  $S_{np}$  металлического проводника при  $-0,5l_{np} \leq z \leq 0,5l_{np}$  (для многих электротехнических задач  $0 \leq \xi \leq 10$ );

$$H_{n-1}(\xi) = (-1)^{n-1} \exp(\xi^2) \frac{d^{n-1}[\exp(-\xi^2)]}{d\xi^{n-1}} - \text{полином}$$

Чебышева-Эрмита  $(n-1)$ -го порядка [15, 16];  $n = k + 1 = 1, 2, 3, \dots$  – целое квантовое число;  $k = 0, 1, 2, \dots$  – квантовое число для линейного электронного осциллятора [10].

С учетом (5) и (17) собственные квантованные значения продольной составляющей полной энергии  $W_{ezn}$  аксиально осциллирующего с круговой частотой  $\omega_{ez}$  свободного электрона и регулярно пересекающего в кристаллической решетке металла цилиндрического проводника плоскость его круглого поперечного сечения  $S_{np}$ , образующие его "продольный" энергетический спектр, могут быть рассчитаны по следующей формуле [3, 10]:

$$W_{ezn} = \frac{h\omega_{ez}}{2\pi} (n - 0,5). \quad (18)$$

На рис. 4 в безразмерном виде приведены кривые, характеризующие согласно (17) в рассматриваемом металлическом проводнике при нечетных значениях квантового числа  $n = 1, 3, 5$  продольные распределения найденной нами волновой функции вида:

$$\eta_n^*(\xi) = \eta_{n0}^*(\xi) = [2^{n-1}(n-1)!(\pi)^{0,5}]^{0,5} \cdot \exp(-0,5\xi^2) \times$$

$\times H_{n-1}(\xi)$ . Для кривой 1 на рис. 4 квантовое число  $n = 1$ , для кривой 2 –  $n = 3$ , а для кривой 3 –  $n = 5$ . Видно, что при  $\xi \geq 4$  рассматриваемые безразмерные волновые функции  $\eta_{n0}^*(\xi) = \eta_n^*(\xi) \cdot (2\pi m_e \omega_{ez} / h)^{-0,25}$  практически затухают. Поэтому и вероятность обнаружения в металле цилиндрического проводника осциллирующих с круговой частотой  $\omega_{ez}$  элементарных носителей электричества при  $\xi \geq 4$ , относительно выбранной нами продольной координаты  $z = 0$  для его поперечного сечения  $S_{np}$  (см. рис. 1), для  $n = 1, 3, 5$  будет минимальной.

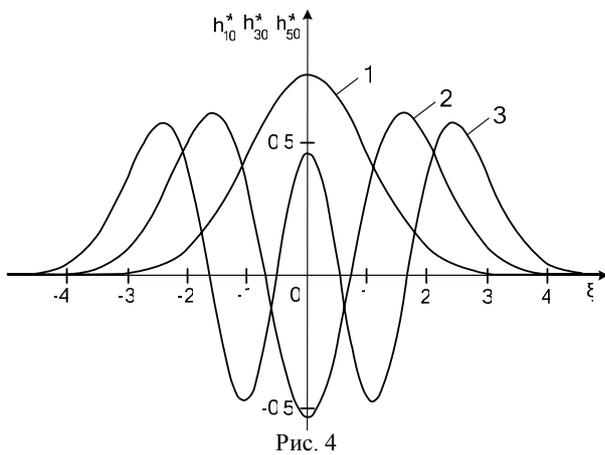


Рис. 4

Определенный научный интерес для выяснения первопричин проявления в исследуемом проводнике ПЭ представляют зависимости волновой функции  $\eta_n(\xi)$  по (17) непосредственно от круговой частоты  $\omega_{ez}$  продольных колебаний дрейфующих свободных электронов. С этой целью преобразуем безразмерный параметр  $\xi$  к виду:  $\xi = z_0^* (2\pi l_{np}^2 \omega_{ez}^* / r_{np}^2)^{0,5}$ , где  $z_0^* = z / l_{np}$ , а  $\omega_{ez}^* = \omega_{ez} m_e r_{np}^2 / h$ . При этом в (17) волновая функция  $\eta_n(\xi)$  преобразуется в волновую функцию вида  $\eta_n(\omega_{ez}^*) = \eta_n^*(\omega_{ez}^*) \cdot (r_{np})^{-0,5}$ .

На рис. 5 представлены графические зависимости для безразмерной волновой функции  $\eta_n^*(\omega_{ez}^*)$  при нечетных значениях квантового числа  $n$ , равных 1 (кривая 1), 3 (кривая 2) и 5 (кривая 3) и следующих численных значениях параметров проводника:  $z_0^* = 0,1$ ;  $l_{np} / r_{np} = 10$ . Из кривых 1-3 на рис. 5 следует, что при  $\omega_{ez}^* \geq 3$  рассматриваемые волновые функции  $\eta_n(\omega_{ez}^*)$  в поперечном сечении  $S_{np}$  круглого металлического проводника для указанных его геометрических соотношений  $z/l_{np}$  и  $l_{np}/r_{np}$  асимптотически приближаются к своим нулевым значениям. Это может говорить о том, что при таких безразмерных круговых частотах  $\omega_{ez}^*$  переменного электрического тока  $i_{np}(t)$  в рассматриваемом проводнике и дискретных значениях квантового числа  $n$  плотность вероятности  $\rho_{wzn} = |\eta_n(\omega_{ez}^*)|^2$  нахождения дрейфующих электронов в плоскости поперечного сечения  $S_{np}$  исследуемого проводника будет минимально возможной и приближающейся к нулю.

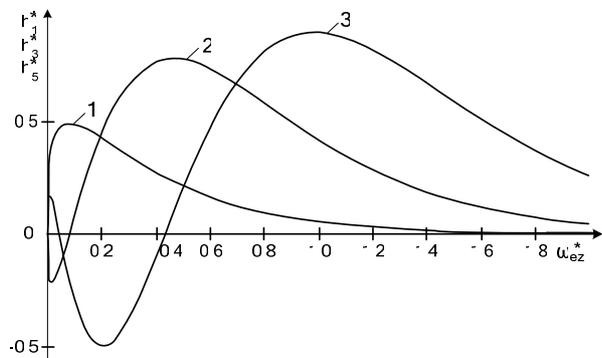


Рис. 5

Причем, требуется подчеркнуть, что такие значения величины  $\rho_{wzn}$  будут наблюдаться как для центральной, так и периферийной частей данного сечения проводника. Эти приближенные расчетные ре-

зультаты указывают на принципиальную возможность "ухода" свободных электронов из занимаемой ими потенциальной энергетической ямы кристаллической структуры металла цилиндрического проводника при воздействии на них с его краев переменного электрического напряжения с круговой частотой  $\omega_{ez}$ .

**3. Волновое временное распределение свободных электронов в проводнике.** Принимая во внимание (14) и (18), для собственных значений квантованной полной энергии дрейфующего свободного электрона  $W_{en}$ , образующих его "интегральный" энергетический спектр, в рассматриваемом проводнике находим:

$$W_{en} = n^2 h^2 (8m_e r_{np}^2)^{-1} + 0,5 h \omega_{ez} (\pi)^{-1} (n-0,5). \quad (19)$$

Учитывая (1) и (19), квантованное решение уравнения (3) во временной области для собственной волновой функции  $q_n(t)$  запишем тогда в виде [7]:

$$q_n(t) = \exp(-i\omega_{ern}t), \quad (20)$$

где  $\omega_{ern} = 2\pi W_{en} / h$  – квантованная радиальная круговая частота изменения электронной волны в поперечном сечении  $S_{np}$  металлического проводника с переменным током  $i_{np}(t)$  круговой частоты  $\omega_{ez}$ .

Из (19) и (20) для квантованной величины  $\omega_{ern}$ , определяющей собственную волновую временную функцию  $q_n(t)$ , получаем:

$$\omega_{ern} = n^2 \pi h (4m_e r_{np}^2)^{-1} + \omega_{ez} (n-0,5). \quad (21)$$

Исходя из (19) и того, что для квантованной длины радиальной электронной волны  $\lambda_{ern}$  в плоскости поперечного сечения  $S_{np}$  исследуемого проводника справедливо соотношение [4]

$$\lambda_{ern} = h / (2m_e W_{en})^{0,5}, \quad (22)$$

выражение для величины  $\lambda_{ern}$  в рассматриваемом случае может быть записано в следующем виде:

$$\lambda_{ern} = [n^2 (4r_{np}^2)^{-1} + m_e \omega_{ez} (\pi h)^{-1} (n-0,5)]^{0,5}. \quad (23)$$

Так как в соответствии с формулой де Бройля  $\lambda_{ern} = h / (m_e v_{ern})$  [4], где  $v_{ern}$  – квантованная радиальная скорость свободного электрона в плоскости круглого поперечного сечения  $S_{np}$  металлического проводника, то с учетом (23) для искомой величины скорости  $v_{ern}$  получаем:

$$v_{ern} = [n^2 h^2 (4m_e^2 r_{np}^2)^{-1} + h \omega_{ez} (\pi m_e)^{-1} (n-0,5)]^{0,5}. \quad (24)$$

Из полученных выше результатов для волновых радиальных параметров свободных электронов следует, что с ростом значений круговой частоты их продольных осцилляций  $\omega_{ez}$  происходит соответствующее возрастание значений квантованных величин  $\omega_{ern}$ ,  $v_{ern}$  и уменьшение  $\lambda_{ern}$ . Увеличение радиальной скорости  $v_{ern}$  свободных электронов указывает при этом на их вероятную возможность приближения к наружной цилиндрической поверхности металлического проводника. При  $\omega_{ez} = 0$  выражения (19), (21), (23) и (24) переходят в соответствующие известные соотношения для квантованных величин  $W_{en}$ ,  $\omega_{ern}$ ,  $\lambda_{ern}$  и  $v_{ern}$ , характерных для одномерного радиального распределения продольно дрейфующих свободных электронов в рассматриваемом проводнике [7].

**4. Волновое пространственно-временное распределение свободных электронов в проводнике.** В результате на основании (2), (11), (17) и (20) для собственных квантованных двумерных волновых  $\Psi_n(r, z, t)$ -функций, определяющих в принятом здесь

приближении согласно (1) временную радиально-продольную эволюцию дрейфующих свободных электронов в круглом цилиндрическом металлическом проводнике конечных размеров с переменным аксиальным электрическим током проводимости  $i_{np}(t)$  круговой частоты  $\omega_{ez}$ , получаем:

$$\begin{aligned} \psi_n(r, z, t) = & \left[1 / (\pi r_{np} r)\right]^{0,5} \cdot \sin(k_n r) \times \\ & \times \frac{(2\pi m_e \omega_{ez} / h)^{0,25}}{\left[2^{n-1} (n-1)! (\pi)^{0,5}\right]^{0,5}} \exp(-0,5 \xi^2) \cdot H_{n-1}(\xi) \times \\ & \times \exp(-i \omega_{ern} t). \end{aligned} \quad (25)$$

Проанализируем полученное достаточно сложное аналитическое решение (25) поставленной квантовомеханической задачи для наиболее простого случая, когда  $\xi = 0$  и  $\exp(-i \omega_{ern} t) = 1$ , то есть для продольной координаты  $z = 0$  и начального момента времени  $t = 0$ . После соответствующих преобразований в (25) представим для рассматриваемого случая данное решение волнового уравнения Шредингера (1) в следующем безразмерном виде:

$$\psi_n^*(r^*, z^*, 0) = \varphi_n^*(r^*) \cdot \eta_n^*(\xi), \quad (26)$$

где  $\psi_n^*(r^*, z^*, 0) = \psi_n(r^*, z^*, 0) \cdot (\pi r_{np}^2)^{0,5} (2\pi m_e \omega_{ez} / h)^{-0,25}$ ;  
 $\varphi_n^*(r^*) = (r^*)^{-0,5} \sin(n\pi r^*)$ ;  $\varphi_n^*(r^*) = \varphi_n(r^*) \cdot (\pi r_{np}^2)^{0,5}$ ;  
 $r^* = r / r_{np}$ ;  $z^* = z \cdot (2\pi m_e \omega_{ez} / h)^{0,5} = \xi$ ;  
 $\eta_n^*(\xi) = \left[2^{n-1} (n-1)! (\pi)^{0,5}\right]^{-0,5} \cdot \exp(-0,5 \xi^2) \cdot H_{n-1}(\xi)$ ;  
 $\eta_n^*(\xi) = \eta_n(\xi) \cdot (2\pi m_e \omega_{ez} / h)^{-0,25}$ .

На рис. 6 показаны графики изменения вдоль безразмерного радиуса  $r^*$  круглого металлического проводника с переменным электрическим током проводимости  $i_{np}(t)$  нормированной волновой функции  $\psi_n^*(r^*, 0, 0)$  для ее первых трех нечетных мод.

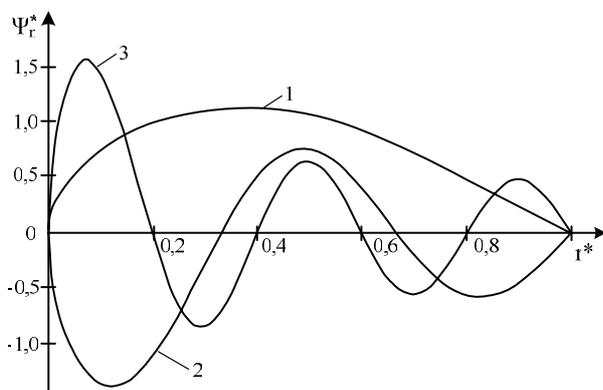


Рис. 6

Кривая 1 на рис. 6 соответствует квантовому числу  $n = 1$ , кривая 2 –  $n = 3$ , а кривая 3 –  $n = 5$ . Видно, что по сравнению с кривыми на рис. 2, описывающими для  $n = 1, 3$  и  $5$  радиальные распределения квантованной нормированной волновой функции  $\varphi_n^*(r^*)$ , указанные моды  $\psi_n^*(r^*, 0, 0)$ –функции из-за влияния квантованной волновой функции  $\eta_n(0)$ , вызванной продольными осциллирующими колебаниями свободных электронов с круговой частотой  $\omega_{ez}$ , претерпевают сильные изменения как по своей амплитуде, так и по фазе. Причем, для  $n = 5$  (см. кривые 3 на рис. 2 и 6) первая амплитуда волновой функции

$\psi_n^*(r^*, 0, 0)$  составляет при прочих равных условиях для электронов лишь около половины соответствующей амплитуды для волновой функции  $\varphi_n(r^*)$ . Такие изменения для безразмерной пси-функции  $\psi_n^*(r^*, 0, 0)$  приводят к еще большим изменениям для плотности вероятности  $\rho_{wn} = |\psi_n^*(r^*, 0, 0)|^2$  нахождения дрейфующих свободных электронов в центральной области круглого поперечного сечения  $S_{np}$  цилиндрического металлического проводника, приведенной на рис. 7.

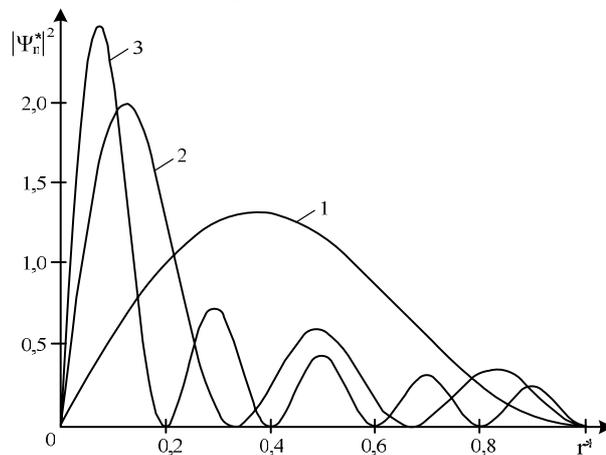


Рис. 7

Кривая 1 на рис. 7 построена для  $n = 1$ , кривая 2 – для  $n = 3$ , а кривая 3 – для  $n = 5$ . Из данных рис. 7 видно, что для пятой моды ( $n = 5$ ) безразмерной волновой функции  $\psi_n^*(r^*, 0, 0)$  первая амплитуда плотности вероятности  $\rho_{wn}$  обнаружения в поперечном сечении рассматриваемого проводника свободных электронов согласно кривой 3 по сравнению с аналогичной амплитудой для плотности вероятности  $\rho_{wm}$  (кривая 3 на рис. 3) уменьшается более чем в 4,5 раза.

Кроме того, из кривых 1-3 на рис. 7 следует, что при учете продольных колебаний дрейфующих электронов с круговой частотой  $\omega_{ez}$  и соответственно квантованной энергии  $W_{ezn}$  согласно (18) электронных осцилляторов металла проводника происходит выравнивание между максимальными значениями амплитуд величин  $\rho_{wn}$  для рассматриваемых мод волновой функции  $\psi_n^*(r^*, 0, 0)$ . Это может свидетельствовать о том, что при вынужденных продольных осцилляциях в металле проводника свободных электронов с круговой частотой  $\omega_{ez}$  вероятность их нахождения в центральной области круглого поперечного сечения  $S_{np}$  проводника цилиндрической формы существенно уменьшается. А раз так, то наиболее вероятным их местонахождением становится область круглого поперечного сечения  $S_{np}$ , примыкающая к наружной цилиндрической поверхности металлического проводника. Это приводит к возрастанию для данной радиальной области цилиндрического проводника объемной плотности  $n_{er}$  дрейфующих свободных электронов и соответственно к увеличению в ней плотности аксиального тока  $\delta_{np}(t)$ . Можно заключить, что продольные гармонические колебания дрейфующих свободных электронов, являющихся квантовыми электронными осцилляторами, могут из-за трансформации за их (колебаний) счет волновых функций электронов приводить к существенному радиальному перераспределению данных элементарных носителей

электричества по поперечному сечению рассматриваемого проводника. В результате такого вероятностного внутреннего радиального перераспределения продольно дрейфующих свободных электронов, вызванного влиянием на них продольного переменного электрического поля напряженностью  $E_z(t)$  с круговой частотой его изменения  $\omega_{ez}$ , их плотность  $n_{er}$  становится неравномерной по радиусу  $r$  круглого цилиндрического металлического проводника, что и вызывает проявление в нем классического скин-эффекта.

**Выводы.** 1. Полученное аналитическое решение временного двумерного волнового уравнения Шредингера для нерелятивистских продольно дрейфующих свободных электронов круглого цилиндрического металлического проводника с переменным аксиальным электрическим током проводимости  $i_{пр}(t)$  позволило в приближенном виде исследовать влияние круговой частоты изменения  $\omega_{ez}$  приложенного к его краям переменного электрического напряжения  $U_z(t)$  на волновые радиально-продольные распределения в однородном металле круглого цилиндрического проводника отрицательно заряженных квантовых носителей элементарного электричества.

2. Установлено, что продольные колебания линейных гармонических квантовых электронных осцилляторов с круговой частотой  $\omega_{ez}$  существенно влияют на временные, радиальные и продольные распределения в металле цилиндрического проводника полученных квантованных волновых функций, описывающих пространственно-временную эволюцию в исследуемом проводнике продольно дрейфующих свободных электронов. Показано, что изменения в этих распределениях квантованных волновых  $\Psi_n(r, z, t)$ -функций и в квантованных значениях радиальной  $W_{er}$  и продольной  $W_{ez}$  составляющих полной энергии (энергетических спектрах) свободных электронов, обусловленные процессом их осциллирующего движения и квантования в продольном переменном электрическом поле круговой частоты  $\omega_{ez}$ , могут приводить к их внутреннему радиальному перераспределению по круглому поперечному сечению металлического проводника. Последнее может вызывать неравномерное по текущему радиусу  $r$  металлического проводника распределение объемной плотности  $n_{er}$  продольно дрейфующих осциллирующих свободных электронов и соответственно неравномерное в нем радиальное распределение плотности  $\delta_{пр}(t)$  переменного аксиального электрического тока проводимости. Это может и приводить к проявлению в металлическом проводнике цилиндрической конфигурации классического ПЭ.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баранов М.И. Новые физические подходы и механизмы при изучении процессов формирования и распределения электрического тока проводимости в проводнике // Технічна електродинаміка. – 2007. – № 1. – С. 13-19.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – М.: Изд-во ФМЛ, 1959. – 532 с.

3. Яворский Б.М., Детлаф А.А. Справочник по физике. – М.: Наука, 1990. – 624 с.
4. Кузьмичев В.Е. Законы и формулы физики / Отв. ред. В.К. Тартаковский. – Киев: Наукова думка, 1989. – 864 с.
5. Фоменко В.С. Эмиссионные свойства материалов. Справочник. – Киев: Наукова думка, 1981. – 339 с.
6. Баранов М.И. Волновое распределение свободных электронов в проводнике с электрическим током проводимости // Электротехника. – 2005. – № 7. – С. 25-33.
7. Баранов М.И. Волновое радиальное распределение свободных электронов в цилиндрическом проводнике с переменным электрическим током // Технічна електродинаміка. – 2009. – № 1. – С. 6-11.
8. Баранов М.И. Волновой электронный пакет проводника с электрическим током проводимости // Электротехніка і електромеханіка. – 2006. – № 3. – С. 49-53.
9. Баранов М.И. Квантовомеханический подход при расчете температуры нагрева проводника электрическим током проводимости // Технічна електродинаміка. – 2007. – №5. – С. 14-19.
10. Справочник по теоретическим основам радиоэлектроники / Под ред. Б.Х. Кривицкого, В.Н. Дулина. Том 1. – М.: Энергия, 1977. – 504 с.
11. Солимар Л., Уолш Д. Лекции по электрическим свойствам материалов / Пер. с англ. под ред. С.И. Баскакова. – М.: Мир, 1991. – 504 с.
12. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1974. – 832 с.
13. Ивановский А.В., Спириков Г.М., Дудай П.В. и др. Стенд для исследования механизмов пробоя изоляционных промежутков короткими импульсами напряжения // Приборы и техника эксперимента. – 2003. – № 4. – С. 69-77.
14. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики / Пер. с англ. под ред. С.П. Аллилуева и др. Том 2. – М.: Изд-во ИЛ, 1960. – 886 с.
15. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров / Пер. с франц. под ред. К.С. Шифрина. – М.: Наука, 1965. – 780 с.
16. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. – М.: Наука, 1977. – 344 с.

Поступила 19.10.2009

Баранов Михаил Иванович, д.т.н., с.н.с.  
НИПКИ "Молния" Национального технического университета "Харьковский политехнический институт"  
Украина, 61013, г. Харьков, ул. Шевченко, 47,  
НИПКИ "Молния" НТУ "ХПИ"  
Тел. (057) 707-68-41, e-mail: eft@kpi.kharkov.ua

Baranov M.I.

#### Quantum-physical nature of skin effect in a metallic conductor under alternating electric conduction current.

On the basis of fundamentals of quantum physics, an approximate theoretical justification for a hypothesis about quantum-mechanical nature of skin effect in a round cylindrical metallic conductor under alternating electric conduction current is given. It is shown that a probabilistic radial variation of longitudinally oscillating drifting free electron density in the conductor microstructure may cause the skin effect.

**Key words** – metallic conductor, alternating electric current, skin effect, quantum-mechanical nature of the phenomenon.