

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
МІНІСТЕРСТВА ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Бреславський Іван Дмитрович

УДК 539.3

**НЕЛІНІЙНІ НОРМАЛЬНІ ФОРМИ В РОЗВ'ЯЗКАХ ЗАДАЧ КОЛИВАНЬ
ТОНКИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК**

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Запоріжжя – 2010

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Національному технічному університеті «Харківський політехнічний інститут» Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник

доктор технічних наук,
професор
Аврамов Костянтин Віталійович,
Інститут проблем машинобудування
ім. А.М. Підгорного НАН України (м. Харків),
провідний науковий співробітник відділу
нестационарних механічних процесів

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук,
професор
Григоренко Олександр Ярославович,
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН
України (м. Київ),
завідувач відділу обчислювальних методів

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Краснопольська Тетяна Сігізмундівна
Інститут гідромеханіки НАН України
(м. Київ),
провідний науковий співробітник відділу
вихорових рухів

Захист відбудеться «28» травня 2010 р. о 15⁰⁰ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради К 17.051.06 при Державному вищому навчальному закладі «Запорізький національний університет» Міністерства освіти і науки України за адресою: 69600, м. Запоріжжя, вул. Жуковського, 66.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Державного вищого навчального закладу «Запорізький національний університет» Міністерства освіти і науки України за адресою: 69600, м. Запоріжжя, вул. Жуковського, 66.

Автореферат розісланий «21» квітня 2010 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради

Ю.О. Сисоєв

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Одним з найпоширеніших класів оболонкових конструкцій є пологі оболонки. Вони часто застосовуються у будівництві та машинобудуванні. Внаслідок різноманітних конструктивних вимог на практиці використовуються пологі оболонки складної геометрії. Нерідко такі елементи конструкцій взаємодіють із рідиною. У більшості випадків оболонки піддаються динамічним навантаженням, які призводять до їхніх коливань із значними амплітудами. При цьому рух оболонки може ставати нестійким, і на відміну від випадку малих коливань, мають місце складні нелінійні явища.

На теперішній час розв'язано лише поодинокі задачі нелінійних коливань пологих оболонок, що використовують особливості геометрії (як правило, нескладної) чи базуються на спрощених одномодових наближеннях. Отже, не зважаючи на велику зацікавленість вітчизняних та закордонних вчених у проблемах нелінійної динаміки тонких пологих оболонок довільної форми в плані, на цей момент не існує комплексного підходу до аналізу їхніх багатомодових нелінійних коливань. Такий підхід надає можливість структурувати етапи розв'язання шляхом застосування найбільш ефективних сучасних методів, насамперед нелінійних нормальних форм, що полегшить його масове застосування у наукових та прикладних дослідженнях.

У зв'язку з цим тема дисертаційної роботи, пов'язана з розробкою такого підходу до аналізу динаміки тонких пологих оболонок складної геометрії, є актуальною в науковому та практичному відношенні.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційну роботу виконано на кафедрі газогідромеханіки і тепломасообміну Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут» при виконанні робіт з держбюджетної теми згідно з координаційним планом Міністерства освіти і науки України «Створення методів аналізу нелінійних коливань елементів конструкцій і засобів їх гасіння» (№ ДР 0106U005164, 2006 – 2008 рр.), де здобувач був виконавцем окремих розділів.

Мета і завдання дослідження. Мета роботи – розробка комплексного підходу до аналізу вільних та вимушених багатомодових нелінійних коливань тонких пологих оболонок на основі методу нелінійних нормальних форм та вивчення закономірностей нелінійних динамічних процесів їхнього деформування, стійкості і біфуркацій.

Для досягнення сформульованої мети в роботі поставлені наступні завдання:

- створити комплексний підхід до дослідження багатомодових коливань тонких пологих оболонок довільної форми в плані при їх геометрично нелінійному деформуванні на основі методу нелінійних нормальних форм коливань;
- поширити метод функцій В.Л. Рвачова на новий клас задач – про вплив рідини на власні коливання оболонок;
- розробити метод комплексного аналізу нелінійної динаміки пологих оболонок, що взаємодіють з рідиною;

– провести аналіз вільних і вимушених коливань пологих оболонок при їх геометрично нелінійному деформуванні та дослідити стійкість та біфуркації режимів коливань;

– отримати розрахункові дані для встановлення закономірностей нелінійної динамічної поведінки моделей лопаток турбомашин.

Об'єкт дослідження – тонкі пологі оболонки довільної форми в плані, постійної і змінної товщини.

Предмет дослідження – вільні і вимушені коливання тонких пологих оболонок при геометрично нелінійному деформуванні, біфуркації і втрата стійкості коливань.

Методи дослідження – аналітичні та чисельні методи прикладної теорії коливань: асимптотичні методи, метод нелінійних нормальних форм, метод гармонічного балансу, метод визначників Хілла, алгебраїзація рівнянь руху за Айнсом.

Наукова новизна одержаних результатів:

– вперше створено комплексний підхід до аналізу багатомодової нелінійної динаміки тонких пологих оболонок довільної форми в плані при їх геометрично нелінійному деформуванні на базі методу нелінійних нормальних форм;

– метод R-функцій поширено на новий клас задач – задачі про коливання оболонок, що взаємодіють з рідиною;

– встановлені нові закономірності динамічного проклацування нескінченно довгих пологих оболонок при їх геометрично нелінійному деформуванні; наведені умови існування режимів проклацування; отримані наближені аналітичні вирази для режимів проклацування у вигляді нелінійних нормальних форм;

– запропоновано точні аналітичні вирази для власних форм лінійних коливань пологих прямокутних в плані оболонок з крайовими умовами Нав'є;

– вперше для пологих циліндричних оболонок з двома вільними і двома вільно опертими краями, а також жорстко закріпленої оболонки складної форми в плані встановлені закономірності багатомодових нелінійних коливань за наявності внутрішніх резонансів;

– отримано нові закономірності коливань оболонок змінної товщини і складної форми в плані (моделей лопаток турбомашин) зі скінченними амплітудами.

Обґрунтованість і достовірність наукових положень, висновків і рекомендацій забезпечено коректністю математичної постановки задачі, застосуванням апробованих й перевірених методів та алгоритмів розрахунку. Достовірність аналітичних і чисельних даних, нових закономірностей і властивостей режимів коливань обґрунтована збіжністю розв'язків при варіюванні числа ступенів свободи в дискретних моделях систем, що розглядалися, а також шляхом порівняння отриманих результатів з окремими розрахунковими та експериментальними даними, наведеними в літературі.

Практичне значення отриманих результатів. Практичну цінність та наукове значення мають теоретичні та чисельні результати у вигляді створеного комплексного підходу до аналізу і встановлених закономірностей нелінійних

динамічних процесів у тонких пологих оболонках змінної товщини і довільної форми в плані.

Запропонований підхід може бути застосовано науково-дослідними організаціями та підприємствами, що виготовляють аерокосмічну техніку і енергетичне обладнання, на етапах проектування й доведення нової техніки. Результати роботи використані в Національному технічному університеті «Харківський політехнічний інститут» при виконанні держбюджетної науково-дослідної теми. Дані розрахунків динамічної поведінки моделі лопаті гідротурбіни і зроблені на їх основі рекомендації з проектування лопатки лопатевої машини використано в роботі ВАТ «Турбоатом» (м. Харків).

Особистий внесок здобувача. Основні результати, що містяться в дисертаційній роботі, отримані здобувачем самостійно. Серед них: створений підхід до дослідження нелінійної динаміки тонких пологих оболонок на базі методу нелінійних нормальних форм; закономірності динамічного проклацування; закономірності нелінійної динаміки пологої циліндричної оболонки, що має два вільних і два вільно опертих краї, а також оболонки складної форми в плані; нові дані щодо закономірностей коливань зі скінченними амплітудами моделей лопаток і лопатей турбін.

В [1, 4, 5, 10, 12, 18-20] для задачі проклацування пологої арки здобувачем побудовані нелінійні нормальні форми коливань Каудерера-Розенберга та проведено їх аналіз. За допомогою методів алгебраїзації за Айнсом і визначників Хілла проаналізовано стійкість знайдених режимів коливань. В [2] здобувачем за допомогою методу Раушера побудовані нормальні форми Каудерера-Розенберга вимушених коливань пологої арки, що знаходиться під дією поздовжнього навантаження, і проведено їх аналіз. В [3, 11] здобувачем за допомогою нелінійних нормальних форм Шоу-П'єра проведено аналіз нелінійних коливань лопаті гідротурбіни. В [6, 16, 17] здобувачем виконано математичну постановку задачі про коливання прямокутної в плані оболонки і отримано точні вирази для власних форм коливань; отримано дискретну модель системи та проведено аналіз нелінійних коливань системи. В [7, 13, 15] здобувачем виконано математичну постановку задачі про коливання оболонки складної геометрії. За допомогою методу функцій В.Л. Рвачова знайдені власні частоти та форми коливань. Отримано дискретну модель системи, побудовано нелінійні нормальні форми коливань Шоу-П'єра та проведено їх аналіз. В [8] здобувачем виконано математичну постановку задачі про коливання моделі компресорної лопатки. За допомогою методу функцій В.Л. Рвачова знайдені власні частоти та форми коливань. Отримано дискретну модель системи, побудовано багатомодові нелінійні нормальні форми коливань Шоу-П'єра та проведено їх аналіз. В [9] здобувачем виконано математичну постановку задачі про коливання пологої оболонки складної геометрії, що знаходиться в рідині. Знайдено власні форми і частоти коливань. Отримано дискретну модель системи, побудовано багатомодові нелінійні нормальні форми коливань Шоу-П'єра та проведено їх аналіз. В [14, 21, 22] здобувачем нелінійні нормальні

форми коливань Каудерера-Розенберга використано для аналізу динаміки пологої оболонки нескінченної довжини.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційної роботи доповідались на таких наукових конференціях:

- Одинадцята міжнародна наукова конференція ім. академіка М. Кравчука. (Київ, 18-20 травня 2006 р.);
- Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: XIII Всеукраїнська наукова конференція. (Львів, 3-5 жовтня 2006 р.);
- Можливості використання методів механіки для розв'язання питань безпеки в умовах надзвичайних ситуацій. V міжвузівська науково-практична конференція. (Харків, 8 грудня 2006 р.).
- XXXV Summer School – Conference "Advanced Problems in Mechanics". (St. Petersburg (Repino), Russia, June 20-28, 2007);
- Друга міжнародна конференція «Нелінійна динаміка». (Харків, 25-28 вересня 2007 р.);
- 9th Conference on Dynamical Systems – Theory and Applications. (Lodz, Poland, December 17-20, 2007);
- Міжнародна наукова школа-конференція "Тараповські читання". (Харків, 21-25 квітня 2008 р.);
- Euromech Colloquium 498. (Kazimierz Dolny, Poland, May 21-24, 2008);
- International Conference "Nonlinear Phenomena in Polymer Solids and Low-dimensional Systems" (Moscow, Russia, 7-10 July, 2008);
- Чотирнадцята міжнародна науково-технічна конференція "Фізичні та комп'ютерні технології". (Харків, 24-25 вересня 2008 р.);
- П'ятнадцятий міжнародний симпозіум «Динамічні і технологічні проблеми механіки конструкцій і суцільних середовищ» ім. А.Г. Горшкова. (Ярополець, РФ, 16 – 20 лютого 2009 р.).

Робота, в тому числі і в повному обсязі, розглядалася і обговорювалася в Національному технічному університеті «Харківський політехнічний інститут» на семінарах кафедр газогідромеханіки і тепломасообміну (2006-2010 рр.), прикладної математики (2006-2010 рр.) та теоретичної механіки (2006-2010 рр.); на семінарі кафедри технічної механіки університету Мартіна Лютера Галле-Віттенберг (м. Галле, ФРН, 2008 р.) ; в Інституті механіки НАН України ім. С.П. Тимошенка на семінарах відділів теорії коливань (2009 р.) та обчислювальних методів (2010 р.); семінарі «Актуальні проблеми прикладної математики і механіки» Запорізького національного університету (2010 р.).

Публікації. Основний зміст дисертаційної роботи викладено в 22 наукових роботах, серед яких 4 статті у фахових виданнях.

Структура і обсяг роботи. Дисертаційна робота загальним об'ємом 214 сторінок складається зі вступу, 4 розділів, висновків, списку використаних літературних джерел (268 найменувань), 5 додатків на 26 сторінках, і включає 142 сторінки основного тексту, 55 рисунків та 6 таблиць.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, зазначено її зв'язок з науковими планами, темами; сформульовано мету і задачі дослідження; відображено наукову новизну, практичну цінність здобутих результатів. Визначено особистий внесок здобувача в публікаціях, виконаних у співавторстві.

У **першому** розділі на основі огляду публікацій вітчизняних та закордонних авторів описано стан проблеми. Відзначено, що значний внесок до теоретичного опису статистики та динаміки оболонок, в тому числі й пологих, був внесений такими вченими, як М. Амабілі, Р. Арнольд, Л.І. Балабух, В.В. Болотин, Н.В. Валішвілі, В.З. Власов, А.С. Вольмір, Дж. Ворбартон, І.І. Воровіч, К.З. Галімов, Є.Г. Голоскоков, О.Л. Гольденвейзер, Е.І. Григолюк, Я.М. Григоренко, О.Я. Григоренко, О.М. Гузь, В.І. Гуляєв, Л.Г. Доннелл, М.А. Ільгамов, Б.Я. Кантор, О.В. Кармішін, В.Т. Койтер, М.С. Корнішін, В.Д. Кубенко, Л.В. Курпа, А.В. Лісса, А.І. Маневич, Х.М. Муштарі, В.І. Мяченков, Ю.М. Новічков, В.В. Новожилов, І.Ф. Образцов, П.М. Огібалов, О.Д. Оніашвілі, М.П. Пайдоуссіс, Ф. Пеллікано, В.Л. Рвачов, Е. Рейсснер, Дж. Сандерс, А.П. Філіппов і багатьма іншими. Однак на сьогоднішній день не існує єдиного підходу до аналізу багатомодових нелінійних коливань пологих оболонок довільної форми в плані. Складні багатомодові коливання, які виникають за наявності в системі внутрішніх резонансів, досліджувалися в основному для оболонок простої форми в плані (прямокутник, коло). При цьому реальні елементи конструкцій повинні моделюватися пологими оболонками складної форми в плані і змінної товщини. В роботі наголошується, що одним з найбільш зручних методів опису складної форми плану оболонки є метод функцій В.Л. Рвачова.

У розвиток методів розв'язання задач нелінійної динаміки внесли такі вітчизняні та закордонні вчені, як О.О. Андронов, М.М. Боголюбов, А.С. Вольмір, Р.Ф. Ганієв, В.І. Гуляєв, Д.А. Евенсен, В.Ф. Журавльов, В.О. Кононенко, Т.С. Краснопольська, Н.М. Крилов, В.Д. Кубенко, А.В. Лісса, О.М. Ляпунов, І.Г. Малкін, Л.І. Маневич, В.К. Мельников, Ю.О. Митропольський, Ю.В. Міхлін, М.М. Моїсєєв, А.Х. Найфе, Г.С. Писаренко, А. Пуанкаре, Е. Рейсснер, Дж. Сандерс, Т. Хаясі, Ф. Холмс та багато інших. З аналізу літератури встановлено, що одним з ефективних методів розв'язання задач нелінійних коливань, який раніше успішно було застосовано до розрахунків багатомасових дискретних систем і стрижнів, є метод нелінійних нормальних форм коливань. У поєднанні з асимптотичними методами і методом гармонічного балансу на сьогоднішній день цей метод надає потужний апарат розв'язання задач нелінійної динаміки континуальних систем.

За результатами проведеного огляду літератури було встановлено, що створення комплексного підходу до аналізу нелінійних багатомодових коливань пологих оболонок складної геометрії є актуальним завданням сучасної теорії оболонок.

Другий розділ роботи присвячено викладенню розробленого комплексного підходу до аналізу нелінійних коливань пологих оболонок. Запропоновано спочатку знаходити власні частоти та форми лінійних коливань оболонки. Для деяких оболонок вирази для частот і форм відомі, в решті випадків для знаходження власних форм і частот застосовується метод Релея-Рітца з використанням методу R-функцій.

Після аналізу спектральних властивостей системи здійснюється вибір власних форм, які враховуються в лінійній комбінації для дослідження нелінійних коливань у частотному діапазоні, що аналізується. Переміщення оболонки при нелінійних коливаннях представляються у вигляді лінійної комбінації власних форм лінійних коливань:

,

де, i – власні форми коливань w, u, v відповідно; q_i – узагальнені координати; Q_i – ортогональні координати на оболонці.

Підхід передбачає опис рухів оболонки дискретною моделлю з кінцевим числом ступенів свободи – системою звичайних нелінійних диференціальних рівнянь. В залежності від геометричних параметрів оболонки для отримання дискретної моделі до рівнянь руху в частинних похідних або застосовується метод Бубнова-Гальоркіна, або використовуються рівняння Лагранжа другого роду. Узагальнені координати q_i , що відповідають переміщенням u і v , виражаються через Q_i . Дискретна модель має вигляд

$$M \ddot{Q} + C \dot{Q} + K Q = F \cos \Omega t, \quad (1)$$

де Ω – безрозмірні власні частоти.

Дискретною моделлю виду (1) може бути описана динаміка тонкої пологої оболонки будь-якої форми в плані, постійної або змінної товщини. Також моделлю (1) може бути описана динаміка оболонки, що взаємодіє з рідиною.

На основі аналізу спектральних властивостей механічної системи здійснюється вибір типу нормальних форм – Каудерера-Розенберга або Шоу-П'єра. За допомогою нелінійних нормальних форм коливань можливо виділити залежність узагальнених координат від однієї, яка вважається незалежною. Ці вирази вводяться до дискретної моделі системи, що зменшує її розмірність і спрощує аналіз режиму коливань, що досліджується. За наявності внутрішнього резонансу в системі неможливо виділити єдину узагальнену координату для рухів навіть в частотному діапазоні поблизу власної частоти. Але в цьому випадку можливо побудувати інваріантний багатовид (нелінійну нормальну форму Шоу-П'єра) з декількома незалежними узагальненими координатами і за

його допомогою спростити дослідження складних резонансних режимів. У випадку дії на систему малої зовнішньої сили перед побудовою нормальних форм дискретна система методом Раушера зводиться до автономної.

Рухи на нормальних формах аналізуються за допомогою методів гармонічного балансу, багатьох масштабів або чисельним методом продовження розв'язку за параметром.

Для аналізу стійкості застосовуються методи Флоке-Ляпунова, визначників Хілла і алгебраїзація за Айнсом.

У **третьому** розділі досліджуються коливання пологих оболонок. Тут розв'язані такі задачі:

Коливання нескінченно довгої пологої оболонки, шарнірно-опертої по двох краях (рис. 1).

Динаміка оболонки описується дискретної моделлю з двома ступенями свободи:

Рис. 1. Перетин оболонки

За відсутності зовнішньої сили було досліджено два режими проклацування, що є нелінійними нормальними формами Каудерера-Розенберга:

;
„

Стійкість даних нормальних форм досліджено за допомогою методів алгебраїзації за Айнсом і визначників Хілла. Побудовано області стійкості і нестійкості цих нормальних форм на площині параметрів.

Вплив малого поздовжнього навантаження на режими проклацування досліджено за допомогою методу Раушера. Амплітудно-частотні характеристики коливань на нормальній формі наведено на рис. 2. На рис. 2 і нижче на всіх амплітудно-частотних характеристиках по осі ординат відкладені розмахи переміщень. Стійкі коливання позначені суцільними лініями, нестійкі – пунктирними.

Рис. 2. Амплітудно-частотні характеристики коливань на нормальній формі

На рис. 2 цифрою 1 відмічено скелетну криву, цифрою 2 – амплітудно-частотну характеристику вимушених Т-періодичних коливань, цифрою 3 – амплітудно-частотну характеристику вимушених 2Т-періодичних коливань. Як

можна бачити, режими проклацування між трьома положеннями рівноваги існують, починаючи з деякого рівня амплітуд. Це справедливо також і для нормальної форми .

Зроблено висновки щодо того, що амплітудно-частотні характеристики коливань таких оболонок є жорсткими, при цьому присутність малої зовнішньої сили збільшує амплітуди нестійких коливань.

Достовірність отриманих результатів встановлено при їх порівнянні з чисельними розв'язками, отриманими методами продовження розв'язку по параметру, а також розв'язком рівняння в частинних похідних різницеvim методом.

Коливання пологої прямокутної в плані оболонки (рис. 3). Оболонка, що розглядається, задовольняє граничним умовам Нав'є:

$$; ; ; . \quad (2)$$

Рис. 3. Ескіз оболонки

У роботі показано, що точні власні форми коливань прямокутної в плані пологої оболонки, на двох протилежних краях якої реалізовані умови (2), за будь-яких умов на двох інших краях мають такий вигляд:

.

Досліджено вільні і вимушені нелінійні коливання оболонок (рис. 3), припускаючи, що краї вільні:

.

Для опису динаміки системи було отримано дискретну модель з двома ступенями свободи. У системі має місце внутрішній резонанс 1:2 між першою і другою власними частотами; частота зовнішньої сили задавалася близькою до першої власної частоти. Амплітудно-частотні характеристики вільних (режими 1, 2) та вимушених (режими 3-6) коливань наведено на рис. 4. На рис. 4 та на наступних рисунках точками на амплітудно-частотних характеристиках позначено результати чисельного експерименту. Проаналізовано стійкість резонансних режимів. У системі виявлено біфуркацію втрати симетрії (точка В на рис. 4).

Рис. 4. Амплітудно-частотні характеристики

Коливання жорстко закріпленої пологої оболонки складної форми в плані (рис. 5). Коливання оболонок з такою формою в плані, але з іншими параметрами кривини, досліджено в роботах Л.В. Курпи зі співавторами.

В роботі власні форми і частоти коливань знаходилися методом Релея-Рітца із застосуванням методу R-функцій. Після порівняння результатів розрахунків зроблено висновок щодо більшої придатності до апроксимації власних форм тригонометричних поліномів у порівнянні зі звичайними.

Досліджувалися вільні нелінійні коливання, при цьому в розвиненнях переміщень враховувалися три перші власні форми. Оскільки в системі існує внутрішній резонанс між першою і другою власними частотами, для дослідження коливань була побудована нелінійна нормальна форма Шоу-П'єра у вигляді двовимірного інваріантного багатовиду:

Рис. 5. Ескіз оболонки

Рис. 6. Амплітудно-частотні характеристики. Режими 1-3 отримано за допомогою трьохмодового наближення, режим 4 – за допомогою одномодового наближення

Побудовано амплітудно-частотні характеристики та проаналізовано стійкість резонансних режимів. Встановлено, що скелетні криві коливань оболонок даного типу є м'якими.

Проведено порівняння результатів, що отримані при моделюванні динаміки оболонки системою з одним і трьома ступенями свободи (рис. 6). Зроблено висновок, що скелетна крива одномодового наближення (крива 4 на рис. 6) є близькою до деяких ділянок амплітудно-частотної характеристики трьохмодового наближення (режими 1 і 2 на рис. 6), однак властивості стійкості цих розв'язків істотно відрізняються.

Амплітуди згинних коливань у додатному і від'ємному напрямках помітно відрізняються, що пояснюється суттєвим вкладом квадратичних доданків в дискретній моделі (1) для цієї оболонки. Таке ж явище було встановлено та описано Л.В. Курпою зі співавторами.

У **четвертому** розділі підхід, який було розроблено, застосовувався до розв'язку прикладних задач нелінійних коливань пологих оболонок.

Коливання моделі лопаті гідротурбіни. Модель є пологою оболонкою подвійної кривизни і змінної товщини (рис. 7). Оболонку жорстко закріплено по ділянці межі, на решті вона є вільною. Запропоновані в роботах Б.Я. Кантора і А.П. Філіппова кускові поліноми, що задовольняють умовам закріплення, використовувалися як базисні функції для методу Релея-Рітца.

Рис. 7. Ескіз плану оболонки

У табл. 1 наведено результати розрахунків власних частот для оболонки з параметрами $a = 0.25$ м, $b = 0.5$ м, $\rho = 7850$ кг/м³; Н/м²; $\mu = 0.3$. На рис. 8 наведені вузлові лінії перших власних форм. Отримані дані добре узгоджуються з відомими експериментальними і розрахунковими даними.

Для отримання моделі з кінцевим числом ступенів свободи використовувалися перші три власні форми коливань. Вузлові лінії перших власних форм наведено на рис. 8.

Було досліджено вільні коливання оболонки з частотами, близькими до першої і другої власних частот. Для цього були побудовані такі нелінійні нормальні форми коливань:

$$; \quad (3)$$

$$. \quad (4)$$

Скелетні криві коливань на нормальній формі (3) наведено на рис. 9, на формі (4) – на рис. 10.

Таблиця 1. Залежність частот, отриманих методом Релея-Рітца, від кількості базисних функцій.

Кількість поліномів $\mathcal{P}$	Власні частоти, Гц				
	1	2	3	4	5
10	331.84	487.81	611.95	807.71	852.27
15	320.81	475.4	589.36	781.58	810.1
21	318.04	467.88	579.31	764.67	797.7
Експериментальні дані (Д.Д. Уляницький)	338	453	616	790	873
Розрахункові дані (А.П. Філіппов)	261	433	526	667	714

Рис. 8. Вузлові лінії перших власних форм коливань

Рис. 9. Скелетні криві коливань на нормальній формі (3)

Рис. 10. Скелетні криві коливань на нормальній формі (4)

Розглянуто також коливання цих оболонок в рідині (рис. 7). Для цього розв'язувалася допоміжна задача – визначення перепаду тиску рідини на змочених поверхнях. Ця задача зводилась до розв'язання гіперсінгулярного інтегрального рівняння методом граничних елементів. Відомо, що поблизу краю оболонки перепад тиску спадає за законом квадратного кореню з відстані до краю. У зв'язку з цим в роботі вперше для апроксимації перепаду тиску використано корінь з функції $\omega(x, y)$, яка задає форму плану оболонки та є побудованою за допомогою R-функцій. Це вдалося зробити, оскільки нормовані до першого порядку функції, що задають форму плану оболонки, поблизу межі плану оболонки спадають як відстань до межі. Функція $\omega(x, y)$ має такий вигляд:

$$\begin{aligned} & , \\ & ; \\ & ; \end{aligned}$$

де a – зовнішня частина кола радіуса a з центром у початку координат; b – внутрішня частина кола радіуса b з центром у початку координат; θ – сектор; v_5 – область, яка лежить з внутрішнього боку від кривої, що описує закруглення одного з кутів оболонки (явний вираз для v_5 дуже громіздкий, тому його тут не наведено). Операції $\cap$ та $\cup$ – R-кон'юнкція і R-диз'юнкція.

Перші власні частоти коливань оболонки в рідині є такими: 156.07 Гц, 291.77 Гц, 391.54 Гц.

Було досліджено дві нормальні форми (3), (4) нелінійних коливань оболонки в рідині. Їх скелетні криві наведено на рис. 11 і 12.

Рис. 11. Скелетні криві коливань на нормальній формі (3) оболонки в рідині

Рис. 12. Скелетні криві коливань на нормальній формі (4) оболонки в рідині

З порівняння скелетних кривих зроблено висновок щодо збільшення амплітуд стійких коливань за наявності рідини, при цьому точки периферійній частині контуру оболонки можуть здійснювати стійкі коливання з амплітудами, сумірними з товщиною оболонки.

Коливання моделі компресорної лопатки (рис. 13).

Рис. 13. Ескізи зовнішнього вигляду і плану лопатки

Форма серединної поверхні $f(x, y)$ і товщина оболонки $h(x, y)$ задаються так:

;

Власні частоти та форми були знайдені методом Релея-Рітца з використанням методу R-функцій. У табл. 2 і на рис. 14 наведено результати розрахунків власних частот і форм для сталеві оболонки з параметрами m ; m ; максимальна товщина в кореновому перерізі m ; відношення максимальної товщини на вільному кінці до ; максимальна відстань у кореновому перерізі між серединною поверхнею і координатною площиною x_0 m ; відношення максимальної відстані до площини x_0 на вільному кінці до ; кут закручування .

Таблиця 2. Власні частоти коливань компресорної лопатки, Гц

Розрахункові дані	275.35	1020.14	1238.08	2428.35	2628.88	3153.8
Розрахункові дані (І.І. Меєрович)	285	1000	1215	2560		3280
Експериментальні дані (І.І. Меєрович)	273	1000	1223	2457		2946

Рис. 14. Вузлові лінії перших власних форм коливань

Для отримання нелінійної моделі з кінцевим числом ступенів свободи було використано перші п'ять власних форм коливань. Існування в системі внутрішніх резонансів між третьою, четвертою і п'ятою власними частотами призводить до того, що в деяких режимах коливань узагальнені координати з цими номерами одночасно є активними. Для аналізу в розглянутому частотному діапазоні було побудовано трьохмодовий інваріантний багатовид:

. (5)

На рис. 15, 16 наводяться скелетні криві знайдених стійких режимів. Розмахи решти, не наведених на графіках узагальнених координат, в цих режимах близькі до нуля. Встановлено, що в даному частотному діапазоні присутні як багатомодові (рис. 15), так і одномодові (рис. 16) режими коливань на багатовиді (5).

Рис. 15. Скелетні криві багатомодових коливань на багатовиді (5)

Зроблено висновок щодо можливості реалізації стійких коливань з амплітудами, сумірними з товщиною оболонки. Встановлено, що внаслідок існування множинних внутрішніх резонансів, поведінка моделі при коливаннях з частотами, які є вищими за другу власну частоту, є складною.

Рис. 16. Скелетна крива одномодових коливань на багатовиді (5)

Багатомодові коливання при помірних амплітудах можуть бути як нестійкими, так і стійкими. Це дозволяє рекомендувати проведення уточнених розрахунків динамічних властивостей нових лопаток турбомашин на етапі їх проектування.

ВИСНОВКИ

Дисертаційну роботу присвячено розв'язанню науково-практичного завдання механіки деформованого твердого тіла – створенню комплексного підходу до аналізу нелінійної динаміки тонких пологих оболонок складної геометрії при їх геометрично нелінійному деформуванні. За допомогою створеного методу виконано дослідження властивостей і закономірностей нелінійних коливань тонких пологих оболонок змінної товщини і довільної форми в плані, розв'язані практично важливі задачі нелінійних коливань лопатей гідротурбін і лопаток турбін.

Найбільш важливими результатами роботи є:

1. Запропоновано новий підхід до аналізу нелінійної динаміки тонких пологих оболонок при геометрично нелінійному деформуванні. На відміну від традиційних, підхід, що запропоновано, базується на багатомодових апроксимаціях розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь і варіаційних функціоналів, зведенні континуальних динамічних систем до систем з кінцевим числом ступенів свободи для комплексного аналізу спектральних властивостей, резонансів, біфуркацій і стійкості рухів.

2. За допомогою запропонованого підходу виконані дослідження вільних і вимушених коливань пологих оболонок при кінцевих нормальних переміщеннях.

– Для коливань нескінченно довгої пологої оболонки показано, що траєкторії нелінійних нормальних форм близькі до прямолінійних; при малих амплітудах коливань нелінійні нормальні форми є нестійкими через близькість до гомоклінічних траєкторій. Скелетні криві нелінійних нормальних форм є жорсткими; виявлено, що наявність малої зовнішньої сили призводить до збільшення амплітуд нестійких коливань.

– Для прямокутної в плані оболонки з опертими і вільними краями дано точний аналітичний вираз для власних форм коливань; зроблено висновок щодо високої вірогідності появи внутрішніх резонансів в оболонках такого типу; виконано комплексний аналіз нелінійної динаміки у випадку вільних і вимушених коливань таких оболонок з урахуванням внутрішнього резонансу, в результаті якого виявлено біфуркацію втрати симетрії форм вигину; визначено, що скелетні криві коливань належать до жорсткого типу.

– В результаті дослідження властивостей багатомодових наближень розв'язку задач нелінійної динаміки пологої оболонки зі складною формою плану показано, що амплітудно-частотна характеристика одномодового наближення близька до деяких ділянок амплітудно-частотної характеристики трьохмодового наближення, однак при цьому трьохмодовоє наближення має додаткові гілки; наявність внутрішнього резонансу істотно впливає на

властивості стійкості рухів, тому аналіз стійкості має проводитися на основі трьохмодового наближення; амплітудно-частотні характеристики вільних коливань пологих оболонок складної форми є м'якими.

– В результаті аналізу нелінійної динаміки моделі лопаті виявлено, що амплітуди стійких коливань точок з околиці зовнішнього краю моделі лопаті сумірні з її товщиною в цій області; взаємодія з рідиною підвищує амплітуди стійких коливань; при коливаннях оболонки, що взаємодіє з рідиною, спостерігається гідродинамічний ефект, виражений в тому, що форми коливань моделі лопаті в рідині є комбінаціями власних форм коливань у вакуумі; скелетні криві нелінійних коливань моделі лопаті при різних режимах коливань, як без взаємодії, так і при взаємодії з рідиною є жорсткими.

– Для моделі компресорної лопатки встановлено існування внутрішніх резонансів між третьою, четвертою і п'ятою власними частотами коливань, що є причиною її складної динамічної поведінки; скелетні криві нелінійних коливань моделі лопатки при різних режимах коливань є жорсткими; виявлено біфуркацію подвоєння періоду коливань; зроблено висновок щодо того, що амплітуди стійких коливань точок периферійного краю моделі лопатки можуть у кілька разів перевищувати товщину лопатки в цій області.

3. Запропонований комплексний підхід застосовано до оболонок з довільною геометрією плану за рахунок використання теорії R-функцій, що дозволило розв'язати завдання теорії нелінійних коливань пологих оболонок, у тому числі і практично важливі задачі аналізу динаміки моделей лопатей і лопаток турбомашин. Дано поширення методу R-функцій на новий клас задач – задачі про коливання оболонок, що взаємодіють з рідиною. За допомогою запропонованого підходу досліджено вплив наявності рідини на стійкість рухів оболонок. Зроблено висновок про суттєве підвищення амплітуд стійких коливань за наявності рідини.

4. Достовірність аналітичних і чисельних результатів досліджень нових закономірностей і властивостей режимів коливань обґрунтована використанням апробованих математичних методів; збіжністю розв'язків при варіюванні числа ступенів свободи в дискретних моделях розглянутих систем, а також шляхом їх порівняння з окремими розрахунковими та експериментальними даними, наведеними в літературі.

5. Результати дисертаційних досліджень використані при виконанні держбюджетної теми на кафедрі газогідромеханіки і тепломасообміну Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», координованої МОН України, і використовуються в практиці проектування лопатей гідротурбіни на ВАТ «Турбоатом» (м. Харків).

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Бреславський І.Д. Нелінійні нормальні форми проклацування пологої арки / І.Д. Бреславський, К.В. Аврамов, Ю.В. Міхлін // Машинознавство. – 2007. – № 9(123). – С. 12 – 17.

2. Бреславский И.Д. Колебания пологой арки, находящейся под действием продольной нагрузки / И.Д. Бреславский, К.В. Аврамов // Проблемы машиностроения. – 2008. – Т. 11, № 3. – С. 37 – 43.

3. Бреславский И.Д. Колебания геометрически нелинейных пологих оболочек переменной толщины, защемленных по части контура // И.Д. Бреславский, К.В. Аврамов / Динамические системы. – 2009. – № 27. – С. 17 – 29.

4. Breslavsky I. Nonlinear modes of snap-through motions of a shallow arch / I. Breslavsky, K.V. Avramov, Yu. Mikhlin, R. Kochurov // Journal of Sound and Vibration. – 2008. – № 311. – P. 297 – 313.

5. Бреславский И.Д. Несимметричное прощелкивание пологой арки / К.В. Аврамов, И.Д. Бреславский // Механіка та машинобудування. – 2006. – № 1. – С. 3 – 8.

6. Бреславский И.Д. Динамика пологих оболочек с шарнирно опертыми и свободными краями / И.Д. Бреславский, К.В. Аврамов // Надійність і довговічність машин і споруд. – 2008. – № 30. – С. 182 – 192.

7. Бреславский И.Д. Нелинейная динамика пологой цилиндрической оболочки сложной формы / И.Д. Бреславский, К.В. Аврамов // Механіка та машинобудування. – 2008. – № 1. – С. 63 – 70.

8. Бреславский И.Д. Колебания компрессорной лопатки при ее геометрически нелинейном деформировании / И.Д. Бреславский, К.В. Аврамов // Східно-Європейський журнал передових технологій. – 2009. – № 3/7 (39). – С. 50 – 54.

9. Бреславский И.Д. Нелинейные нормальные формы колебаний пологой оболочки в жидкости / И.Д. Бреславский, Е.А. Стрельникова, К.В. Аврамов // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2009. – № 13. – С. 17 – 23.

10. Бреславский И.Д. К прощелкиванию пологих арок / Р.Е. Кочуров, К.В. Аврамов, И.Д. Бреславский // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Динаміка та міцність машин. – 2007. – № 22. – С. 68 – 78.

11. Бреславский И.Д. Колебания пологих оболочек при геометрически нелинейном деформировании / К.В. Аврамов, И.Д. Бреславский // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: материалы XV международного симпозиума имени А.Г. Горшкова, Ярополец, 16-20 февраля 2009 г. – Т. 1. – М., 2009. – С. 5 – 6.

12. Бреславский И.Д. Анализ прощелкивания пологих конструкций для предсказания аварийных ситуаций / К.В. Аврамов, Ю.В. Михлин, И.Д. Бреславский // Можливості використання методів механіки для розв'язання питань безпеки в умовах надзвичайних ситуацій: матеріали V міжвузівської науково-практичної конференції, Харків, 8 грудня 2006 р. – Х., 2006. – С. 24 – 25.

13. Бреславский И.Д. Асимптотический анализ нелинейных колебаний пологих оболочек / И.Д. Бреславский, К.В. Аврамов // Тараповские чтения: сб. трудов международной научной школы-конференции. – Х., 2008. – С. 82 – 84.

14. Бреславський І.Д. Застосування нелінійних нормальних форм коливань для аналізу істотно нелінійних систем / І.Д. Бреславський, К.В. Аврамов // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: тези доп. XIII Всеукр. наук. конф., Львів, 3-5 жовтня 2006 р. – Львів, 2006. – С. 23.
15. Бреславський І.Д. Колебания геометрически нелинейных цилиндрических и пологих оболочек / Р.Е. Кочуров, К.В. Аврамов, И.Д. Бреславский // Физические и компьютерные технологии: труды 14-й международной научно-технической конференции, Харьков, 24-25 сентября 2008 г. – Х., 2008. – С. 462 – 465.
16. Breslavsky I. Normal modes for forced and parametric vibrations and its applications to elastic structures / K.V. Avramov, I. Breslavsky, R. Kochurov // Nonlinear Dynamics of Composite and Smart Structures: Conference Proceedings of the Euromech Colloquium 498, Kazimier Dolny, Poland, 21-24 May 2008. – Lublin, 2008. – P. 71 – 75.
17. Breslavsky I.D. Nonlinear vibrations analysis for cylindrical and shallow shells / K.V. Avramov, Yu.V. Mikhlin, I.D. Breslavsky // Nonlinear Phenomena in Polymer Solids and Low-dimensional Systems: Abstracts of Int. Confer., Moscow, Russia, 7-10 July 2008. – Moscow, 2008. – P. 20 – 21.
18. Breslavsky I.D. Normal vibration modes of shallow arches / I.D. Breslavsky, K.V. Avramov // Dynamical Systems – Theory and Applications: Abstracts of the 9th Conference, Lodz, Poland, 17-20 December 2007. – Lodz, 2007. – P. 48.
19. Breslavsky I.D. Normal vibration modes of shallow arches / I.D. Breslavsky, K.V. Avramov // Dynamical Systems – Theory and Applications: Proceedings of the 9th Conference, Lodz, Poland, 17-20 December 2007. – Vol. 1. – Lodz, 2007. – P. 143 – 150.
20. Breslavsky I.D. Normal modes analysis of snap-through motions of shallow arch / I.D. Breslavsky, K.V. Avramov, Yu.V. Mikhlin // Advanced Problems in Mechanics: Book of abstracts of the XXXV Summer School-Conference, St. Petersburg(Repino), Russia, 20-28 June 2007. – St. Petersburg, 2007. – P. 34.
21. Breslavsky I.D. Nonlinear modes of shallow arches and shells vibrations / I.D. Breslavsky, K.V. Avramov, Yu.V. Mikhlin // Нелинейная динамика: тезисы докладов 2-й международной конференции, Харьков, 25-28 сент. 2007 г. – Х., 2007. – С. 27.
22. Breslavsky I.D. Nonlinear modes of shallow arches and shells vibrations / I.D. Breslavsky, K.V. Avramov, Yu.V. Mikhlin // Нелинейная динамика: труды 2-й международной конференции, Харьков, 25-28 сент. 2007 г. – Х., 2007. – С. 55 – 60.

АНОТАЦІЯ

Бреславський І. Д. Нелінійні нормальні форми в розв'язках задач коливань тонких пологих оболонок. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла. – Державний вищий навчальний заклад «Запорізький національний університет» Міністерства освіти і науки України, Запоріжжя, 2010.

У роботі запропоновано комплексний підхід до аналізу вільних та вимушених багатомодових нелінійних коливань тонких пологих оболонок складної геометрії на основі методу нелінійних нормальних форм. Створений підхід дозволяє отримати амплітудно-частотні характеристики і виконати аналіз стійкості нелінійних коливань. Запропоновано також спосіб врахування взаємодії оболонки з рідиною.

За допомогою запропонованого підходу були вивчені закономірності вільних і вимушених нелінійних коливань пологих оболонок: нескінченно довгої вільно опертої пологої оболонки; прямокутної в плані пологої оболонки, з двома вільними і двома вільно опертими краями; оболонки, план якої є прямокутником з двома надрізами; моделі лопаті гідротурбіни, що знаходиться як у вакуумі, так і в рідині; моделі компресорної лопатки.

Ключові слова: пологі оболонки, оболонки складної геометрії, нелінійні коливання, нелінійні нормальні форми, R-функції.

АННОТАЦИЯ

Бреславский И. Д. Нелинейные нормальные формы в решениях задач колебаний тонких пологих оболочек. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела. – Государственное высшее учебное заведение «Запорожский национальный университет» Министерства образования и науки Украины, Запорожье, 2010.

В работе предложен комплексный подход к анализу свободных и вынужденных многомодовых нелинейных колебаний тонких пологих оболочек переменной толщины и произвольной формы в плане. Суть этого подхода состоит в следующем. Перемещения при нелинейных колебаниях раскладываются по собственным формам линейных колебаний с дальнейшим описанием нелинейной динамики оболочки конечномерной системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений единого вида. В зависимости от геометрических параметров оболочки для получения дискретной модели либо к уравнениям движения применяется метод Бубнова-Галеркина, либо используются уравнения Лагранжа второго рода. Предложен подход к анализу взаимодействия оболочки с жидкостью. Нелинейные колебания пологих оболочек, описываемых конечномерными моделями, исследуются с помощью комбинации методов нелинейных нормальных форм (Шоу-Пьера и Каудерера-Розенберга), которые, с одной стороны, позволяют уменьшить размерность решаемой системы, с другой – приводят к нахождению весьма важных с практической точки зрения классов движений. Методы нелинейных нормальных форм применяются в сочетании с методом гармонического баланса или методом многих масштабов, а в случае действия внешней периодической силы – с методом Раушера.

С помощью предложенного подхода изучены закономерности свободных и вынужденных нелинейных колебаний пологих оболочек, к которым относятся бесконечно длинные свободно опертые пологие оболочки; прямоугольные в плане пологие оболочки с двумя свободными и двумя свободно опертыми краями; оболочки, план которых является прямоугольником с двумя надрезами; модели лопасти гидротурбины, находящейся как в вакууме, так и в жидкости; модели компрессорной лопатки. Построены скелетные кривые и амплитудно-частотные характеристики нелинейных колебаний. Для всех найденных режимов периодических колебаний проведено исследование их устойчивости. Для этого использовались методы Флоке-Ляпунова, определителей Хилла и алгебраизации по Айнсу.

Приведены зависимости характеристик колебаний от геометрических параметров оболочек. Полученные характеристики находятся в хорошем соответствии с известными расчетными и экспериментальными значениями. В рамках исследования каждой из механических систем были проведены численные эксперименты, которые дали возможность проанализировать точность предложенного подхода и подтвердить его эффективность.

Предложенный подход позволяет получить амплитудно-частотные характеристики и выполнить анализ устойчивости нелинейных колебаний, что дает возможность исследовать напряженно-деформированного состояния пологих оболочек сложной геометрии.

Ключевые слова: пологие оболочки, оболочки сложной геометрии, нелинейные колебания, нелинейные нормальные формы, R-функции.

ANNOTATION

Breslavskiy I. D. Nonlinear normal modes in solutions of the vibration problems of thin shallow shells. – Manuscript.

Thesis for a Candidate's degree in Physics and Mathematics (speciality 01.02.04 – Deformable Solid Mechanics). – State Higher Educational Institution "Zaporizhzhya National University" of Ministry of Education and Science of Ukraine, Zaporizhzhya, 2010.

New approach for free and forced multimode vibration analysis of the thin shallow shells with complex geometry is proposed. The approach is based on the nonlinear normal modes theory. The proposed approach allows obtaining frequency responses and performing stability analysis of nonlinear oscillations. New approach for fluid-shell interaction also is proposed.

The behavior of free and forced nonlinear vibrations of the following shallow shells, such as an infinitely long simply supported shallow shell; rectangular shallow shell with two free and two simply supported edges; the shell, which plan is a rectangle with two cutouts; the model of hydroturbine blade in vacuum and in the fluid; model of compressor blade, had been studied.

Key words: shallow shells, shells of complex geometry, nonlinear oscillations, nonlinear normal modes, R-functions.