

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

МАЗУР Ольга Сергіївна

УДК 539.3

**ПАРАМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ ОРТОТРОПНИХ
ПЛАСТИН СКЛАДНОЇ ФОРМИ**

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Донецьк - 2010

Дисертацією є рукопис

Робота виконана на кафедрі прикладної математики Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут", Міністерство освіти і науки України

Науковий керівник	доктор технічних наук, професор Курпа Лідія Василівна, Національний технічний університет „ХПІ” завідувач кафедри прикладної математики
Офіційні опоненти	доктор фізико-математичних наук, професор Карнаухов Василь Гаврилович, Інститут механіки ім. С.П. Тимошенко НАН України, завідувач відділом термoprужності кандидат фізико-математичних наук, доцент Алтухов Євген Вікторович, Донецький національний університет, доцент кафедри теорії пружності і обчислювальної математики

Захист відбудеться " 1 " липня 2010р. о 14.30 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради К 11.051.05 при Донецькому національному університеті за адресою: 83001, м. Донецьк, вул. Університетська, 24, головний корпус, математичний факультет, ауд.603.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Донецького національного університету (м. Донецьк, вул. Університетська, 24).

Автореферат розісланий " 1 " червня 2010р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради
кандидат фізико-математичних наук, доцент

Ю.В. Мисовський

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Тонкостінні конструкції пластинчатого та оболонкового типу широко використовуються в багатьох сферах діяльності, таких як будівництво, машинобудування, приладобудування, авіапромисловість, суднобудування та ін. В умовах експлуатації такі конструкції нерідко піддаються дії різного характеру навантажень, що може призвести до небажаних наслідків з точки зору динамічної міцності та надійності досліджуваної конструкції. Наприклад, періодичне навантаження, що діє в серединній площині пластини, при відповідних умовах може викликати інтенсивні поперечні коливання. Параметрично збуджувальні коливання є подібними до вимушених коливань, але слід звернути увагу на деякі їх особливості. Перш за все, головний параметричний резонанс настає при збігу збуджуючої частоти з подвоєною частотою власних коливань. Ще однією особливістю параметричного резонансу є наявність суцільних областей збудження (областей динамічної нестійкості). Завдяки цим та іншим факторам загальноприйняті методи демпфування, віброізоляції та ін. можуть бути безсилими при параметричному резонансі. Якщо навіть вібрації не загрожують цілісності конструкції та її експлуатації, при тривалому використанні вони можуть призвести до утомного руйнування. Саме тому дослідження параметричних коливань та розробка методів боротьби з ними викликає чималий інтерес серед науковців.

Слід зауважити, що останнім часом дослідженню параметрично збуджуваних коливань пластин та оболонок присвячено багато публікацій, однак в більшості з цих робіт досліджуються елементи канонічної форми (прямокутник, коло, еліпс, трикутник та ін.) при досить обмежених типах закріплення країв. А тому питання вивчення параметричного резонансу для пластинчатих та оболонкових конструкцій довільної форми є актуальним. В дисертаційній роботі запропоновано чисельно-аналітичний метод дослідження параметричних коливань ортотропних пластин довільної геометрії з різними видами граничних умов. Запропонований метод базується на комплексному застосуванні теорії R-функцій та варіаційних методів.

Мета та основні задачі дослідження. Головною метою роботи є розробка чисельно-аналітичного методу дослідження параметричних коливань та динамічної стійкості елементів тонкостінних конструкцій, що моделюються ортотропними пластинами довільної форми при різних видах граничних умов. Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити наступні задачі:

- для області з неканонічною геометрією розробити алгоритм дискретизації системи диференціальних рівнянь в частинних похідних доповненої різноманітними граничними умовами;
- в аналітичному вигляді отримати формули для обчислення коефіцієнтів нелінійної системи n звичайних диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами, до якої була зведена початкова задача;

алгоритм розробити для двох випадків постановки задачі: в переміщеннях та в мішаній формі;

- застосувати метод тригонометричних рядів, запропонований Болотіним В.В. для дослідження динамічної стійкості пружних систем, на випадок ортотропних пластин довільної форми при різних видах граничних умов;
- розробити та чисельно реалізувати алгоритми розв'язання допоміжних задач, необхідних для реалізації запропонованого методу дискретизації: задачі про власні коливання, а також послідовності плоских задач теорії пружності ортотропних пластин складної форми з різними видами закріплення країв;
- розробити відповідне програмне забезпечення в рамках системи POLE-RL та провести тестування запропонованого підходу;
- розв'язати низку нових задач з метою дослідження параметричних коливань ортотропних пластин складної форми при різних видах граничних умов.
- **Об'єкт дослідження** – пружні механічні системи, елементи яких моделюються ортотропними пластинами складної форми.

Предмет дослідження – параметричні коливання ортотропних пластин складної форми при різних видах крайових умов.

Методи дослідження – комплексне застосування теорії R- функцій, методу Рітца, процедури Гальоркіна, методу Рунге-Кутта.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана на кафедрі прикладної математики Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут" (НТУ "ХПІ") відповідно до:

держбюджетної теми «Розробка чисельно-аналітичних методів дослідження лінійних та нелінійних задач механіки для композитних пластин і пологих оболонок» за наказом Міністерства освіти та науки України (№960 від 22.12.2004), №ДР0105U000573 (в період з 2005р. по 2007р.), держбюджетної теми «Створення на базі теорії R-функцій методів розв'язку задач нелінійної динаміки пластин та пологих оболонок» за наказом Міністерства освіти та науки України (№1044 від 27.11.2007), №ДР0105U02071180 (в період з 2008р. по 2010р.)

Наукова новизна отриманих результатів полягає в тому, що:

- вперше на базі теорії R- функцій розроблено чисельно-аналітичний метод дослідження параметричних коливань ортотропних пластин складної форми з різними видами крайових умов;
- запропоновано ефективний алгоритм дискретизації вихідної нелінійної системи рівнянь руху, представленої як в переміщеннях так і в мішаній формі;
- отримані аналітичні формули для обчислення коефіцієнтів системи n нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, до якої зведено відповідну задачу при багатомодовій апроксимації; виконані варіаційні

постановки для розв'язання допоміжних задач про лінійні коливання ортотропних пластин та плоских задач теорії пружності; побудовані необхідні структурні формули для чисельної реалізації цих задач;

- розроблено метод дослідження нелінійних коливань ортотропних пластин складної форми, що знаходяться під дією статичного навантаження;
- метод знаходження границь областей динамічної нестійкості та амплітуд усталених коливань в зонах резонансу розвинуто для ортотропних пластин практично довільної форми при різних видах закріплення країв;
- розв'язані нові задачі про параметричні коливання ізотропних та ортотропних пластин складної форми з використанням одно- та трьохмодової апроксимації. Досліджено вплив геометричних параметрів пластини, граничних умов, демпфування на області динамічної нестійкості, а також на амплітуди нелінійних усталених коливань, що виникають після втрати стійкості.

Вірогідність отриманих результатів забезпечується коректністю математичних постановок задач; використанням апробованих математичних методів; контролем практичної збіжності результатів; порівнянням окремих результатів отриманих в роботі з відомими в літературі; дослідженням збіжності результатів при виродженні складної форми пластини в канонічну.

Практична цінність роботи полягає в тому, що для елементів тонкостінних конструкцій, розрахунковими моделями яких є ортотропні пластини складної форми, розроблено алгоритми та відповідне програмне забезпечення для побудови областей нестійкості та дослідження динамічної поведінки в областях резонансу. Отримані в роботі результати можуть бути застосовані в подальших прикладних дослідженнях.

Результати дисертаційної роботи були використані на кафедрі прикладної математики НТУ "ХПІ" у навчальному процесі при викладанні курсу "Рівняння математичної фізики" для спеціальності динаміка і міцність машин, а також курсу "Диференціальні рівняння" для спеціальності прикладна математика.

Публікації та особистий внесок здобувача. Результати по темі дисертаційної роботи опубліковано у 16 наукових працях. Серед них 3 статті [2-4] у наукових журналах затверджених ВАК України як фахові видання, 3 статті у наукових журналах та збірниках [1,11,14], 10 публікацій у матеріалах наукових конференцій [5-10,12,13,15,16].

Головні результати роботи отримані здобувачем особисто. В роботах, що отримані в співавторстві, вклад здобувача полягає в наступному: в роботі [1] одержано чисельні результати при дослідженні лінійних коливань пластин складної форми, що знаходяться під дією статичного навантаження; в роботі [2] запропоновано метод дослідження нелінійних коливань пластин складної форми, що знаходяться під дією статичного навантаження; в роботах [5,6,7] отримані чисельні результати дослідження нелінійних коливань пластин довільної геометрії стиснених статичним навантаженням; в

роботах [8,9,14,15] запропоновано алгоритм побудови областей динамічної нестійкості для пластин складної форми, представлені нові результати досліджень впливу геометричних параметрів, граничних умов, демпфування та параметрів навантаження на досліджувані характеристики; в роботі [3] запропоновано метод дослідження параметричних коливань, якщо рівняння руху представлені в мішаній формі; в роботі [4] розроблено алгоритм дослідження параметричних коливань пластин при багатомодовій апроксимації прогину, отримані чисельні результати з використанням трьохмодової апроксимації.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи доповідалися на міжнародних конференціях Microcad 2005, 2006, 2007, 2009 (Харків, травень 2005, 2006, 2007, 2009), на конференції молодих вчених та спеціалістів «Современные проблемы машиностроения» (Харків, грудень 2005), на міжнародній конференції «Пятые Окуневские чтения» (Санкт-Петербург, червень 2006), на IV міжнародній науковій конференції «Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела» (Донецьк, червень 2006), на IX всеросійському з'їзді по теоретичній та прикладній механіці (Нижній Новгород, серпень 2006), на XIV міжнародній науковій конференції вчених України Білорусії, Росії (Севастополь, вересень 2006), на міжнародній конференції «Актуальные проблемы прикладной математики и механики» присвяченій пам'яті академіка НАН України В.Л. Рвачева (Харків, жовтень 2006); на міжнародній конференції «Dynamical system modelling and stability investigation» (Київ, травень 2007), на другій міжнародній конференції «Nonlinear dynamics» (Харків, вересень 2007), на міжнародній технічній конференції пам'яті академіка НАН України В. І. Моссаковського (Дніпропетровськ, жовтень 2007), на 9-ій конференції «Dynamical systems.Theory and applications» (Лодзь, Польща, грудень 2007), на наукових семінарах кафедри прикладної математики національного технічного університету «Харківського політехнічного інституту», 2007, 2008, 2009. Дисертаційна робота в повному обсязі була апробована на науковому семінарі "Сучасні проблеми механіки" під керівництвом професора доктора фізико-математичних наук Мелешко В.В., Київський національний університет ім. Т. Шевченко, кафедра теоретичної та прикладної механіки, 2010.

Структура і обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, одного додатку, списку використаних джерел із 143 найменувань (на 16 стор.). Загальний обсяг роботи складає 144 сторінки, включаючи 40 рисунків та 17 таблиць.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність теми дослідження, визначено об'єкт та предмет дослідження, сформульовано мету і основні задачі роботи, визначено наукову новизну, практичне значення отриманих результатів.

У першому розділі проведено аналіз стану проблеми параметричних коливань пластин та оболонок, а також існуючих методів для її розв'язання. Відзначено, що фундаментальну роль у розробці теорії тонких пластин та оболонок і методів їх дослідження відіграли праці С.О. Амбарцумяна, О.О. Андропова, М. М. Боголюбова, В. В. Болотіна, В. З. Власова, А. С. Вольміра, И. И. Воровича, К. З. Галімова, І. І. Гольденבלата, О. Л. Гольденвейзера, Е. І. Григолюка, Я. М. Григоренка, О. М. Гузя, В. І. Гуляєва, Г. Доннелла, Б.Я. Кантора, Т. Кармана, М.С. Корнішина, М.М. Крилова, О.С. Космодам'янського, В. Д. Кубенка, С. Г. Лехницького, О.М. Ляпунова, А. І. Лур'є, Х. М. Муштарі, В. В. Новожилова, П. М. Огибалова, О. Д. Оніашвілі, В.Л. Рвачева, С.П. Тимошенка та ін. Значний вклад у розвиток методів дослідження динамічної поведінки, параметричних коливань та стійкості пластин та оболонок внесли роботи А.Я. Александрова, Є.В. Алтухова, М.А. Алфутова, В.А. Баженова, О.І. Беспалової, А.Т. Василенка, О.Я. Григоренка, В. З. Грищака, В.С. Гудрамовича, С.О. Калоєрова, В.Г. Карнаухова, Г.С. Кіта, М.Є. Кочина, Т.С. Краснопольської, В.А. Криська, Л.В. Курпа, Р.М. Кушніра, Л. Лібреску, В.В. Лободи, А. А. Мартинюка, М. В. Марчука, В.В. Мелешка, Ю.В. Міхліна, Я.Г. Савули, В.І. Сторожева, Г.Т. Сулима, В.Н. Паймушина, Н.Д. Панкратової, В.Г. Піскунова, Б.Л. Пелеха, А.О. Рассказова, Дж. Редді, Е. Рейснера, Л.О. Фільштинського, П.П. Чулкова, В.П. Шевченка, Г. Шмідта, М.О. Шульги, J. Awrejcewicz, P. K. Datta, M. Ganapathi, S. K. Sahu та ін.

На основі виконаного огляду опублікованих робіт сформульовані нові постановки задач досліджень, які направлені на подальший розвиток ефективних методів розрахунку лінійних та геометрично нелінійних коливань пластин складної форми з різними типами граничних умов, що знаходяться під дією динамічного навантаження в своїй площині.

У другому розділі запропоновано метод дослідження параметричних коливань ортотропних пластин зі складною формою для різних видів граничних умов.

В роботі розглянуто тонкі ортотропні пластини постійної товщини, що знаходяться під дією зусиль в серединній площині. Для побудови математичної моделі задачі про коливання тонкої пластини застосовано класичну теорію, що базується на прийнятті гіпотез Кірхгофа-Лява. В рамках цієї теорії рівняння руху ортотропної пластини набувають вигляду

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} N_x + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} T + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} N_y - \varepsilon \rho h \frac{\partial w}{\partial t} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (2)$$

Рівняння руху доповнюються граничними та початковими умовами. Навантаження, що прикладене до ділянки контуру, враховується умовами

$$N_n = -p, \quad T_n = 0,$$

де N_n, T_n – нормальні та дотичні зусилля на контурі з нормаллю $\vec{n}$.

Для зручності викладення алгоритму система руху (1)-(2) представлена у безрозмірній матричній формі

$$A\bar{U} = \bar{Nl} \bar{\Psi}, \quad (3)$$

$$L_A w = NL \bar{\Psi}, w = \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (4)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} C_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} & C_3 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ C_3 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & C_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{pmatrix},$$

$$\bar{Nl} \bar{\Psi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \left(C_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + C_3 \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \left(C_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + C_3 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{pmatrix}$$

$$L_A = \frac{1}{12(1-\mu_1\mu_2)} \left(C_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2C_2 + C_3 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \right),$$

$$NL \bar{\Psi}, w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} N_x \bar{\Psi}, w + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} T \bar{\Psi}, w + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} N_y \bar{\Psi}, w.$$

В другому розділі також наведено рівняння руху в мішаній формі.

У третьому розділі запропоновано метод дискретизації системи рівнянь руху (3)-(4), що описують нелінійні коливання ортотропних пластин, що знаходяться під дією навантаження у своїй площині, у випадку областей складної форми.

Прогин пластини представлено у вигляді зрізаного ряду Фур'є

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^n f_i(x) \bar{w}_i(y, t), \quad (5)$$

де $w_i(x, y, t)$ — власні функції, знайдені при розв'язанні задачі про лінійні коливання ненавантаженої пластини. Математична постановка такої задачі зводиться до розв'язання рівняння

$$L_A w_i = \omega_{L,i}^2 w_i, \quad (6)$$

де $\omega_{L,i}$ — безрозмірна частота пластини, що відповідає формі коливань w_i .

Переміщення в площині пластини представлено у вигляді

$$u(x, y, t) = u_0(x, y) + \sum_{i,j=1}^n f_i(x) \bar{f}_j(y) \bar{u}_{ij}(x, y, t),$$

$$v(x, y, t) = v_0(x, y) + \sum_{i,j=1}^n f_i(x) \bar{f}_j(y) \bar{v}_{ij}(x, y, t). \quad (7)$$

Вектор $\bar{U}_0 = \bar{\Psi}_0, v_0$ в (7) — розв'язок системи,

$$A\bar{U}_0 = 0 \quad (8)$$

доповненої на навантаженій ділянці контуру граничними умовами

$$N_n^L \bar{\mathbf{u}}_0, \bar{\mathbf{v}}_0 = -1, T_n^L \bar{\mathbf{u}}_0, \bar{\mathbf{v}}_0 = 0, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}} \in \partial\Omega_1, \quad (9)$$

N_n^L, T_n^L - лінійні нормальне та дотичне зусилля, які визначаються як

$$N_n^L \bar{\mathbf{u}}_0, \bar{\mathbf{v}}_0 = \frac{1}{1 - \mu_1 \mu_2} \left[\mathbf{C}_1 l^2 + \mu_1 m^2 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \dots, \right. \\ \left. T_n^L \bar{\mathbf{u}}_0, \bar{\mathbf{v}}_0 = \frac{1}{1 - \mu_1 \mu_2} \left[\mathbf{A}_1 - C_1 \bar{lm} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \dots \right. \right. \quad (10)$$

Вектор $\bar{U}_{ij} = \bar{\mathbf{u}}_{ij}, \bar{\mathbf{v}}_{ij}$ в (7) є розв'язок системи

$$A\bar{U}_{ij} = \bar{N}l^2 \bar{\mathbf{u}}_i, \bar{\mathbf{w}}_j, \quad (11)$$

що задовольняє на навантаженій частині контуру граничним умовам

$$N_n^L \bar{\mathbf{u}}_{ij}, \bar{\mathbf{v}}_{ij}, \bar{\mathbf{w}}_i, \bar{\mathbf{w}}_j = 0, T_n^L \bar{\mathbf{u}}_{ij}, \bar{\mathbf{v}}_{ij}, \bar{\mathbf{w}}_i, \bar{\mathbf{w}}_j = 0, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}} \in \partial\Omega_1. \quad (12)$$

Після підстановки виразів (5), (7) в рівняння (4) та застосування методу Бубнова-Гальоркіна отримано систему звичайних нелінійних диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами

$$\mathbf{f}'' + \varepsilon \mathbf{f}' + \mathbf{C} \mathbf{f} - p \bar{\mathbf{A}} \mathbf{f} + \mathbf{B} \bar{\mathbf{f}} = 0, \quad (13)$$

де

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \omega_{L,1}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_{L,2}^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_{L,n}^2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}, \mathbf{f}' = \begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \\ \dots \\ f_n' \end{pmatrix}, \mathbf{f}'' = \begin{pmatrix} f_1'' \\ f_2'' \\ \dots \\ f_n'' \end{pmatrix},$$

$\bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{f}}$ - вектор з компонентами $b_m = \sum_{i,j,k=1}^n f_i f_j f_k \beta_{ijk}^m$. Елементи матриці $\mathbf{A}$ та вектору $\bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{f}}$ визначаються за формулами

$$\alpha_i^m = \frac{1}{\|\mathbf{w}_m\|^2} \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} N_x^L \bar{\mathbf{u}}_0, \bar{\mathbf{v}}_0 + \dots, \right. \\ \left. \beta_{kij}^m = -\frac{1}{\|\mathbf{w}_m\|^2} \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} N_x^N \bar{\mathbf{u}}_{ij}, \bar{\mathbf{v}}_{ij}, \bar{\mathbf{w}}_i, \bar{\mathbf{w}}_j + \dots \right. \right.$$

Нехай навантаження має вигляд

$$p = p_0 + p_t \cos \theta t. \quad (14)$$

Задача про динамічну стійкість є нелінійною, однак, для визначення областей динамічної нестійкості в разі систем з періодичними коефіцієнтами

в першому наближенні достатньо використовувати лінійну теорію. Отже поклавши $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ в (13), отримуємо відповідну лінійну систему

$$\mathbf{f}'' + 2\varepsilon_1 \mathbf{f}' + \mathbf{C}\mathbf{f} - \mathbf{p}_0 + p_t \cos \theta t \mathbf{A}\mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad (15)$$

де позначення $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$ введено для зручності подальшого викладення.

Як показано в роботах В.В. Болотіна, області нестійкості, обмежені розв'язками з періодом $T = 2\pi/\theta$, розташовані поблизу частот $\theta^* = 2\Omega_L/m$, $m = 2, 4, \dots$, області нестійкості, обмежені розв'язками з періодом $2T$, знаходяться поблизу частот $\theta^* = 2\Omega_L/m$, $m = 1, 3, \dots$. Періодичні розв'язки, що відокремлюють головні області нестійкості ($m = 1$), саме вони є найбільшими, а тому і важливішими для практичного застосування, будемо шукати у вигляді

$$\mathbf{f} = \mathbf{a} \sin \frac{\theta t}{2} + \mathbf{b} \cos \frac{\theta t}{2}, \quad (16)$$

де $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$ деякі вектори, що не залежать від часу. Підставляючи (16) в систему (15), отримуємо систему матричних рівнянь для знаходження критичних частот

$$\left(-\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 \mathbf{E} + \mathbf{C} - p_0 \mathbf{A} + \frac{1}{2} p_t \mathbf{A} \right) \mathbf{a} - \varepsilon_1 \theta \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad \varepsilon_1 \theta \mathbf{a} + \left(-\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 \mathbf{E} + \mathbf{C} - p_0 \mathbf{A} - \frac{1}{2} p_t \mathbf{A} \right) \mathbf{b} = \mathbf{0}. \quad (17)$$

Для знаходження амплітуд усталених коливань в зоні головного параметричного резонансу система звичайних нелінійних диференціальних рівнянь (13) була проінтегрована методом Рунге-Кутта.

В цьому ж розділі представлено методи розв'язання допоміжних задач (6), (8)-(9), (11)-(12).

Розв'язання задачі про лінійні коливання ортотропної ненавантаженої пластини виконувалося за допомогою методу Рітца.

Побудова систем базисних функцій, що задовольняють граничним умовам, виконувалася за допомогою методу R-функцій.

Розв'язання послідовності плоских задач теорії пружності також виконувалося за допомогою варіаційно-структурного методу.

Побудова послідовностей базисних функцій для плоских задач теорії пружності виконана за допомогою теорії R-функцій.

Четвертий розділ присвячено розв'язанню тестових та нових задач про параметричні коливання ортотропних пластин.

З метою контролю достовірності методу та розробленого програмного забезпечення було проведено дослідження параметричних коливань пластин канонічної форми. Отримані результати були зіставлені з результатами відомими з літератури. Приклад тестової задачі наведено нижче.

Розглянемо параметричні коливання вільно опертої прямокутної пластини, що стискається вздовж всього контуру (рис. 1). Розрахунки були проведені для пластини виготовленої з вуглепластику.

В табл.1. представлені значення критичних частот, що обмежують головну область нестійкості, які отримано за допомогою запропонованого методу та відповідні значення, які наведено в роботі[1].

Для демонстрації можливостей запропонованого підходу були розв'язані задачі про параметричні коливання ізотропних та ортотропних пластин складної геометрії при різних способах їх закріплення. Нижче наведені деякі із розв'язаних задач. Наприклад, було досліджено параметричні коливання ізотропної квадратної пластини з квадратним вирізом в центрі, рис.2. Задачу було розв'язано за допомогою представленого алгоритму у випадку її математичної постановки в переміщеннях при використанні одномодової апроксимації прогину.

Розрахунки проводились для наступних видів граничних умов для прогину

1. C-C – жорстко закріплена пластина:
2. SS-SS – вільно оперта пластина:
3. C-SS – змішані граничні умови (тип 1): зовнішній контур ($\partial\Omega_1$) – жорстко закріплений, внутрішній ($\partial\Omega_2$) – вільно опертий:
4. SS-F – змішані граничні умови (тип 2): зовнішній контур ($\partial\Omega_1$) – вільно опертий, внутрішній ($\partial\Omega_2$) – вільний.

В табл. 2 наведено порівняння одержаних значень частотного параметру для умов 4-го виду з результатами інших авторів, яке свідчить про достовірність запропонованого методу.

На рис. 3 представлені результати, які були отримані внаслідок дослідження впливу вирізу на частотний параметр, пластини що стиснута навантаженням p_0 , для граничних умов SS-F.

Далі для розглянутої пластини була побудована перша область динамічної нестійкості для різних граничних умов, рис.4. Аналіз результатів свідчить про те, що для умов SS-F області нестійкості розташовані нижче за інші та займають меншу площу.

На рис.5 представлені результати дослідження залежності ОДН від розміру вирізу. Розрахунки проводилися для граничних умовах SS-F.

Вплив розміру вирізу на резонансні криві в зоні головного параметричного резонансу проаналізовано для різних відношень c/a , рис.6.

Якщо амплітуди коливань зіставні з початковими умовами поза межами області нестійкості, то в областях резонансу значення амплітуди досягає величини зіставної з товщиною пластини. Збільшення вирізу веде до збільшення амплітуд коливань та зміщення резонансних кривих. Зауважимо, що при $0 \leq c/a \leq 0.3$, криві зміщуються до менших значень збуджуючої частоти θ , а при $0.3 \leq c/a \leq 0.5$ зміщуються в зворотному напрямку, що відповідає результатам отриманим при побудові ОДН.

Нижче наведено приклад задачі, сформульованої у мішаній формі. А саме, досліджується динамічна поведінка ортотропної пластини виготовленої з склопластику, яка навантажена нормальними зусиллями вздовж сторін паралельних осі OY, рис.7.

В ході розв'язання задачі про лінійні коливання пластини отримані власні частоти коливань ненавантаженої пластини та відповідні форми

коливань. Перші три форми та відповідні їм частотні параметри представлені в табл.3.

Головну увагу приділено поведінці системи в зоні головного параметричного резонансу, що відповідає першій формі коливань. Інтегрування нелінійної системи (13) проводилося методом Рунге-Кутта 4-го порядку.

На рис. 8 зображена залежність амплітуди від збуджуючої частоти в центрі пластини. Частоти θ вибиралися з головної зони резонансу (рис. 9), що відповідає першій формі коливань. Показано, що результати отримані при використанні однієї та трьох мод практично співпадають. Також зауважено, що при досить малих значеннях початкової амплітуди результати отримані за допомогою лінійної теорії відповідають результатам отриманим за допомогою нелінійної теорії, тобто коливання збуджуються саме в межах зони резонансу, побудованої в рамках лінеаризованої задачі.

На рис. 10 представлено залежності прогину в центрі пластини від часу (в резонансній зоні, що відповідає першій формі). При використанні однієї та трьох мод отримано періодичні коливання з частотою, в два рази меншою за збуджуючу частоту θ .

Аналізуючи отримані результати можна зробити висновок, що утримання двох додаткових членів ряду (5) не призводить до істотної зміни результатів в тих випадках, коли відповідні ОДН не перетинаються. В свою чергу, якщо параметри навантаження знаходяться в перетині двох, або декількох ОДН, одного члена ряду для дослідження стає недостатньо.

ВИСНОВКИ

1. Вперше на базі теорії R- функцій та варіаційних методів розроблено чисельно-аналітичний метод дослідження параметричних коливань ортотропних пластин складної форми з різними видами граничних умов для математичної постановки задачі, виконаної як в переміщеннях так і в мішаній формі.
2. Запропоновано алгоритм дискретизації задачі про параметричні коливання ортотропних пластин для випадку складної геометрії та різних видів граничних умов. З цією метою одержані варіаційні постановки допоміжних задач про лінійні коливання пластин та плоских задач теорії пружності, а також побудовані необхідні структури розв'язку за допомогою R-функцій.
3. Вперше застосована багатомодова апроксимація невідомих функцій та отримані аналітичні формули для обчислення коефіцієнтів системи n нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, до якої зведена початкова задача.
4. Запропонований метод застосовано для дослідження нелінійних коливань ортотропних пластин складної форми, що знаходяться під дією як статичного, так і динамічного навантаження.

5. Для ортотропних пластин практично довільної форми розроблено чисельно-аналітичний метод знаходження границь областей нестійкості, що базується на використанні лінеаризованої теорії.
6. На базі одно- та багатомодової апроксимації невідомих функцій досліджено нелінійні параметричні коливання ортотропних пластин та визначені амплітуди усталених коливань в зонах резонансу.
7. Розроблене програмне забезпечення апробоване на тестових задачах та застосовано до розв'язання нових задач про параметричні коливання ізотропних та ортотропних пластин складної форми з метою дослідження впливу геометричних параметрів, граничних умов параметрів навантаження та демпфування на області динамічної нестійкості, амплітудно-частотні залежності, залежності прогину від часу.

ОПУБЛІКОВАНІ ПРАЦІ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Курпа Л.В. Исследование колебаний пластин сложной формы, находящихся под действием продольной нагрузки / Л.В. Курпа, Г.Б. Линник, О.С. Мазур // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Динаміка і міцність машин. – 2005. – № 21 – С. 61-67.
2. Курпа Л.В. Исследование нелинейных колебаний пластин сложной геометрии, сжимаемых статической нагрузкой / Л.В. Курпа, О.С. Мазур // Прикладная механика. – 2006. – № 12. – С. 124-132.
3. Курпа Л.В. Параметричні коливання пластин складної форми плану / Л.В. Курпа, О.С. Мазур // Машинознавство. – 2008. – №3 (33). – С. 9-15.
4. Курпа Л.В. Метод R-функцій для дослідження параметричних коливань ортотропних пластин складної форми. / Л.В. Курпа, О.С. Мазур // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2009. – №4. – С.117-126.
5. Курпа Л.В. Метод R-функций в исследовании нелинейных колебаний пластин сложной формы, сжимаемых в своей плоскости / Л.В. Курпа, О.С. Мазур // Прикладные задачи математики и механики: Материалы XIV межд. науч. конф. ученых Украины, Белоруссии, России, Севастополь, 11-15 сентября 2006. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2006 – С.7-11.
6. Курпа Л.В. Исследование нелинейных колебаний пластин сложной формы, нагруженных в своей плоскости / Л.В. Курпа, О.С. Мазур // Пятые Окуневские чтения. Международная конференция: Тезисы докладов. – Санкт-Петербург, Россия, 26-30 июня 2006. – Санкт-Петербург: Типография БГТУ, 2006. – С.43
7. Курпа Л.В. R-функции для исследования нелинейных колебаний пластин и пологих оболочек сложной планформы при больших

- амплитудах / Л.В. Курпа, О.С. Мазур, Г.В. Пильгун, Г.Н. Тимченко // IX всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике: Тезисы докладов, Нижний Новгород, 22-28 августа 2006. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского, 2006. – Т.1. – С.79.
8. Курпа Л.В. Параметрические колебания пластин и пологих оболочек сложной геометрии / Л.В. Курпа, О.С. Мазур // Міжнародна технічна конференція пам'яті академіка НАН України В. І. Моссаковського: Тези доповідей, Дніпропетровськ, 17-19 жовтня 2007. – Дніпропетровськ: Вид-во ДНУ, 2007 – С. 263-264.
 9. Курпа Л.В. Применение метода R-функций для исследования областей динамической неустойчивости пластин сложной формы / Л.В. Курпа, О.С. Мазур // International Conf. Dynamical System Modelling and Stability Investigation : Thesis of reports, Kiev (Ukraine), May 22-25, 2007. – Киев, 2007 – Р. 301.
 10. Мазур О.С. Нелинейные колебания пластин сложной конфигурации, находящиеся под действием нагрузки в срединной плоскости / О.С. Мазур // Современные проблемы машиностроения. Конференция молодых ученых и специалистов: Тезисы докладов., Харьков 29 ноября-1 декабря 2005. – Харьков: Ин-т проблем машиностроения им. А.М. Подгорного, 2005. – С.11.
 11. Мазур О.С. Определение областей динамической неустойчивости для пластин сложной геометрии / О.С. Мазур // Вестник Национального технического университета «ХПИ». Сборник научных трудов. Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – 2006. – № 32 – С.112-119.
 12. Мазур О.С. Параметрические колебания пластин сложной формы. / О.С. Мазур // Актуальные проблемы прикладной математики и механики. Международная конференция посвященная 80-летию со дня рождения академика НАН Украины В.Л. Рвачева: Тезисы докладов, Харьков: ИПМаш им. Подгорного НАН Украины, 23-26 октября 2006. – Харьков, 2006 – С.78.
 13. Мазур О.С. Применение метода R-функций к исследованию геометрически нелинейных колебаний пластин сложной планформы, нагруженных в срединной плоскости / О.С. Мазур // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела: Материалы IV Международной научной конференции, посвященной памяти академика НАН Украины А.С. Космодамианского, Донецк - Мелекино, 12-14 июня 2006 г. – Донецк: Юго-Восток, 2006. – С. 241.
 14. Awrejcewicz J. Research of Stability and Nonlinear vibration of plates by R-Functions Method. / J. Awrejcewicz, L. Kurpa, O. Mazur // Modeling Simulation and control of Nonlinear Engineering Dynamical Systems. – UK, Springer, 2009. – P.179-189.
 15. Kurpa L. Analysis of the nonlinear vibrations and dynamic instability of plates and shallow shells with complex form by R-functions method. / L.

Kurpa, O. Mazur // Nonlinear dynamics. The second international conference. Proceedings, Kharkov, September, 25-28, 2007 – Kharkov: NTU "KPI", 2007. – P.176-181

16. Mazur O. Analysis of the nonlinear vibration and dynamic instability of plates and shallow shells with complex form by R-functions method / Mazur O. // Nonlinear dynamics. The second international conference: Book of abstracts, Kharkov, September, 25-28, 2007 – Kharkov: NTU "KPI", 2007. – P.25-28.

АНОТАЦІЯ

Мазур О.С. Параметричні коливання ортотропних пластин складної форми. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04- механіка деформівного твердого тіла.

Дисертаційна робота присвячена розробці ефективного методу дослідження параметричних коливань ортотропних пластин. Запропонований метод базується на використанні теорії R-функцій та варіаційних методів. Розроблений метод дискретизації зводить початкову нелінійну систему рівнянь руху пластини до системи нелінійних звичайних диференціальних рівнянь. Коефіцієнти даної системи отримані в аналітичному вигляді. Метод розроблено для рівнянь руху в переміщеннях та в мішаній формі. Створено програмне забезпечення для системи POLE-RL, за допомогою якого розв'язані нові задачі про параметричні коливання ортотропних пластин складної форми при різних способах їх закріплення. Проаналізовано вплив геометричних параметрів, параметрів навантаження, граничних умов та демпфування на досліджувані характеристики.

Ключові слова: ортотропні пластини, динамічне навантаження, параметричні коливання, динамічна стійкість, задача теорії пружності, теорія R-функцій, варіаційні методи.

АННОТАЦИЯ

Мазур О.С. Параметрические колебания ортотропных пластин сложной формы. – Рукопись.

Диссертация на соискание научной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.04- механика деформируемого твердого тела.

Диссертационная работа посвящена разработке эффективного метода исследования параметрических колебаний ортотропных пластин. Предложенный метод базируется на использовании теории R-функций и

вариационных методов. Разработанный метод дискретизации позволяет сводить начальную нелинейную систему уравнений движения пластины к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Коэффициенты этой системы получены в аналитическом виде. Метод разработан для уравнений движения в перемещениях и в смешанной форме. В работе решен ряд вспомогательных линейных задач: задача о линейных колебаниях ненагруженной пластины, а также последовательность плоских задач теории упругости. Для их решения использован метод Ритца в сочетании с теорией R-функций. Создано программное обеспечение для системы POLE-RL, с помощью которого решены новые задачи о параметрических колебаниях ортотропных пластин сложной формы для разных способов их закрепления. Численные результаты получены в виде областей динамической неустойчивости, резонансных кривых, а также таблиц собственных и критических частот. Проанализировано влияние геометрических параметров, параметров нагрузки, граничных условий, свойств материала и демпфирования на исследуемые характеристики. Метод численно реализован для одно- и трехмодовой аппроксимации неизвестных функций.

Ключевые слова: ортотропные пластины, динамическая нагрузка, параметрические колебания, динамическая устойчивость, теория R-функций, задача теории упругости, вариационные методы.

THE SUMMARY

Mazur O.S. Parametric vibrations of orthotropic plates with complex form. – Manuscript.

Thesis for a Candidate's Degree of Physics and mathematics in specialty 01.02.04 – Mechanics of deformable solids. – Donetsk National University, Donetsk, 2010.

The effective method of parametric vibrations research for orthotropic plates with complex form is proposed. The offered approach is based on application of the R-functions theory and variational methods. Due to use of proposed algorithm of discretization initial nonlinear movement system is reduced to system of nonlinear ordinary differential equations. Coefficients of this system are obtained in the analytical form. The problem was solved in replacements and in mixed form. Constructed software for system POLE-RL is applied for investigation of parametric vibrations of plates with complex form and various types of boundary conditions. The effects of geometrical parameters, parameters of load, boundary conditions and damping on stability regions and nonlinear vibrations are investigated.

Keywords: orthotropic plates, dynamic load, parametric vibrations, dynamic stability, R-function theory, elasticity theory problem, variational methods.