УДК 533.6:629.7

Калкаманов С.А.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ТИХОНОВА ПРИ РАСЧЕТЕ ОБТЕКАНИЯ ТЕЛЕСНЫХ КОМПОНОВОК ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ ПОТОКОМ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Задача анализа обтекания телесных компоновок летательных аппаратов (ЛА) потоком идеальной несжимаемой жидкости сводится к решению граничного интегрального уравнения относительно потенциала возмущенных скоростей φ [1]

$$\varphi = \frac{1}{4\pi}\left(\iint\limits_{S+S_W} \varphi \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} dS - \iint\limits_{S} \frac{\partial \varphi}{\partial n}\frac{1}{r} dS \right). \tag{1}$$

Здесь S – поверхность ЛА; S_W – поверхности тангенциального разрыва скоростей, моделируемые потенциалом двойного слоя; r – расстояние от точки интегрирования до точки вычисления φ.

Для решения интегрального уравнения (1) широкое распространение получил метод коллокаций [2], в соответствии с которым интегральное уравнение (1) аппроксимируется системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$A \cdot \varphi = b, \tag{2}$$

где A – матрица коэффициентов влияния; b – вектор правой части.

При численном моделировании обтекания объемных тел, поверхности которых имеют сложную геометрическую форму (фюзеляжи вертолетов и транспортных самолетов), был выявлен неустойчивый характер решения, обусловленный погрешностью δ аппроксимации интегрального уравнения (1) системой линейных алгебраических уравнений (2). Погрешность аппроксимации ядра интегрального уравнения (1) приводит к ухудшению обусловленности матрицы коэффициентов влияния СЛАУ (2). Применение метода сопряженных градиентов, рекомендуемого для решения СЛАУ с плохообусловленной матрицей [3], не устраняет полностью неустойчивого характера решения. Для примера на рисунке 1 приведен результат расчета обтекания фюзеляжа вертолета, где кривая 1 соответствует распределению давления по верхнему меридиональному сечению, полученному при решении СЛАУ (2) методом сопряженных градиентов.

Устойчивость численного метода решения интегрального уравнения (1) зависит также от погрешности аппроксимации правой части, которая влияет на точность удовлетворения граничного условия по поверхности тела. Задание граничного условия непротекания в точках коллокации, совпадающих с центрами малых граничных элементов, приводит к тому, что вне точек коллокации вектор скорости отклоняется от касательной к поверхности тела. Вследствие этого появляется фиктивное течение жидкости $\left(\varphi_{\_} \neq 0\right)$ внутри замкнутого тела, влияющее в основном на поле течения вниз по потоку. Этим объясняется увеличение колебательного характера решения от носовой части тела к хвостовой (см. рис.1, кривая 1).

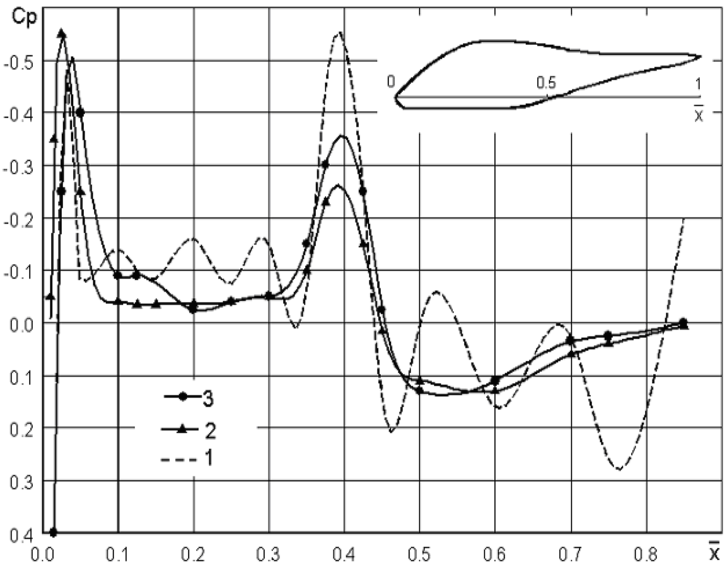

Рисунок 1 – Распределение давления по нижнему меридиану фюзеляжа вертолета

Для нахождения устойчивого решения СЛАУ (2) был применен метод регуляризации Тихонова, в соответствии с которым регуляризованное решение $\tilde{\varphi}_\alpha$ определяется из решения задачи минимизации сглаживающего функционала [4]

$$M\left[\tilde{\varphi}\right] = \left\| A \cdot \tilde{\varphi} - \tilde{b} \right\|^2 + \alpha_T \left\| \tilde{\varphi} \right\|^2, \tag{3}$$

где α_T – параметр регуляризации Тихонова.

Решение, полученное с помощью метода регуляризации Тихонова, имеет физический смысл среднего между истинным и нормальным решениями. Истинное решение соответствует точному (δ = 0) решению задачи и при этом α_T = 0. Нормальное решение соответствует решению с минимальной нормой $\left\| \tilde{\varphi} \right\|$, то есть нулевому (полностью “сглаженному”) решению, получаемому при $\alpha_T \to \infty$. На рис. 2 приведены зависимости коэффициента давления C_P по поверхности сферы при различных значениях α_T. Анализ приведенных данных показывает, что при α_T > 100 коэффициент давления на верхней поверхности сферы определяется только составляющей вектора невозмущенной скорости $\vec{V}_\infty$ (в передней точке торможения $\vec{V}_\infty \cdot \vec{n} = 0$ и C_P = 1; в верхней точке $\vec{V}_\infty \cdot \vec{n} = 1$ и C_P = 0), что равносильно отсутствию возмущенного течения (φ = 0). Так как потенциал фиктивного течения внутри тела намного меньше потенциала возмущенных скоростей внешнего течения $\left(\varphi_- << \varphi\right)$, то применение метода регуляризации Тихонова позволяет также минимизировать внутреннее фиктивное течение, обусловленное неточностью удовлетворения граничного условия непротекания по поверхности тела.

Минимум функционала (3) определяется методом сопряженных градиентов. Раскрывая нормы в (3), находим производную функционала

$$M'_K = \frac{\partial M\left[\tilde{\varphi}\right]}{\partial \varphi_K} = 2\sum_{j=1}^{N}\left\{\sum_{i=1}^{N}\left(a_{ij}\cdot\varphi_i\right)-b_j\right\}a_{jK} + 2\alpha_T\cdot\varphi_K\ ,$$

и шаг спуска для метода сопряженных градиентов

$$\Delta l = \frac{\sum_{K=1}^{N} M'_K\cdot S_K}{\sum_{K=1}^{N}2\alpha_T\cdot S_K^2 + \sum_{K=1}^{N}2\left(\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{N}S_i\cdot a_{ij}\right)a_{jk}\cdot S_K\right)}\,.$$

Здесь a_{ij}, b_j – элементы матрицы A и вектора b; S_K – направление спуска.

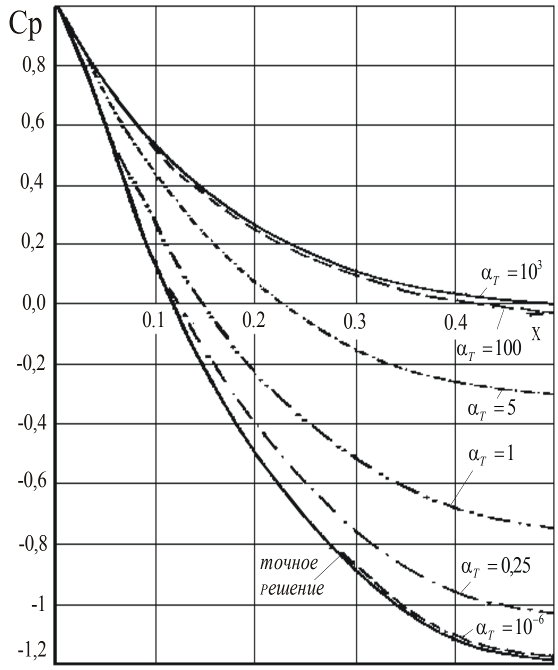

Рисунок 2 – Распределение давления по поверхности сферы при различных значениях параметра регуляризации

Параметр регуляризации α_T, в общем случае, можно определять из решения уравнения для обобщенной невязки $\rho_{\grave{O}}$ [4]

$$\rho_{\grave{O}}\left(\alpha_{\grave{O}}\right) = \left\|\grave{A}\tilde{\varphi}_\alpha - \tilde{b}\right\|^2 - \left(\delta_A\left\|\tilde{\varphi}_\alpha\right\|^2 + \delta_B\right)^2 = 0\,.$$

Но для нахождения корня уравнения $\rho_{\grave{O}}\left(\alpha_{\grave{O}}\right) = 0$ необходимо многократное решение задачи обтекания тела при различных значениях α_T. С другой стороны, в ходе численного моделирования обтекания тел различных форм было выявлено, что зависимость обобщенной невязки $\rho_{\grave{O}}$ от параметра регуляризации α_T близка к квадратичной и $\left|\rho_{\grave{O}}\right| < 10^{-5}$ при $\alpha_T \pm 0.0001$. Следовательно, нет необходимости в определении значения α_T с высокой точностью. В работах [5,6] доказано, что для условно корректных задач параметр регуляризации можно выбирать по правилу $\alpha_T = C\delta^2$ и при этом C достаточно ограничить снизу. В результате численного моделирования установлено, что константа C в правиле выбора параметра регуляризации приблизительно равна 3.5, то есть $\alpha_T \approx 3.5\delta^2$. Применение метода регуляризации Тихонова с параметром $\alpha_T \approx 3.5\delta^2$ позволяет получить устойчивые решения задачи обтекания фюзеляжей дозвуковых ЛА. Так, кривая 2 на рисунке 1 соответствует решению, полученному при решении СЛАУ (2) методом регуляризации Тихонова с $\alpha_T = 0.0015$. Для сравнения, на этом же рисунке показаны экспериментальные данные (кривая 3) из работы [7].

Таким образом, при численном решении задач обтекания объёмных тел потоком идеальной жидкости погрешности аппроксимации интегрального уравнения и граничного условия непротекания на поверхности тела, обусловленные конечным числом точек коллокаций, приводят к ухудшению обусловленности матрицы СЛАУ. При этом решение имеет нефизичный, колебательный характер. Применение метода регуляризации Тихонова для решения СЛАУ позволяет получить устойчивое численное решение. Значение параметра регуляризации меняется от 10^{-6} до 0.25.

Литература

1. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках.– М.: Мир, 1984.– 494 с.
2. Методы граничных интегральных уравнений. Вычислительные аспекты и приложение в механике: Новое в зарубежной науке. Механика – Вып. 15. – М.: Мир, 1978. – 210 с.
3. Уилкинсон Дж., Райнш К. Справочник алгоритмов на языке Алгол. Линейная алгебра. М.: Машиностроение, 1976.–461 с.
4. Тихонов А.Н., Арсенин В.Н. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1974. – 288 с.
5. Винокуров В.А. Два замечания о выборе параметра регуляризации // Журнал вычислительной математики и математической физики. – т. 12, №2 – 1972. – с.481-483.
6. Страхов В.Н. О выборе констант в правиле Тихонова задания параметра регуляризации при решении линейных условно-корректных задач // Журнал вычислительной математики и математической физики. – т. 21, №5 – 1981. – с.1612-1614.
7. Аэродинамические исследования моделей трех тел.: Отчет о НИР № 40. Часть II (заключительная). // Харьковский авиационный институт. – Харьков, 1989.–123 с.

УДК 533.6:629.7

Калкаманов С.А.

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДА РЕГУЛЯРИЗАЦІЇ ТИХОНОВА ПРИ РОЗРАХУНКУ ОБТІКАННЯ ТІЛЕСНИХ КОМПОНУВАНЬ ЛІТАЛЬНИХ АПАРАТІВ ПОТОКОМ ІДЕАЛЬНОЇ РІДИНОЮ

Для забезпечення стійкості рішення задач обтікання об’ємних тіл потоком ідеальної рідини пропонується використовувати метод регулярізації Тихонова. В якості приклада наведені результати розрахунків обтікання сфери та фюзеляжу вертольота.