

ЭКОНОМИЧНЫЙ АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ТЕЛЕСНОГО УГЛА В ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В настоящее время при решении многих задач математической физики, которые сводятся к анализу линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений, широкое применение получили методы граничных интегральных уравнений (МГИУ) [1...8]. МГИУ привлекают исследователей простотой постановки краевых задач, уменьшением на единицу размерности рассматриваемой задачи, и удовлетворительной для практических приложений точностью получаемых результатов.

МГИУ основаны на сведении краевой задачи для дифференциальных уравнений к интегральному уравнению относительно интенсивности особенностей, распределенных по граничной поверхности S . Для численного решения интегрального уравнения граничная поверхность аппроксимируется конечным числом малых элементов (панелей), в пределах которых задается параметрическое представление интенсивности особенностей. Удовлетворяя краевым условиям в точках коллокаций, приходят к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Во многих приложениях МГИУ элементы матрицы СЛАУ определены как потенциалы двойного слоя и имеют геометрический смысл телесных углов. При численном решении многих инженерных задач значения потенциала двойного слоя необходимо вычислять в дискретных точках, количество которых достаточно велико. Кроме того, при решении нестационарных задач методом установления по времени количество необходимых расчетных шагов может достигать нескольких тысяч. Поэтому для обеспечения требуемой точности расчетов при приемлемых затратах машинного времени, квадратурная формула вычисления поверхностного интеграла, входящего в выражение для потенциала двойного слоя, должна содержать малое количество арифметических операций и при этом обладать высокой точностью. Приведенные в работах [9...12] квадратурные формулы вычисления потенциала двойного слоя являются достаточно громоздкими, содержат трансцендентные функции типа $\arctg(x)$, $\ln(x)$, вычисления которых на ЭВМ требует удвоенной точности представления чисел, и не обладают достаточной вычислительной эффективностью. Целью данной работы является вывод и анализ достаточно простых соотношений для вычисления потенциала однородного двойного слоя (телесного угла).

Пусть граничная поверхность S аппроксимирована конечным числом N малых граничных элементов (панелей) σ_k :

$$\bigcup_{k=1}^N \sigma_k = S, \quad \sigma_j \cap \sigma_k = 0 \quad \text{при } j \neq k.$$

Рассмотрим потенциал от двойного слоя, распределенного по поверхности треугольной панели σ_k с постоянной интенсивностью μ_k

$$\varphi^k(M) = E\mu_k \iint_{\sigma_k} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} d\sigma, \quad (1)$$

где r – расстояние между точкой M и точкой интегрирования. Если панель σ_k четырехугольная, то потенциал однородного двойного слоя можно вычислить, разбив σ_k на два треугольника.

Геометрический смысл потенциала (1) – суть телесный угол $\varepsilon_M^{\sigma_k}$, под которым из точки М видна поверхность σ_k [13], взятый с соответствующим знаком и умноженный на коэффициент ($\hat{A}\mu_k$):

$$\varphi^k(M) = E \mu_k \varepsilon_M^{\sigma_k} \text{sign}(\vec{r}_{mk} \cdot \vec{n}_k), \quad (2)$$

где \vec{r}_{mk} – радиус-вектор, проведенный из точки М в центр панели σ_k ; \vec{n}_k – орт внешней нормали, проведенный к центру панели σ_k .

Телесный угол $\varepsilon_M^{\sigma_k}$ определяется как площадь участка единичной сферы с центром в точке М [14], на которую проектируется данный граничный элемент σ_k – треугольник $P_1P_2P_3$ (рис. 1).

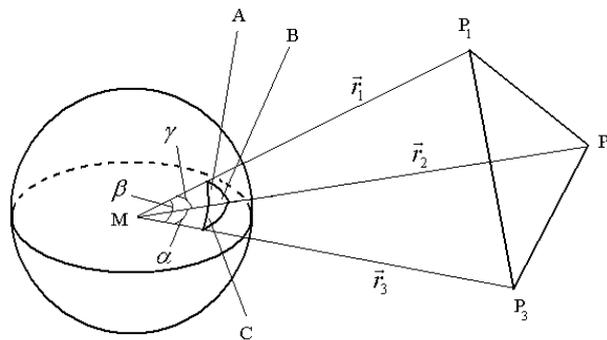


Рисунок 1 – К определению телесного угла

Рассмотрим сферический треугольник ABC . Пусть A, B, C – углы сферического треугольника при одноименных вершинах, a, b, c – противолежащие к этим углам стороны.

Синус половины телесного угла по формуле Каньоли [14] равен

$$\sin\left(\frac{\varepsilon_M^{\sigma_k}}{2}\right) = \frac{\sin \frac{a}{2} \cdot \sin \frac{b}{2}}{\cos \frac{c}{2}} \sin C. \quad (3)$$

С другой стороны, котангенс половины телесного угла определяется равенством (формула 77, стр. 74, [14])

$$\text{ctg}\left(\frac{\varepsilon_M^{\sigma_k}}{2}\right) = \frac{\text{ctg} \frac{a}{2} \cdot \text{ctg} \frac{b}{2} + \cos C}{\sin C}. \quad (4)$$

Умножая выражение (3) на (4) и выражая $\cos C$ из теоремы косинусов, после несложных преобразований получим

$$\cos\left(\frac{\varepsilon_M^{\sigma_k}}{2}\right) = \frac{1 + \cos b + \cos a + \cos c}{\sqrt{2 \cdot (1 + \cos a) \cdot (1 + \cos b) \cdot (1 + \cos c)}}. \quad (5)$$

С учетом того, что $\cos a = \frac{\vec{r}_2 \cdot \vec{r}_3}{(r_2 \cdot r_3)}$, $\cos b = \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_3}{(r_1 \cdot r_3)}$, $\cos c = \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{(r_1 \cdot r_2)}$ (см. рис. 1), из (2) и (5) получим формулу вычисления потенциала от двойного слоя, распределенного по поверхности треугольной панели σ_k с постоянной интенсивностью μ_k

$$\varphi^k(M) = \frac{\mu_k}{2\pi} \arccos \frac{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 + r_1 \cdot \vec{r}_2 \cdot \vec{r}_3 + r_2 \cdot \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_3 + r_3 \cdot \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{\sqrt{2(r_2 \cdot r_3 + \vec{r}_2 \cdot \vec{r}_3)(r_1 \cdot r_2 + \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)(r_1 \cdot r_3 + \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_3)}} z_\varepsilon, \quad (6)$$

где $z_\varepsilon = \text{sign}(\vec{r}_{\vec{n}\delta} \cdot \vec{n}_k)$, $\vec{r}_{\vec{n}\delta} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \vec{r}_i$.

Когда расстояние от точки M до центра граничного элемента σ_k достаточно большое ($\frac{r_{\vec{n}\delta}}{|\sigma_k|} \geq 5$), приемлемую для практических приложений точность расчета потенциала двойного слоя обеспечивает приближенная формула, полученная осреднением поверхностного интеграла в выражении (1):

$$\varphi^k(M) = \frac{\mu_k}{4\pi} \frac{(\vec{r}_{\vec{n}\delta} \cdot \vec{n}_k)}{r_{\vec{n}\delta}^3} |\sigma_k|. \quad (7)$$

Результаты сравнительного анализа различных алгоритмов вычисления потенциала двойного слоя приведены в таблице 1. В таблице не приведены, ввиду их достаточной сложности и громоздкости, квадратурные формулы вычисления интеграла (1), предложенные в работах [9, 10].

Таблица 1 – Сравнительный анализ различных алгоритмов вычисления $\varphi^k(M)$

Критерии сравнения	Алгоритмы			
	Дворак А.В. [12]	Головкин М.А. [11]	Формула (6)	Формула (7)
Относительное время расчета на ЭВМ	1.56	1.41	1	0.5
Кол-во обратных тригонометрических функций	1	3	1	–

Анализ приведенных в таблице 1 данных показывает, что формула (6) вычисления потенциала двойного слоя содержит минимальное количество арифметических действий. Следовательно, использование разработанного алгоритма в численных методах решения задач математической физики обеспечит минимальные погрешность накопления и время счета на ЭВМ, что важно при решении нестационарных задач, когда количество расчетных шагов (итераций) по времени достигает нескольких тысяч.

Таким образом, разработан экономичный алгоритм, который может быть использован при разработке численных методов в аэрогидродинамике [6,7,8], в электродинамике [6, 15], в геодезии [14], в теории упругости [6, 16], в теории лучистого теплообмена [17, 18] и в других областях математической физики, где требуется вычислять телесный угол или значение потенциала двойного слоя.

Литература

1. Методы граничных интегральных уравнений. Вычислительные аспекты и приложение в механике // Новое в зарубежной науке. Механика – Вып. 15.– М.: Мир, 1978.– 210 с.
2. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках.– М.: Мир, 1984.– 494 с.
3. Бреббия К., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике. – М.: Мир, 1982. – 248с.
4. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Метод граничных элементов.– М.: Мир, 1987.– 524 с
5. Громада Т., Лей Ч. Комплексный метод граничных элементов в инженерных задачах. – М.: Мир, 1990. – 303 с.
6. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент в математической физики, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн.– М.: ТОО "Янус", 1995. – 520 с.
7. Колобков А.Н., Сорокин Ю.С., Софронов В.Д. Панельные методы в дозвуковой аэродинамике летательных аппаратов. – М.: МАИ, 1993. – 88 с.
8. Миргород Ю.И., Лебедь В.Г., Калкаманов С.А. Численное моделирование обтекания тел потенциальным потоком сжимаемого газа в докритическом диапазоне скоростей // Аэрогидродинамика: проблемы и перспективы. Сборник статей. – Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т «Харьк. авиац. ин-т», 2004. – С. 64-72.
9. Фрейкман В.Г. Выделение особенности в интегральных уравнениях трехмерного электромагнитного поля // Журнал технической физики. – 1980. – Т. 50, вып. 2. – С. 425-427.
10. Бакалец В.А., Ширий И.И. Выделение особенностей в плотности и ядре двумерного интегрального уравнения для сложных граничных поверхностей // Вычислительная и прикладная математика. – 1985. – Вып. 56. – С. 14-17.
11. Головкин М.А. Применение метода теории потенциала при численных расчетах отрывных нестационарных трехмерных и осесимметричных течений идеальной несжимаемой жидкости// Труды ЦАГИ. – 1982. – Вып. 2152. – С. 16-37.
12. Дворак А.В. Дискретные гидродинамические особенности. Формулы для безразмерных скоростей, потенциалов и их производных // Научно-методические материалы по численным методам. М.: Изд. ВВИА им. Н.Е. Жуковского. – 1985. – С. 85-106.
13. Михлин С.Г. Курс математической физики. – М.: Наука, 1968. – 576 с.
14. Волынский В.А. Сферическая тригонометрия. М.: Наука, 1977. – 136 с.
15. Дмитриев В.Н., Захаров Е.В. Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики. – М.: МГУ, 1987. – 167 с.
16. Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. – Казань: КГУ, 1986. – 296 с.
17. Гидродинамика и теплообмен ЛА: Сборник научных трудов.– К.: Наукова думка, 1988. – 123 с.
18. Джайлз Г.Е., Уэндел М.В., Грей Л.Дж. Метод граничных элементов для трёхмерного теплообмена в областях с симметрией // Аэрокосмическая техника.– 1989.– N8.– С. 147-153.

УДК 528.232.23

Калкаманов С.А.

ЕКОНОМІЧНИЙ АЛГОРИТМ РОЗРАХУНКУ ТІЛЕСНОГО КУТА В ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДАХ РІШЕННЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

У роботі приведеній економічний алгоритм розрахунку потенціалу однорідного подвійного шару, який має геометричну суть тілесного кута. Приведено порівняння з відомими алгоритмами, що показують обчислювальну ефективність розробленого алгоритму.