УДК 532.581.011

Калкаманов С.А., Чигрин Р.Н., Сушко А.Л.

К ВЫЧИСЛЕНИЮ ОДНОРОДНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ ДВОЙНОГО И ПРОСТОГО СЛОЯ В МЕТОДАХ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Харьковский университет Воздушных Сил

Создание конкурентоспособных на мировом рынке технических устройств и систем не представляется возможным без проведения широкомасштабных исследований, связанных с вычислением на ЭВМ. При этом, для нахождения оптимального технического решения, могут потребоваться большие вычислительные ресурсы. В настоящее время для решения многих прикладных задач широкое применение нашли методы граничных элементов (МГЭ) [1-8]. МГЭ привлекают простотой постановки краевых задач, уменьшением на единицу размерности задачи, возможностью рассмотрения граничной поверхности достаточно сложной геометрической формы и удовлетворительной для практических приложений точностью получаемых результатов. Численной реализации МГЭ посвящены многие работы [1-5]. В этих работах достаточно подробно описаны алгоритмы вычислений элементов матрицы системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), аппроксимирующих интегральное представление решений исходных дифференциальных уравнений. Указанные элементы матрицы СЛАУ в методах граничных элементов низкого порядка представляют собой потенциалы от двойного и простого слоев, равномерно распределенных по поверхности граничных элементов, и, в общем случае, являются сингулярными интегралами. Приведенные в работах [2,3,6,9-12] квадратурные формулы вычисления потенциалов имеют низкую точность вблизи граничной поверхности [9], являются громоздкими и содержат трансцендентные функции, вычисление которых на ЭВМ требует больших затрат времени и удвоенной точности представления чисел [3]. Это приводит к низкой вычислительной эффективности МГЭ при решении задач по оптимизации, нестационарных задач, требующих большего количества итераций по времени. Поэтому одной из актуальных задач является повышение вычислительной эффективности МГЭ с целью увеличения оперативности проводимых численных расчетов на компьютерах средней мощности.

В настоящей работе разработаны простые и экономичные алгоритмы вычисления однородных потенциалов простого и двойного слоев. Данные алгоритмы рассмотрены на примере решения методом граничных элементов трехмерной задачи обтекания твердого тела потенциальным потоком несжимаемой жидкости. Применение разработанных алгоритмов для других приложений МГЭ не составляет большого труда.

Интегральное представление решения дифференциального уравнения Лапласа в виде суммы потенциалов двойного и простого слоев имеет вид [6]:

$$\varphi=\frac{1}{2\pi}\iint_S\left(\varphi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}-\frac{\partial\varphi}{\partial n}\frac{1}{r}\right)dS\,, \tag{1}$$

где φ – скалярная функция потенциала; S, n – граничная поверхность и внешняя нормаль к ней; r – расстояние от точки интегрирования до точки вычисления φ.

В интегральном уравнении (ИУ) (1) интенсивность простого слоя известна из краевого условия на граничной поверхности. При численном решении ИУ (1) поверхность S апроксимируется совокупностью малых граничных элементов (ГЭ): $S=\bigcup_{h=1}^{N}G_h$, а функция φ – кусочно-постоянной функцией. В результате приходят к СЛАУ относительно неизвестных значений интенсивности потенциала в центрах ГЭ:

$$\left[\delta_{h_K}-C_{h_K}\right]\cdot\left\{\varphi_K\right\}=\left[b_{h_K}\right]\cdot\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_K\right\}; \tag{2}$$

где

$$C_{h_K}=\frac{1}{2\pi}\iint_{G_K}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{h_K}}\right)dG_K; \tag{3}$$

$$b_{h_K}=\frac{1}{2\pi}\iint_{G_K}\frac{1}{r_{h_K}}dG_K. \tag{4}$$

Здесь: $h=\overline{1,N}$, $k=\overline{1,N}$ – нумерация граничных элементов; G_h, G_K – граничные элементы поверхности S; r_{h_k} – расстояние от центра граничного элемента G_h до точки интегрирования dG_K.

Элементы матрицы СЛАУ C_{h_K} (3) и b_{hk} (4) представляют собой потенциалы в центре граничных элементов G_h от, соответственно, двойного и простого слоя, равномерно распределенных по поверхности ГЭ G_K и имеющих единичные интенсивности. Для диагональных элементов матрицы СЛАУ интегралы, входящие в выражения (3) и (4), являются сингулярными.

Рассмотрим вычисление потенциала от двойного слоя (3). Достаточно простые формулы вычисления потенциала двойного слоя выведены в работе [13]. В данный работе предлагается следующий рациональный, с точки зрения оперативности и достаточной точности получаемых результатов, алгоритм вычисления однородного потенциала двойного слоя, выведенные на основе численных экспериментов:

$$\mathrm{C}_{h_K}=\begin{cases}1-\dfrac{\phi_k}{2\pi}, & \text{ï ðè } h=k;\\ \text{ô î ðì óëà (6) èç ðàáî ò û [13]}, & \text{ï ðè } h\neq k, \bar{r}<3;\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{2\pi}\frac{\left(\vec{r}_{cp_i}\cdot\vec{n}_{K_i}\right)\left|G_K\right|}{\left|\vec{r}\right|^3_{cp_i}}, & \text{ï ðè } h\neq k, 5>\bar{r}\geq 3;\\ \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\left(\vec{r}_{cp}\cdot\vec{n}_K\right)\left|G_K\right|}{\left|\vec{r}\right|^3_{cp}}, & \text{ï ðè } h\neq k, \bar{r}\geq 5,\end{cases} \tag{5}$$

где ϕ_K – угол между нормалями к треугольным элементам, образованных при разбиении четырехугольного ГЭ G_K диагональю; если ГЭ G_K - треугольный, то $\phi_K=0$; $\vec{r}_{cp}$ – радиус вектор, проведенный из центра ГЭ G_h в центр G_K; i – нумерация дополнительных малых ГЭ, полученных при разбиении ГЭ G_K двумя диагональными отрезками;

$\overline{r} = r_{cp} \big/ \left| G_K \right|$, где $\left| G_K \right|$ – площадь ГЭ G_K.

Предложенные формулы вычисления потенциала двойного слоя требуют, по сравнению с формулами, предложенными в работах [9, 10, 12], в 5-20 раз меньше времени счета на ЭВМ при вычислении диагональных элементов матрицы СЛАУ (2) и в 6-7 раз – при вычислении недиагональных элементов.

Для вычисления потенциала простого слоя при $h = k$ (b_{hh}) введем местную полярную систему координат (θ,ρ), связанную с одним из квадрантов ГЭ (рис.1).

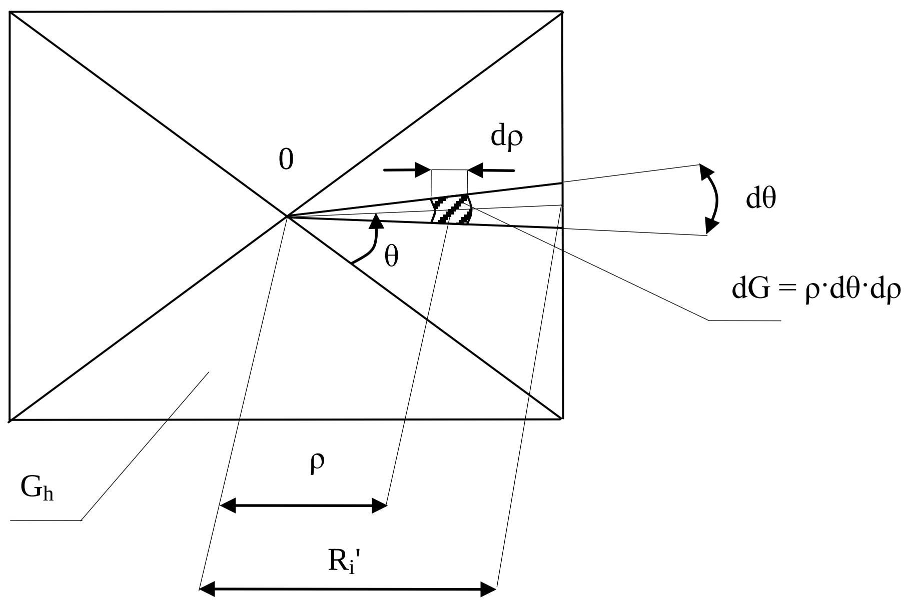

Рисунок 1 – Полярная система координат

Тогда выражение для потенциала простого слоя примет вид:

$$b_{hh} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{4} \int_0^{\psi_i} \int_0^{R_i'} d\rho d\theta, \tag{6}$$

где $i = \overline{1,4}$ – нумерация треугольных элементов, полученных при разбиении G_h двумя диагональными отрезками; ψ_i – угол при вершине (т.О) i – го треугольного элемента; R_i' – верхний предел изменения переменной интегрирования ρ для i – го треугольного элемента.

Приведенная в работе [2] квадратурная формула вычисления интеграла в выражении (6) является достаточно громоздкой и содержит большое количество трансцендентных функций. Ниже приведены простые формулы вычисления b_{hh}.

Разобьем угол ψ_i с равномерным шагом на N_C секторов (рис. 2): $\Delta_{ji} = \dfrac{\psi_i}{N_C}$ и вычислим интеграл:

$$b_i = \int_0^{\psi_i} \int_0^{R_i'} d\rho \cdot d\theta = \sum_{j=1}^{N_C} \int_{(j-1)\cdot\Delta_{ji}}^{\Delta_{ji}\cdot j} \int_0^{R'} d\rho \cdot d\theta. \tag{7}$$

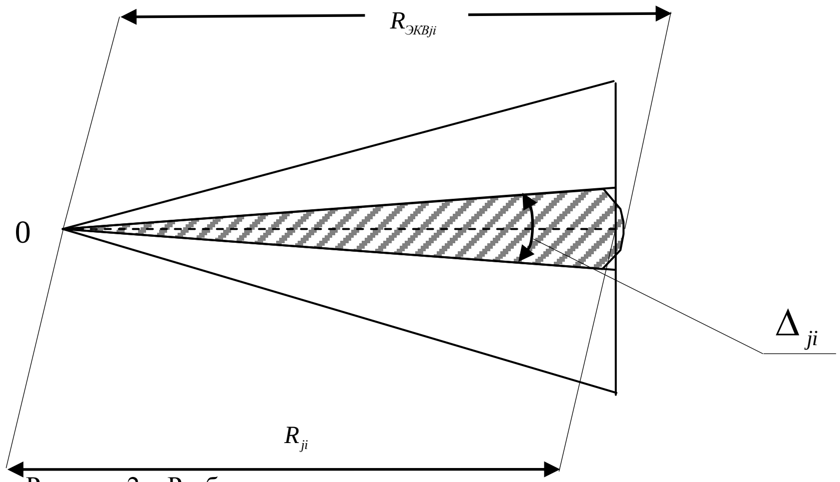

Рисунок 2 – Разбиение треугольного элемента на секторы

Заменим j-й сектор i-го треугольного элемента круговым сектором, имеющим такую же площадь. Тогда из (7) следует, что:

$$b_i = \sum_{j=1}^{N_C} \Delta_{ji} \cdot R_{\text{ÝÊÂ}ji}\,, \tag{8}$$

где $R_{\text{ÝÊÂ}ji}$ – радиус кругового сектора, эквивалентного по площади j-му сектору i-го треугольного элемента.

С учетом (7), (8), (6) формула вычисления потенциала простого слоя при $h = k$ примет вид:

$$b_{hh} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{4} \left(\sum_{j=1}^{N_C} \Delta_{ji} \cdot R_{\text{ÝÊÂ}ji} \right). \tag{9}$$

Методические исследования показали, что погрешность вычисления b_{hh} по квадратурной формуле (9) не превышает 0,01 % для ГЭ, имеющих форму квадрата. Для граничных элементов, форма которых отличается от квадрата, погрешность вычисления b_{hh} по квадратурной формуле (9) не превышает 1,5 %. Для примера на рис. 3 приведена зависимость погрешности вычисления b_{hh} от удлинения λ (отношения суммы поперечных размеров к сумме продольных размеров ГЭ).

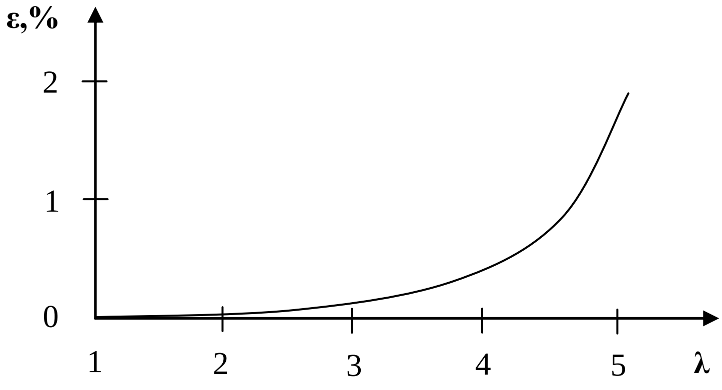

Рисунок 3 – Зависимость погрешности вычисления b_{hh} по формуле (9) от λ

При $h \neq k$ (для несингулярных интегралов) значение b_{hk} рационально вычислять численно с разбиением ГЭ на малые дополнительные элементы и осреднением подынтегрального выражения в (4). Было установлено, что количество малых дополнительных элементов должно быть не менее 8 – в ближнем поле и не менее 4 – в среднем поле. В дальнем поле ($\overline{r} > 7$) потенциал b_{hk} с достаточной точностью вычисляется без разбиения ГЭ G_K на малые дополнительные элементы. Следовательно, алгоритм вычисления потенциала простого слоя имеет вид:

$$b_{hk} = \begin{cases} \text{ïî ôîðìóëå}(9) & \text{ïðè } h = k; \\ \dfrac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{8}\left(\dfrac{|G_i|}{r_{hi}}\right), & \text{ïðè } h \neq k, \overline{r} < 3; \\ \dfrac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{4}\left(\dfrac{|G_i|}{r_{hi}}\right), & \text{ïðè } h \neq k, 3 \leq \overline{r} \leq 7; \\ \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{|G_K|}{r_{hk}}, & \text{ïðè } h \neq k, \overline{r} > 7. \end{cases} \qquad (10)$$

где $|G_i|$ – площадь i-го дополнительного элемента.

Предлагаемые алгоритмы вычисления однородного потенциала двойного (5) и простого слоев (10) существенно уменьшают потребное время счета на ЭВМ и не требуют удвоенной точности представления чисел. Разработанные алгоритмы могут быть использованы при разработке, на основе МГЭ, численных методов в аэрогидродинамике [6,7,8], в электродинамике [6, 15], в геодезии [14], в теории упругости [6, 16], в теории лучистого теплообмена [17, 18] и в других областях математической физики.

Литература

1. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Метод граничных элементов.– М.: Мир, 1987.– 524 с

2. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках.– М.: Мир, 1984.– 494 с.

3. Бреббия К., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике. – М.: Мир, 1982. – 248с.

4. Методы граничных интегральных уравнений. Вычислительные аспекты и приложение в механике // Новое в зарубежной науке. Механика – Вып. 15.– М.: Мир, 1978.– 210 с.

5. Громада Т., Лей Ч. Комплексный метод граничных элементов в инженерных задачах. – М.: Мир, 1990. – 303 с.

6. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент в математической физики, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн.– М.: ТОО "Янус", 1995. – 520 с.

7. Колобков А.Н., Сорокин Ю.С., Софронов В.Д. Панельные методы в дозвуковой аэродинамике летательных аппаратов. – М.: МАИ, 1993. – 88 с.

8. Миргород Ю.И., Лебедь В.Г., Калкаманов С.А. Численное моделирование обтекания тел потенциальным потоком сжимаемого газа в докритическом диапазоне ско-

ростей // Аэрогидродинамика: проблемы и перспективы. Сборник статей. – Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т «Харьк. авиац. ин-т», 2004. – С. 64-72.

9. Фрейкман В.Г. Выделение особенности в интегральных уравнениях трехмерного электромагнитного поля // Журнал технической физики. – 1980. – Т. 50, вып. 2. – С. 425-427.

10. Бакалец В.А., Ширий И.И. Выделение особенностей в плотности и ядре двумерного интегрального уравнения для сложных граничных поверхностей // Вычислительная и прикладная математика. – 1985. – Вып. 56. – С. 14-17.

11. Головкин М.А. Применение метода теории потенциала при численных расчетах отрывных нестационарных трехмерных и осесимметричных течений идеальной несжимаемой жидкости// Труды ЦАГИ. – 1982. – Вып. 2152. – С. 16-37.

12. Дворак А.В. Дискретные гидродинамические особенности. Формулы для безразмерных скоростей, потенциалов и их производных // Научно-методические материалы по численным методам. М.: Изд. ВВИА им. Н.Е. Жуковского. – 1985. – С. 85-106.

13. Калкаманов С.А. Экономичный алгоритм вычисления телесного угла в численных методах решения задач математической физики // Інтегровані технології та енергозбереження. – 2004. – № 4. – С. 69-74.

14. Волынский В.А. Сферическая тригонометрия. М.: Наука, 1977. – 136 с.

15. Дмитриев В.Н., Захаров Е.В. Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики. - М.: МГУ, 1987. – 167 с.

16. Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. – Казань: КГУ, 1986. – 296 с.

17. Гидродинамика и теплообмен ЛА: Сборник научных трудов.– К.: Наукова думка, 1988. – 123 с.

18. Джайлз Г.Е., Уэндел М.В., Грей Л.Дж. Метод граничных элементов для трёхмерного теплообмена в областях с симметрией // Аэрокосмическая техника.– 1989.–N8.– С. 147-153.

УДК 532.581.011

Калкаманов С.А., Чигрин Р.М., Сушко А.Л.

ДО ОБЧИСЛЕННЯ ОДНОРІДНИХ ПОТЕНЦІАЛІВ ПОДВІЙНОГО І ПРОСТОГО ШАРУ В МЕТОДАХ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

У роботі приведений прості та економні алгоритми розрахунку однорідних потенціалів подвійного та простого шару в методах граничних елементів. Приведено порівняння з відомими алгоритмами, що показують обчислювальну ефективність розроблених алгоритмів.