УДК 536.2

Юшко С.В., Горбунов К.О., Горбунова Н.О.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ – ЯК ЗАСІБ ПРОГНОЗУВАННЯ ПРОЦЕСУ КРІОВПЛИВУ НА НЕБНУ МІНДАЛИНУ

Неможливість експериментального контролю температурного поля об'єкту дослідження за час проведення хірургічного втручання, потребує визначення часу кріовпливу або візуально, або на основі попередніх розрахунків.

Якщо перший метод потребує високої кваліфікації та великого досвіду для якісного проведення операції, то другий (розрахунок часу кріовпливу) – повинен дозволяти отримувати результат із достатньою точністю на основі математичних обчислювань [1].

Отримання такої залежності (або алгоритму) і є метою даної роботи.

Дійсний об'єкт уявляє собою біологічну тканину неправильної геометричної форми. Теплофізичні властивості тканини на ділянці вище кріоскопічної температури незначно залежать від температури (рис. 1). Проте, при температурі нижче кріоскопічної спостерігається значні зміни властивостей, особливо теплоємності c і теплопровідності λ. Це викликано значним (до 70 %) змістом води у тканині.

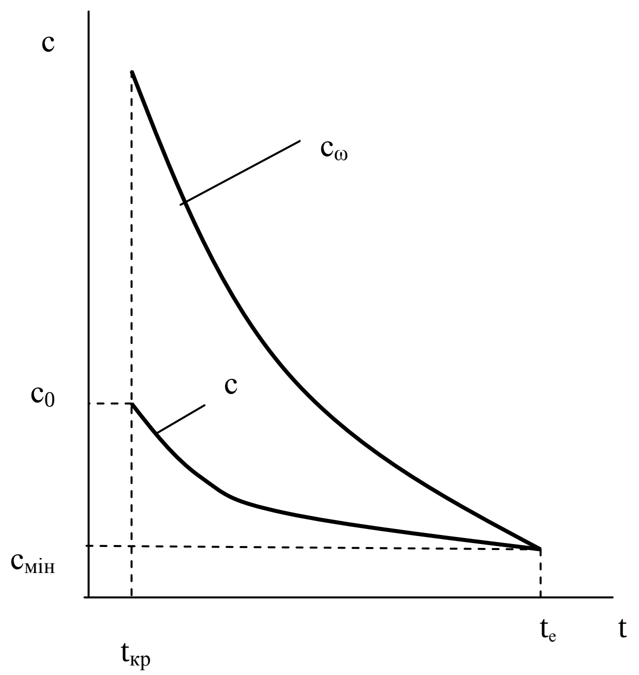

Рисунок 1 – Залежність розрахункової c и повної c_ω теплоємності біологічних продуктів від температури (схема)

Зміна властивостей не відбувається стрибком у крапці фазового переходу для води, а змінюється у залежності від частки виморoженої води на великому температурному інтервалі (до -60 ^{o}C). Як видно з рисунку 1, основні зміни властивостей відбуваються у достатньо вузькому температурному інтервалі. Жива біологічна тканина складається з багатьох капілярних судин, які постачають клітини поживними речовинами та киснем, тобто забезпечують її життєдіяльність, в процесі якої виділяється тепло. З пониженням температури процеси життєдіяльності уповільнюються, а звідси й виділення енергії теж уповільнюється.

Що стосується граничних умов, то в місті прикасання кріозонду з поверхнею біологічного об'єкту після його промерзання здійснюється ідеальний тепловий контакт. Так як за оцінками число Ві має велике значення, то при великій потужності кріоінструменту можна вважати, що температура поверхні об'єкту дорівнює температурі інструмента. Поверхня об'єкту, яку омиває повітря, буде приймати участь з ним у конвективному теплообміні.

Особливі труднощі представляє опис фізичного процесу на внутрішній границі об'єкту. Аналіз дає, що на деякій невідомій глибині температура зберігається постійною внаслідок процесів життєдіяльності тканини.

Математична модель задачі, яка розглядається, без деяких спрощень не дозволить отримати просту залежність (алгоритм).

У зв'язку з цим запровадимо деякі спрощення:

1. Об'єкт має форму стриженя постійного поперечного перетину. Довжина стержня h складається з розміру виросту h_1, і глибини завдання внутрішніх граничних умов h_2 (рис. 2)

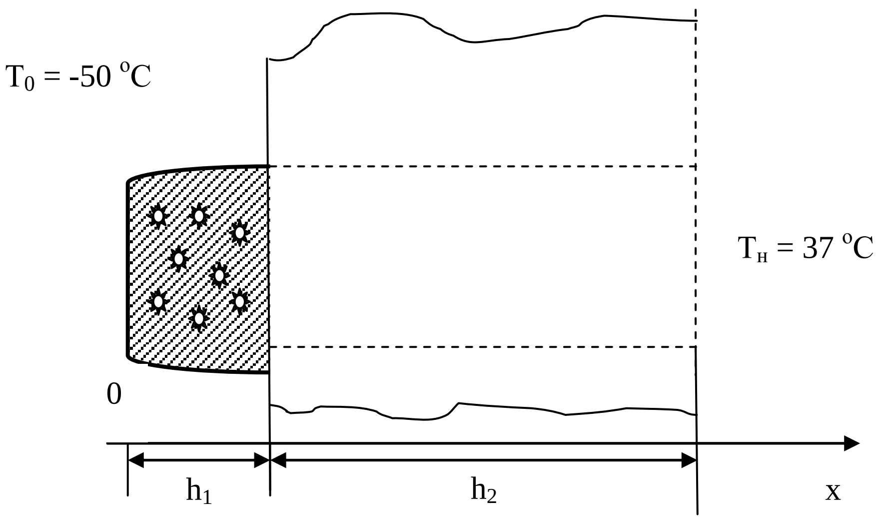

Рисунок 2 – Модель небної міндалини

2. Теплообмін на боковій поверхні, яка омивається повітрям, і яка межує з тілом, відсутній.

3. Внутрішні джерела тепла відсутні.

4. На внутрішній границі підтримується постійна температура, яка дорівнює початковій.

5. Теплофізичні властивості не залежать від температури.

Щільність (ρ = 1080 кг/м^3) – постійна.

Коефіцієнт теплопровідності:

$$\lambda = \frac{h}{\frac{h_1}{\lambda_{ç}} + \frac{h - h_1}{\lambda_{íç}}}; \qquad (1)$$

Теплоємність, враховуючи фазовий перехід:

$$c = c_{òâ}(1 - W) + c_{ë}\omega\, W + c_{\omega}(1 - \omega)W + r\frac{d\omega}{dt}W\,, \qquad (2)$$

де ω залежить від Т.

Таким чином дана модель є одномірною, стаціонарною, з граничними умовами I роду, без внутрішніх джерел тепла.

Для даної математичної моделі з постійними коефіцієнтами можна скористуватися відомим рішенням [2].

Знаючи експериментальні дані (за який час на заданій глибині тканина проморозиться до температури некрозу), визначаємо h, на якій вважаємо, що температура незмінна. Після цього, для інших розмірів виросту можна скористатися теорією подібності.

Диференційне рівняння температуропровідності запишеться у вигляді

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad (3)$$

Тоді,

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_í - T_0}; \qquad (4)$$

$$X = \frac{x}{h}, \qquad (5)$$

де $h = h_1 + h_2$

$$T = \theta \cdot \left(T_í - T_0\right) + T_0; \qquad (6)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{a}{h^2} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2}; \qquad (7)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \left(\frac{a\tau}{h^2}\right)} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2}. \qquad (8)$$

Таким чином, у знаменнику рівняння (8) маємо безрозмірний критерій Fo:

$$\mathrm{Fo} = \frac{a\tau}{h^2}; \tag{9}$$

$$\mathrm{Fo}_1 = \frac{a\tau_1}{h_1^{\,2}} = \mathrm{Fo}_2 = \frac{a\tau_2}{h_2^{\,2}}. \tag{10}$$

У результаті проароблених перетворень, одержимо залежність часу

$$\tau_2 = \tau_1 \cdot \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2. \tag{11}$$

Розрахунки дозволяють отримати час досягнення кріоскопічної температури біля основи об’єкту (тобто на глибині h_1) в залежності від глибини задання внутрішньої граничної умови.

Виходячи з експериментальних даних, відомо, що середній час досягнення кріоскопічної температури в даній крапці для об’єкту розмірів, які розглядаються, відповідає 220 секундам [3]

Таким чином, глибина завдання граничних умов 7,5 мм.

На основі теорії подібності можна поширювати результат, який отримано, для об’єктів інших розмірів.

Для порівняння отриманих результатів була використана формула Планка, яка широко використовується в холодильній технології щодо прогнозування процесів кріовпливу [4]:

$$\tau = \frac{q\rho}{t_{\hat{e}\eth} - t_{\tilde{o}\grave{a}}} h\left(\frac{h}{2\lambda} + \frac{1}{\alpha}\right). \tag{12}$$

При виведенні формули Планка задаються наступними припущеннями:

– теплоємність замороженої частини тіла дорівнює нулю;

– тіло перед початком заморожування охолоджено до кріоскопічної температури;

– льодоутворення в тілі відбувається без переохолодження при кріоскопічній температурі;

– теплофізичні властивості замороженої частини (коефіцієнт теплопровідності і питома теплоємність) не залежать від температури;

– тіло однорідне, його щільність при заморожуванні не змінюється;

– коефіцієнт тепловіддачі й температура хладоносія не залежать від часу.

Залежності температури від глибини представлено на рисунку 3.

Проаналізував рисунок 3, можна зробити висновок про те, що крива 2 не може бути використана у практичній медицині, через велику похибку з експериментальними даними. Тобто, треба уникнути деяких припущень у формулі Планка для удосконалення цього рівняння та подальшого його використання при прогнозуванні процесів кріовпливу на небну міндалину.

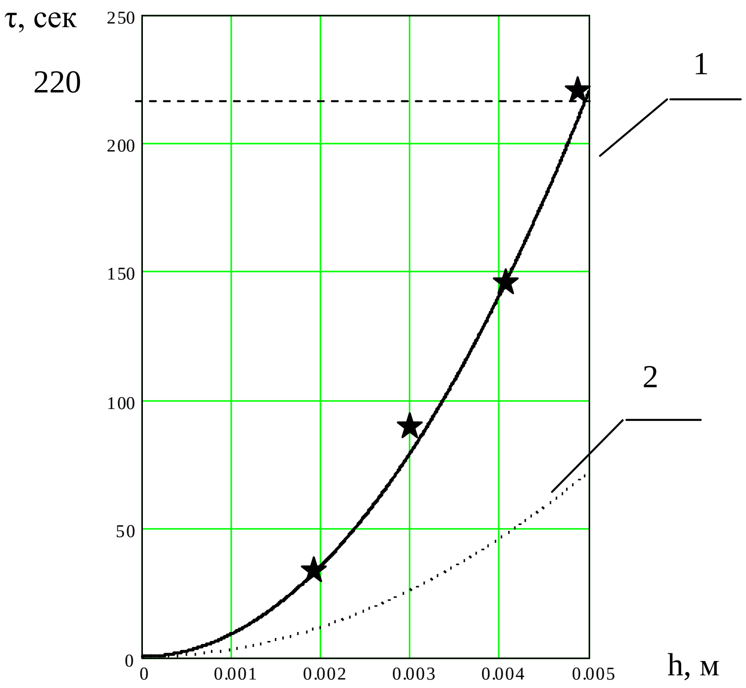

Рисунок 3 – Порівняння різних залежностей часу кріовпливу від глибини промерзання
1 – залежність, що отримана на підставі теорії подібності за експериментальними даними;
2 – рівняння Планка; ★ – експериментальні значення

Література

1. Достижения криомедицины.– Санкт-Петербург, изд-во Наука.– 2001
2. Лыков А.В. Теория теплопроводности, Высшая школа.– Москва, 1967
3. Кочергина И.Г. Справочник отоларинголога. – М.: МЕДГИЗ, 1961
4. Рогов И.А., Куцакова В.Е., Филиппов В.И., Фролов С.В. Консервирование пищевых продуктов холодом (теплофизические основы).– Москва: “Колос”, 1999.– 174 с.

УДК 536.2

Юшко С.В., Горбунов К.А., Горбунова Н.А.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ – КАК СПОСОБ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА КРИОВОЗДЕЙСТВИЯ НА НЕБНУЮ МИНДАЛИНУ

В работе проведен анализ некоторых существующих математических зависимостей для контроля процесса охлаждения и замораживания органических материалов.