УДК 532. 135; 532.5

Белецкий Э.В., Толчинский Ю.А.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТРЕНИЯ И ТЕПЛООТДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЕЙ НЕНЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ

Постановка проблемы в общем виде. Большинство процессов пищевой промышленности связано с переработкой дисперсных систем, суспензии, коллоидных растворов, различных вязкопластических материалов.

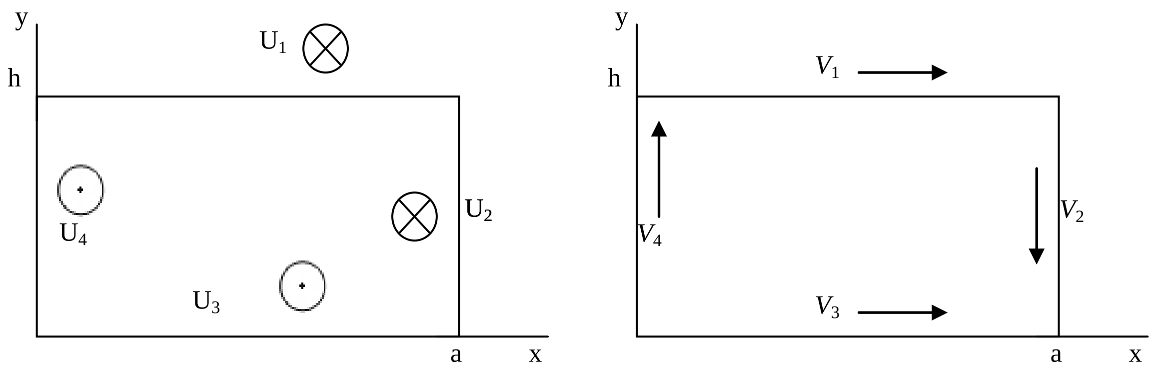
При расчете процессов пищевой технологии большое значение имеют параметры, при которых осуществляется протекание технологических процессов, а именно давление, температура, скорость течения [1, 2]. При этих умеренных значениях параметров сами пищевые материалы могут претерпевать весьма значительные изменения. В полной мере сказанное относится к реологии [1, 2]. Последняя выступает как определяющая в таких процессах, как движение пищевых материалов в каналах и трубах транспортирующих устройств, машин и аппаратов различного назначения. Эти движения часто сопровождаются процессами поглощения, выделения или передачи тепла. Во всех этих процессах реология формирует поле течения, структура которого определяет коэффициенты трения, местного сопротивления и теплоотдачи.

Существующие виды течений могут быть условно разбиты на два следующих подмножества: подмножество течений в каналах машин и аппаратов, и подмножество течений в трубопроводах. Для течений в каналах в роли движущей силы выступают разность давлений на границах каналов и (или) движения границ каналов, выступающих представителями рабочих поверхностей. Для течений в трубах источником движения выступает только перепад давлений в начале и в конце трубопровода. К последнему случаю относятся также течения теплоносителей.

Анализ последних исследований и публикаций. В пищевой технологии известно огромное число феноменологических реологических моделей описывающих поведение тех или иных материалов [1, 2]. Для этих моделей характерно наличие сложных зависимостей между напряжением сдвига, скоростью сдвига и температурой (реже – давлением). Наряду с таким подходом, в котором для каждого отдельного материала и ситуации его использования подбирается соответствующее уравнение его реологического состояния, хотя может иметь место и иной подход. Суть его состоит в том, что целью является изучение нескольких достаточно простых реологических моделей, которые, однако, обладают большой репрезентативностью для того, чтобы быть пригодными в большом числе ситуаций инженерной практики.

Цель и задачи статьи. Представляется достаточно обоснованным рассматривать в связи со сказанным, такие модели: модель жидкости, вязкость которой зависит от скорости сдвига (для течения типа Куэтта) или, в общем случае, от второго инварианта тензора скорости деформаций (для сложного течения); модель бингамовской жидкости, пороговое напряжение сдвига которой зависит от давления. В модели жидкости с зависимостью вязкости от скорости сдвига параметры уравнения реологического состояния могут зависеть от температуры [3, 4, 5].

Изложение основного материала исследования. Задачи, которые уместно ставить для жидкостей, реология которых подчинена таким моделям, могут быть упорядочены и представлены некоторой иерархией, в основе которой лежат задачи продольных течений в трубах и каналах. Детальное описание течений в таких областях, позволяет решать задачи в более сложных областях (имеется ввиду сложность геометрии). При этом необходимо следовать общей гидродинамической схеме анализа течений в каналах и трубах. Схема имеет два уровня описания: собственно, гидродинамический и гидравлический [6, 7, 8, 9]. Гидродинамический уровень описания – подробный потому, что локальный, т.к. информация о течении предоставляется в каждой точке. Гидравлический уровень описания – сокращенный. При этом вся локальная информация о течении теряется, а само течение характеризуется интегрально – с помощью соотношения, связывающего между собой перепад давлений и среднюю скорость (или расход) течения. Из гидродинамического уровня описания следует гидравлический, но не наоборот. При постановке задач течения в канале, естественным образом возникают как типичные, следующие граничные условия (см. рисунок 1. а и б):



а

б

б

Рисунок 1 – Граничные условия в канале:
а – продольные условия; *б* – поперечные условия

На рис. 1 изображен. В качестве типичного, прямоугольный канал, к границам которого приложены продольные и поперечные скорости; продольные скорости обозначены как u_i ($i=1\div4$), поперечные скорости обозначены как v_j ($j=1\div4$). Направления скорости указаны кружками и стрелками как в этом конкретном примере, но могут быть каким угодно. Постановка задач о течении в трубе предусматривает только нулевые граничные условия, а форма трубы обычно бывает круглой так, что сечение трубы – или круг, или кольцо.

Течение ньютоновской жидкости в каналах и трубах было изучено подробно на гидродинамическом уровне, для многих областей следствием чего стало возможным и описание на гидравлическом уровне [10, 11, 12, 13]. Гидродинамическое описание приводит к зависимости характеристик течения от числа Рейнольдса. Инженерная практика свидетельствует о том, что течения в каналах целесообразно изучать при малых значениях числа Рейнольдса, когда течения являются стоксовыми [10, 11, 13]. Течения в трубах, представляющие практический интерес, следует рассматривать в широком диапазоне изменения числа Рейнольдса [6, 7, 8, 9].Этот диапазон охватывает как стоксовый, так и инерционный, и турбулентный режимы течения. Результатом такого рассмотрения является гидравлическое описание, которые характеризует течение всего двумя параметрами – коэффициентом сопротивления трения и коэффициентом местного сопротивления. Для этих параметров изучена их зависимость от числа Рейнольдса, а результаты изучения отражены в большом количестве книг и справочников [7, 8, 9].

Течения в трубах и каналах помимо такой своей характеристики как режим течения, имеют и другую сторону: они могут быть установившимися или неустановившимися. Здесь имеется ввиду следующее: течение в каналах и трубах имеет, по преимуществу, продольный характер. Для ньютоновских жидкостей установлено теоретически и экспериментально, что, по мере продвижения по каналу или трубе, течение вырождается во вполне определенное (называемое пуазейлевским или квазипуазейлевским). Термин «вырождение» означает, что каким бы ни было течение ньютоновской жидкости на входе в канал или трубу, по мере того, как она пройдет достаточно большое расстояние от входа, течение будет все больше приближаться к одному единственному течению, «забывая» о том, каким оно было на входе. Длина, на которой возникает это единственное, по сути, предельное течение, называется длиной стабилизации или установления [8, 9]. Эта длина зависит от значения числа Рейнольдса, характерного поперечного размера канала и демонстрирует тенденцию увеличиваться с увеличением этого числа. Наличие длины стабилизации течения оказывает определяющее влияние на величины коэффициентах сопротивления трения, теплоотдачи. Основной массив сведений о коэффициентах сопротивления трения, местных потерь и теплоотдачи относится к полностью стабилизированным течениям в каналах и трубах. Это, безусловно, следует считать уместным в тех случаях, в которых длины труб и каналов значительно превосходят длины участков стабилизации, т.е. верно для протяженных трубопроводов. Для небольших трубопроводов и каналов, составляющих части машин и аппаратов пищевой промышленности это условие выполняется с большой погрешностью. Перенос же результатов, полученных для стабилизированных течений на нестабилизированные недопустим, так как приводит к существенным ошибкам при подсчете потерь давления и величины тепловых потоков.

Как правило, течения в трубах и каналах сопровождаются переносом тепла. Тепловые процессы также можно описывать на двух уровнях – локальном и интегральном. На локальном уровне решение уравнения переноса температуры позволяет найти ее значение в каждой точке области переноса. Интегральный уровень аналогичен гидравлическому и, теряя локальную информацию, сохраняет интегральную в виде коэффициента теплоотдачи [8, 9, 14]. С помощью этого коэффициента вычисляется плотность теплового потока на границе канала или трубы. Коэффициент теплоотдачи целиком формируется теплофизическими характеристиками жидкости и локальными свойствами ее течения вблизи границы.

Течения ньютоновской жидкости в каналах и трубах обладает определенной структурой. Это означает, что вся область течения может быть разбита на подобласти с принципиально различными течениями. В ходе протекания жидкости (по мере продвижения вдоль канала или трубы) размеры этих подобластей изменяются. В каналах и трубах можно указать такие подобласти: одна – примыкающая к границам канала или трубы, и другая, которая не касается границ. Эта последняя подобласть называется ядром течения. Течение ньютоновской жидкости в ядре сформировано течением в области, которая предшествовала рассматриваемым каналу или трубе. Течение в подобласти, примыкающей к границам канала или трубы, иначе называемое пограничным слоем, сформировано рассматриваемыми каналом или трубой. По мере продвижения влияние пограничного слоя рассматриваемого канала или трубы на жидкость увеличивается, а предшествовавшей области уменьшается. Это проявляется в том, что ядро течения уменьшается, а приграничная подобласть увеличивается до тех пор, пока не займет собой всю область течения. После этого наступает стабилизация потока и устанавливается предельный профиль скорости течения. Приведенная картина равно пригодна как для ламинарных, так и для турбулентных течений. Разбиение потока жидкости на подобласти показано на рис. 2а, б. Область, примыкающая к границам трубы, называется гидродинамическим пограничным слоем. Если этот слой занимает все поперечное сечение канала или трубы, то сила трения на границах определяется профилем скорости всего течения. Если же этот слой занимает не все поперечное сечение канала или трубы, то сила трения на границах определяется профилем скорости только в этом слое.

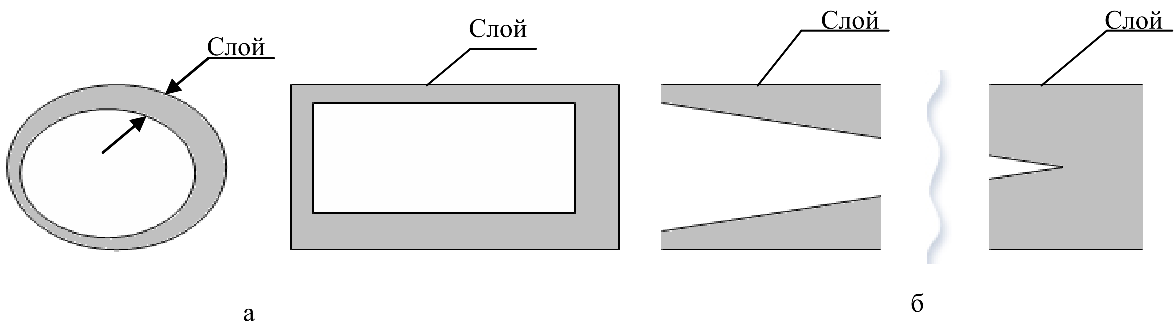


Рисунок 2 – Пограничные слои:
а – поперечное сечение; б – параллельное сечение

Сказанное выше целиком переносится на процесс распространения тепла в движущихся жидкостях в каналах и трубах. С точки зрения распределения температуры в объеме канала или трубы также можно выделить две разные подобласти: подобласть, в которой температура почти постоянна по сечению (ядро потока температуры), и подобласть, в которой температура сильно изменяется от своего значения на границе до значения в ядре. Приграничная подобласть называется тепловым или температурным пограничным слоем. Толщина этого слоя увеличивается от входа в канал или трубу по мере продвижения жидкости. На достаточно большом расстоянии от входа устанавливается предельный или стабилизированный, он же установившийся профиль температуры. Длина, на которой устанавливается такой предельный профиль, называется длиной температурной стабилизации. Толщины гидродинамического и температурного пограничных слоев и соответствующим им длины стабилизации, не совпадают друг с другом по величине [8, 9, 14, 16, 18].

Важное отличие стабилизированной скорости от стабилизированной температуры состоит в том, что профиль стабилизированной скорости остается неизменным при неизменности границ канала или трубы, а профиль стабилизированной температуры самоподобно увеличивается в силу принципа сохранения количества тепла (все, что вошло через границы, должно выйти через поперечное сечение канала или трубы с потоком жидкости).

Из вышеизложенного следует, что определение коэффициентов трения, местных сопротивлений и коэффициентов теплоотдачи как элементов сокращенного описания гидродинамических и тепловых процессов в каналах и трубах основано на таких свойствах, как режим течения (стоксовый, инерционный, турбулентный) и структура потока (разбиение на ядро и пограничные слои).

Все, сказанное выше, относилось к ньютоновской жидкости. Следовательно, для того, чтобы с той же степенью подробности можно было анализировать течения в трубах и каналах неньютоновских жидкостей, необходимо уметь вычислять форму и размеры гидродинамического и температурного пограничных слоев для различных режимов течения и длины стабилизации потоков импульса и температуры. На основании этих данных надо уметь вычислять коэффициенты сопротивления трения , местных сопротивлений и коэффициенты теплоотдачи.

В рамках реализация такой программы рассмотрим реологические модели со следующими связями вязкости и скорости сдвига применительно к продольному чисто сдвиговому течению:

$$\mu(\dot{\varepsilon}) = \alpha + \beta\ \dot{\varepsilon}\ \alpha = \alpha(T), \beta = \beta(T), \tag{1}$$

где μ – вязкость, α и β – коэффициенты, зависящие от температуры и определяемые из эксперимента или справочных данных; $\dot{\varepsilon}$ – скорость сдвига продольного течения. Вязкость (1) как линейная функция, представляет собой простейший сплайн, с помощью которого есть возможность аппроксимировать любую гладкую зависимость вязкости μ от $\dot{\varepsilon}$. Если течение не является одномерным продольным, то связь вязкости со скоростью сдвига может быть представлена так:

$$\mu(\dot{\varepsilon}) = \alpha + \beta\sqrt{\dot{I}_2}\ , \qquad \dot{I}_2 = \frac{1}{2}\sum_{i,k}\dot{\varepsilon}^2 \qquad i_1\ k = x, y,\ z; \tag{2}$$

$$\dot{\varepsilon}_{i,k} = \partial\ \upsilon_i\ /\ \partial\chi\ \kappa\ + \partial\ \nu_k / \partial\chi_i,$$

где x, y, z, – декартовы координаты области течения; υ_i – компоненты вектора скорости; I_2 – второй инвариант тензора скорости деформаций [3, 4]. Уравнение Навье-Стокса для $\mu\ (\dot{\varepsilon})$ из (2) записываются в следующем виде:

$$\rho(\vec{\nu}\nabla)\vec{\nu} = -\nabla P + \nabla(\mu(\dot{\varepsilon})\nabla\hat{\varepsilon}, \quad \hat{\varepsilon} = \left\|\varepsilon_{ik}\right\|,\ i, k = x, y, z, \tag{3}$$

где ρ – плотность жидкости; P – давление в жидкости. Плотность ρ может быть, вообще говоря, функцией температуры, однако в области пищевых технологий в силу ограниченности интервала изменения температуры, изменение ρ от T часто бывает незначительным. Выбирая в качестве базовой задачу о течении в плоском канале или трубе для стоксового режима уравнение (3) принимает следующий вид:

$$-\partial P / \partial X + \frac{\partial}{\partial y}(\alpha + \beta\frac{\partial \nu_x}{\partial y})\frac{\partial \nu_x}{\partial y} = 0; \tag{4}$$

где X – координата вдоль канала или трубы; y – координата поперек. Для этой задачи граничные условия выглядят так:

$$\left.\begin{aligned}\nu_x(y=0) &= \nu_0,\\ \nu_x(y=h) &= \nu_h\end{aligned}\right\}\ \textit{канал;} \qquad \left.\begin{aligned}\nu_x(y=0) &= 0\\ \nu_x(y=h) &= 0\end{aligned}\right\}\ \textit{труба,} \tag{5}$$

где v_0 и v_h продольные скорости границ канала; h – толщина канала.

В канале границы могут иметь поперечные составляющие скорости v_0 и v_h соответственно. Тогда течение в канале станет двухмерным, а соответствующие уравнения примут такой вид:

$$-\partial \rho \ / \partial x + \frac{\partial}{\partial y}\left\{(\alpha + \beta\sqrt{\mathrm{I}_2})(\partial \nu_x / \partial y + \partial \nu_y / \partial x)\ \right\},$$
$$-\partial \rho / \partial y + \frac{\partial}{\partial x}\left\{(\alpha + \beta\sqrt{\mathrm{I}_2})(\partial \nu_x / \partial y + \partial \nu_y / \partial x),\right. \qquad (6)$$
$$\partial \nu_\mathrm{x} / \partial \mathrm{x} + \partial \nu_\mathrm{y} / \partial \mathrm{y} = 0$$

Уравнение переноса температуры в стоксовом течении имеет обычный вид [13, 16, 17]:

$$\rho\, c_p (\nu_x \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x} + \nu_y \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y}) = \nabla(\lambda \nabla \mathrm{T}), \qquad (7)$$
$$\lambda \partial \mathrm{T} / \partial n / \mathrm{г} = \alpha_\mathrm{T}(\mathrm{T} - \mathrm{T}^{\infty}),$$

где C_p – теплоемкость жидкости; λ – теплопроводность жидкости; α_T – коэффициент теплоотдачи на границе канала или трубы; T^{∞}–температура в ядре потока.

Уравнения (6) и (7) связаны между собой через зависимость коэффициентов α и β от температуры и через вхождение компонентов скорости Ux и Uy в (7). Для чисто продольного стоксового течения уравнение (4) можно записать так:

$$-\frac{\partial \rho}{\partial \mathrm{x}} + \alpha \frac{\partial^2 \nu_x}{\partial y^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial \mathrm{T}} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y} \frac{\partial \nu_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial \mathrm{T}} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y} (\frac{\partial \nu_x}{\partial y})^2 + 2\beta \frac{\partial \vartheta x}{\partial y} \frac{\partial^2 \nu_x}{\partial y^2} = 0. \qquad (8)$$

Для уравнений (4), (6), (7), (8) необходимо найти решения, которые представляют собой стабилизированные решения с нулевой длиной стабилизации. После этого возможно определение коэффициентов трения и теплоотдачи.

Течению бингамовской жидкости отвечает модель вязкости следующего вида [4, 17]:

$$\mu = \gamma(\rho) + \frac{\delta(\rho)}{\sqrt{\mathrm{I}_2}}, \qquad (9)$$

где $\gamma(\rho)$ выполняет роль, собственно, вязкости, а $\delta(\rho)$ играет роль порогового напряжения сдвига, по достижении которого прекращается вязкое течение.

Тензор напряжений жидкости с такой вязкостью записывается так:

$$\tau_\mathrm{ik} = (\gamma(\rho) + \frac{\delta(\rho)}{\sqrt{\mathrm{I}_2}})\varepsilon_{ik}. \qquad (10)$$

На тех поверхностях внутри области течения в канале или трубе, где величина I_2 обращается в ноль, жидкость затвердевает, образуя твердое ядро течения. Определение границ и скорости движения ядра представляет собой основную задачу течения бингамовской жидкости.

Уравнение продольного стоксового течения бингамовской жидкости в плоских канале и трубе принимают такой вид:

$$-\frac{\partial \rho}{\partial \mathrm{x}}+\frac{\partial}{\partial y}(\gamma(\rho)\frac{\partial \nu_x}{\partial y}+\delta(\rho))=0 \qquad (12)$$

с условиями на границах (5). С учетом зависимости $\gamma(\rho)$ и $\delta(\rho)$ конечные размеры твердого ядра будут зависеть от давления и от продольной координаты *x*.

Если перейти к ламинарным течениям вне стоксового интервала чисел Рейнольдса, то для стабилизированных течений неньютоновских жидкостей конвективные слагаемые автоматически обратятся в ноль. Это следует из того обстоятельства, что если v_x есть $v_x(y)$, а $v_y \equiv 0$, то форма:

$$\nu_x \partial \nu_x / \partial_x + \nu_y \partial \nu_x / \partial_y \equiv 0. \qquad (13)$$

Для течений с реологией вида (2) и (9) это условие уже не будет соблюдаться, т.е. для стабилизированных течений следует ожидать зависимости предельных течений от продольной координаты *x*.

Для нестабилизированных течений необходимо рассматривать уравнения вида (6), (12) или его многомерные аналоги с дополнительными конвективными слагаемыми (13).

Решения уравнений стабилизированного течения требует задания граничных условий на всех границах области течения (канала или трубы). Решение этих же уравнений, но с конвективными слагаемыми (13) в приближении гидродинамического и температурного пограничного слоев требует задания лишь одного условия на границе канала и трубы. Второе условие следует задавать на неизвестной заранее границе соответствующего пограничного слоя и ядра течения (температурного ядра).

Представленные выше уравнения пригодны для описания стоксовых и инерционных течений, но не турбулентных. Распространение соответствующих задач течения на турбулентные режимы заключается в том, что проводится разложение вектора скорости течения и давления на среднюю и случайную составляющие, после чего каждое слагаемое уравнений течения усредняется. В результате такой процедуры получаются уравнения для средних значений и корреляторов мультипликативных величин. Кроме того, к тензору напряжений добавляется дивергенция тензора случайных или пульсационных составляющих такого вида [12, 13, 15]:

$$-\frac{\partial}{\partial \mathrm{xk}}\rho \nu_k \nu_i . \qquad (14)$$

Известно, что для ньютоновской жидкости турбулентные течения в каналах и трубах достаточно хорошо объясняются с помощью гипотезы Прандтля, согласно которой у границ имеется универсальное распределение профиля скорости, подчиняющееся логарифмическому закону. Область течения турбулентной ньютоновской жидкости может быть разбита на две подобласти – ядро течения и пограничный слой. В отличие от ламинарного течения турбулентный пограничный слой внутри себя содержит вязкий подслой, в котором турбулентность затухает, и течение носит ламинарный характер [12, 13]. Вне этого подслоя расположен собственно турбулентный слой с логарифмическим профилем продольной скорости, который примыкает к ядру течения. На стабилизированном участке ядра течения нет; и все сечение заполнено пограничным слоем, в результате чего устанавливается предельный профиль скорости. На участке стабилизации потока, напротив, имеется уменьшающееся ядро потока и развивающийся пограничный слой.

Данная схема целиком переносится и на неньютоновские течения. Тому есть два подтверждения. Первое состоит в том, что эта схема имеет универсальный характер; и при ее формировании нигде специально не использовалось такое свойство как ньютоновость жидкости. Второе подтверждение состоит в том, что после предельного перехода от неньютоновской реологии к ньютоновской реализуется апробированная схема пристеночной турбулентности Прандтля. Поскольку тензор пульсационных напряжений образован парными корреляторами случайных составляющих вектора скорости после усреднения конвективных слагаемых вида (13) в уравнениях течения, он имеет универсальный характер, не зависящий от выбора той или иной реологической модели и совпадающий с таковым для ньютоновской модели. Это значит, что турбулентность в, собственно, турбулентном пограничном слое для любой модели реологии одна и та же. Отличия возникают в вязком подслое, граница которого доставляет для, собственно, турбулентного пограничного слоя граничное условие. Течение же в вязком подслое для каждой реологической модели свое. Поэтому значения скорости на границе вязкого подслоя и турбулентного слоя для ньютоновской и неньютоновской реологий будут различными. В силу того, что турбулентная вязкость везде, кроме вязкого подслоя, значительно превосходит молекулярную, в, собственно, турбулентном слое профиль продольной скорости тоже будет логарифмическим, т.е. универсальным.

Все сказанное здесь относительно гидродинамического пограничного слоя в турбулентном режиме течения неньютоновских жидкостей переносится на температурный пограничный слой.

Модель инерционного течения в пограничным слое для реологической модели (1) записывается в следующем виде:

$$\rho(\nu_x \frac{\partial \nu_x}{\partial x} + \nu_y \frac{\partial \nu_x}{\partial y}) = -\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{(\alpha + \beta \frac{\partial \nu_x}{\partial y})\frac{\partial \nu_x}{\partial y}\right\}; \quad (15)$$

$$\partial \nu_x / \partial_x + \nu_y / \partial y = 0;$$
$$\nu_x(y=0)=0;$$
$$\nu_x\left(y=\delta_\nu\right)=U^{\infty}, \quad (16)$$

где δ – означает толщину гидродинамического ламинарного пограничного слоя; U^{∞} – значение продольной скорости в ядре потока.

Модель ламинарного течения в пограничном слое для реологической модели (12) может быть записана в следующем виде:

$$\rho(\nu_{\mathrm{x}}\frac{\partial \nu_x}{\partial x}+\nu_y\frac{\partial \nu_x}{\partial y})=-\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\gamma(\rho)\frac{\partial \nu_x}{\partial y}+\delta(\rho)\right\}; \tag{17}$$

$$\partial \nu_{\mathrm{x}}/\partial_x+\upsilon_y/\partial \mathrm{y}=0;$$

$$\nu_x(y=0)=0;$$

$$\nu_x(y=\delta_\nu)=U^{\infty}$$

Модель переноса температуры в ламинарном температурном пограничном слое имеет следующий вид:

$$\rho cp(\nu_{\mathrm{x}}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x}+\upsilon_y\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y})=\frac{\partial}{\partial y}(\lambda(\mathrm{T})\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y}); \tag{18}$$

$$\mathrm{T}(y=0)=\mathrm{T}_0,$$

$$\mathrm{T}(y=\delta_{\mathrm{T}})=\mathrm{T}^{\infty\,\mathrm{L}}$$

где T_0 – значение температуры на границе канала или трубы; $\mathrm{T}^{\infty\,\mathrm{L}}$ – значение температуры в ядре потока; δ_{T} – означает толщину температурного ламинарного пограничного слоя.

Модель турбулентного течения в гидродинамическом пограничном слое для реологии (1) может быть представлена следующим образом:

$$\rho(\upsilon_{\mathrm{x}}\frac{\partial \overline{\nu_x}}{\partial x}+\upsilon_y\frac{\partial \overline{\nu_x}}{\partial y})=-\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}(\bar{\alpha}+\bar{\beta}\frac{\partial \overline{\upsilon_x}}{\partial \mathrm{y}})\frac{\partial \overline{\upsilon_x}}{\partial y}+\overline{\alpha^{/}}\frac{\partial \overline{\upsilon_x}}{\partial y}+\frac{\overline{\alpha^{/}\partial \upsilon_x^{/}}}{\partial y}+\bar{\beta}(\frac{\partial \upsilon^{/}}{\partial y})^2+$$
$$\overline{\beta^{/}}\overline{(\frac{\partial \upsilon^{x}}{\partial y})^2}+\beta^{/}\overline{(\frac{\partial \upsilon_x^{/}}{\partial y})^2}-\frac{\partial}{\partial y}\overline{\rho\upsilon^{/}}x^2 \tag{19}$$

$$\overline{\upsilon_x}(y=0)=0; \tag{20}$$

$$\upsilon_x(y=\delta_{\vee}^{t})=\upsilon^{\infty t}\ \mathrm{t},$$

где знак «–» означает операцию усреднения величины, над которой он стоит; знак « / » означает случайную составляющую величины; $\delta^{\mathrm{t}}_{\vee}$ – означает толщину турбулентного слоя; $\upsilon^{\infty t}$ означает величину скорости в ядре турбулентного потока.

Модель турбулентного течения в пограничном слое для реологической модели (12) выглядит следующим образом:

$$\rho(\overline{\upsilon_{\mathrm{x}}}\frac{\partial \nu_x}{\partial \mathrm{x}}+\overline{\nu_y}\frac{\partial \overline{\nu_x}}{\nu y})=-\frac{\partial \bar{\mathrm{P}}}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}(\bar{\gamma}\frac{\partial \overline{\upsilon_x}}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\overline{\gamma^{/}\partial \nu^{/}{}_x}}{\partial y}+\frac{\partial \bar{\delta}}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\overline{\rho\nu^{/}}\chi^2; \tag{21}$$

$$\overline{\nu_{\mathrm{x}}}(y=0)=0; \tag{22}$$

$$\nu_x(y=\delta^{\mathrm{t}}{}_{\mathrm{v}})=\mathrm{U}^{\infty\,\mathrm{L}}.$$

Уравнения (21) и (19), для конкретности, записаны так потому, что сделано допущение о том, что функции $\lambda, \beta, \gamma, \delta$ могут быть представлены в виде суммы постоянной и случайной составляющих. Это верно, если эти функции можно представить как линейно зависящие от температуры и давления. В противном случае такое расщепление и такой конкретный вид уравнений невозможен.

Модель турбулентного переноса температуры в пограничном температурном слое записывается так:

$$\rho c_p(\overline{\nu_x}\frac{\partial \overline{T}}{\partial x}+\overline{\nu_y}\frac{\partial \overline{T}}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\bar{\lambda}\frac{\partial \overline{T}}{\partial y})-\frac{\partial}{\partial y}(\rho c_p\overline{\nu_x'\frac{\partial \overline{T}}{\partial y}}); \tag{23}$$

$$\begin{gathered}\overline{T}\,(y=0)=T_0,\\ \overline{T}(y=\delta_T^t)=T^{\infty t},\end{gathered} \tag{24}$$

где $T^{\infty t}$ – означает температуру в ядре потока; δ_T^t – означает толщину температурного турбулентного пограничного слоя.

Для разрешимости уравнений турбулентного течения в ядре потока и в пограничном слое необходимо установить связь между средними и случайными составляющими для скорости течения и температуры. Исходя из сказанного выше, следует на основании гипотезы Прандтля ввести длины перемешивания $\ell_\vee$ и ℓ_T для скорости и температуры соответственно, по правилу [12, 13, 15].

$$\nu_x'/\partial\overline{\nu_x}/\partial y=l_\vee; \quad T'/\partial\overline{T}/\partial y=l_T. \tag{25}$$

Выводы. Реализация изложенной методики позволила бы вычислить коэффициенты сопротивления трения и коэффициенты теплоотдачи для стабилизированных и нестабилизированных течений неньютоновских жидкостей рассмотренных моделей во всем диапазоне изменения числа Рейнольдса. Для вычисления местных сопротивлений требуется знание полей скорости, и температуры во всем объеме канала и трубы. Соответствующая модель составит предмет следующей публикации.

Литература

1. Лукин, Д.Г. Теплообменные аппараты пищевых производств [Текст] / Д.Г. Лукин, В.Н. Вельтищев. – М.: Агропромиздат, 1987. – 239 с.

2. Кузнецов, О.А. Реология пищевых масс [Текст]: учеб. пособие / О.А. Кузнецов, Е.В. Волошин, Р.Ф. Сагитов. – Оренбург, 2005. – 234 с.

3. Райнер, М. Реология [Текст] / М. Райнер. – М.: Наука. ГРФМЛ, 1965. – 223 с.

4. Фрейденталь, А. Математические теории неупругой сплошной сферы [Текст] / А. Фрейденталь, Х. Гейрингер. – М.: ГИФМЛ, 1962. – 432 с.

5. Уилкинсон, У.Л. Неньютоновские жидкости [Текст] / У.Л. Уилкинсон. – М.: Мир, – 1964. – 216 с.

6. Гиргидов, А.Д. Механика жидкости и газа (гидравлика) [Текст] / А.Д. Гиргидов. – Спб.: Изд-во СпбПУ, 2007. – 545 с.

7. Идельчик, И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям [Текст] / И.Е. Идельчик. – М.: Машиностроение, 1975. – 653 с.
8. Кутателадзе, С.С. Анализ подобия в теплофизике [Текст] / С.С. Кутателадзе. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд., 1982. – 280 с.
9. Кутателадзе, С.С. Теплоотдача и гидродинамическое сопротивление [Текст] / С.С. Кутателадзе. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 336 с.
10. Гогос, К. Теоретические основы переработки полимеров [Текст] / К. Гогос, З. Тармор. – И.: Химия, 1984. – 628 с.
11. Берхардт, Э. Переработка термопластичных материалов [Текст] / Э Берхардт. – М.: Химия, 1965. – 746 с.
12. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика [Текст]. Т. VI. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – 3-е изд. – М.: Наука. ГРФМЛ, 1986. – 736 с.
13. Торнер, Р.В. Теоретические основы переработки полимеров [Текст] / Р.В. Торнер. – М.: Химия, 1967. – 462 с.
14. Кутателадзе, С.С. Основы теории теплообмена [Текст] / С.С. Кутателадзе. – 8 изд. – М.: Наука. ГРФМЛ, 1979. – 415 с.
15. Турбулентность. Принципы и применения [Текст] / под ред. У. Фроста, Т. Моулдена. – М.: Мир., 1980. – 535 с.
16. Тарг, С.М. Основные задачи теории ламинарных течений [Текст] / С.М. Тарг. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1951. – 420 с.
17. Лойцянский, Л. Г. Механика жидкости и газа [Текст] / Л. Г. Лойцянский. – 4-е изд. – М.: Наука. ГРФМЛ, 1973. – 847 с.
18. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой [Текст] / Л. Г. Лойцянский. – М.: ГИФМЛ, 1962. – 479 с.

УДК 532. 135; 532.5

Білецький Е.В., Толчинський Ю.А.

ЩОДО ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ТЕРТЯ ТА ТЕПЛОВІДДАЧІ ДЛЯ ДЕЯКИХ МОДЕЛЕЙ НЕНЬЮТОНІВСЬКИХ РІДИН

В статті розглядається програма обчислень гідравлічних коефіцієнтів для різних моделей степінної й бінгамовскої рідини за умов течії в трубах та каналах.

Beletsky E.V., Tolchinskiy Y.A.

ABOUT THE DETERMINATION OF FRICTION AND HEAT TRANSFER COEFFICIENTS FOR SOME MODELS OF NON-NEWTONIAN FLUIDS

The article deals with the program of calculating hudraulic factors for various models of exponential and Bingano fluids in pipes and channels.